

UNIVERSITÉ CADI AYYAD  
FACULTÉ DES SCIENCES  
SEMLALIA-MARRAKECH

# THESE

Présentée à la Faculté, pour obtenir le grade de :

Docteur d'Etat Es-Sciences  
(Option : Analyse Numérique)

## *Schémas Volumes Finis pour une Classe d'Equations de Type Convection-Diffusion Issues des Milieux Poreux*

Par  
Mohammed Afif  
(Docteur d'Université)

Soutenue le 07 Février 2002 devant la commission d'examen :

Président : D. OUAZAR Pr. à l'EMI Université Mohamed V Rabat.

Examineurs :

B. AMAZIANE	Pr. à l'Université de Pau (France).
M. EL ALAOUI TALIBI	Pr. à l'Université Cadi Ayyad F.S.S.M.
M. GHILANI	Pr. à l'Université My Ismaïl F.S. Meknès.
A. HAKIM	Pr. à l'Université Cadi Ayyad F.S.T.M.
A. LEMBARKI	Pr. à l'Université Cadi Ayyad F.S.S.M.
Z. MGHAZLI	Pr. à l'Université Ibn Tofaïl F.S. Kénitra.
C. SERRES	Dr. Ingénieur de Recherche à l'I.P.S.N. Fontenay-Aux-Roses (France).



# بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Au nom de DIEU le Très Miséricordieux,  
le Tout Miséricordieux.

نَرْفَعُ دَرَجَاتٍ مِّنْ نَّشَأٍ وَفَوْقَ كُلِّ ذِي عِلْمٍ عَلِيمٌ ﴿٧٦﴾  
سورة يوسف

..... Nous élevons en rang qui Nous voulons.  
Et au-dessus de chaque savant, il est un  
grand Savant.

12-Joseph. v76

A la mémoire de mes parents, qui m'ont  
fait au berceau le don, le plus précieux,  
celui de la foi.

A ma Famille  
A mes Frères et Sœurs



# Remerciements

Mes remerciements s'adressent à toutes les personnes qui ont, de près ou de loin, contribué à la réalisation de ce travail, en particulier :

- Messieurs **Brahim Amaziane** (Université de Pau et des Pays de l'Adour en France) et **Mohamed El Alaoui Talibi** (Université Cadi Ayyad, Faculté des Sciences Semlalia-Marrakech), pour leur encadrement et leur soutien moral et matériel au cours de ce travail.
- Messieurs **Mustapha Ghilani** (Université My Ismaïl, Faculté des Sciences, Meknès), **Abdelilah Hakim** (Université Cadi Ayyad, Faculté des Sciences et Techniques, Marrakech) et Madame **Zoubida Mghazli** (Université Ibn Toufaïl, Faculté des Sciences, Kénitra), qui ont accepté d'être rapporteurs de cette thèse et pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.
- Messieurs **Alami Lembarki** (Université Cadi Ayyad, Faculté des Sciences Semlalia-Marrakech), **Dris Ouazar** (Université Mohamed V, Ecole Mohamadia des Ingénieurs, Rabat) et **Christophe Serres** (Institut de Protection et de Sûreté Nucléaire, Fontenay-Aux-Roses, France), qui ont accepté de participer au jury, en particulier Monsieur **Dris Ouazar**, pour avoir présider ce jury.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à :

- Monsieur **Jean-Paul Vila** (Institut National des Sciences Appliquées, Toulouse, France), pour ses discussions fructueuses au début de ce travail.

Je remercie aussi, pour son accueil et son soutien :

- Monsieur **F. El Dabaghi**, à l'INRIA (Institut National de Recherche en Informatique et Automatique) de Paris en France.

Enfin, je tiens à remercier **ma famille** surtout ma femme qui a patagé avec moi les moments les plus douloureux et **mes amis** pour leur soutien tout au long de ces années de travail, ainsi que **mes collègues** du département de mathématiques de la faculté des sciences Semlalia-Marrakech, qui m'ont permis de me détacher pour effectuer ce travail, mes remerciements s'adresse aussi à **mes collègues** du département de mathématiques et de recherche à l'UPPA (Université de Pau et des Pays de l'Adour en France).



# AVANT PROPOS

- **Nom Prénom de l'auteur :** *Afif Mohammed*<sup>1</sup>

- **Intitulé du travail :**

*“Schémas Volumes Finis pour une Classe d'Equations de Type  
Convection-Diffusion Issues des Milieux Poreux”*

- **Mots - Clés :**

*Schémas volumes finis, équation parabolique non linéaires, maillage  
déstructuré, convection-diffusion dégénérée, milieux poreux anisotrope.*

- **Nom Prénom des directeurs de recherche :**

*Mr Amaziane Brahim, Professeur à l'Université de Pau, France.*

*Mr El Alaoui Talibi Mohamed, Professeur à l'Université Cadi Ayyad.*

- **Laboratoires où les travaux ont été réalisés :**

*Département de Mathématiques Recherches, U.F.R. des Sciences, Université  
de Pau et des Pays de l'Adour, France.*

*Laboratoire d'Analyse Numérique et Optimisation, Faculté des Sciences  
Semlalia-Marrakech, Université Cadi Ayyad.*

- **Date de commencement de ce travail :** *Juin 1995*

- **Rapporteurs autres que les encadrants :**

*Mr Ghilani Mustapha, Professeur à l'Université My Ismaïl, Meknès.*

*Mr Hakim Abdelilah, Professeur à l'Université Cadi Ayyad, Marrakech.*

*M<sup>me</sup> Mghazli Zoubida, Professeur à l'Université Ibn Toufaïl, Kénitra.*

- **Cadres de coopération, soutien financier :**

*Actions Intégrées, Projet Européen ESIMEAU : INCO-DC/ESPRIT,*

*Département de Mathématiques Recherches, Université de Pau (France),*

*P.I.C.S., INSA de Lyon (France).*

---

<sup>1</sup>Université Cadi Ayyad, Faculté des Sciences Semlalia, BP 2390 Marrakech Maroc  
Département de Mathématiques, Fax : +212 44 43 74 09, Laboratoire A.N. & O.  
E-mail : mafif@technologist.com, URL : [http://www.geocities.com/m\\_afif/](http://www.geocities.com/m_afif/)

## Publications et Communications :

- M. Afif and B. Amaziane, “*On convergence of finite volume schemes for one-dimensional two-phase flow in porous media*”, Preprint Univ. Pau Labo. Math. Appli., N°9706 (1997), to appear in: *Journal of Computational and Applied Mathematics*, (2002).
- M. Afif and B. Amaziane, “*Convergence of finite volumes schemes for a degenerate convection-diffusion equation arising in flow in porous media*”, Preprint Univ. Pau Départ. Math. Rech., (1999), en révision dans : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*.
- M. Afif and B. Amaziane, “*Analysis of Finite Volume Schemes for Two-Phase Flow in Porous Media on Unstructured Grids*”, in: F. Benkhaldoun and R. Vilsmeier, eds, *Finite Volumes for Complex Applications II - Problems and Perspectives*, (Hermès, Paris, 1999) 387-394.
- M. Afif, “*Schémas Volumes Finis pour une Equation Non Linéaire de Diffusion-Convection Dégénérée*”, in: M. Madaune-Tort et al., eds, *Actas de las VI Jornadas Zaragoza-Pau de Matemática Aplicada*, (1999) 29-36.
- M. Afif and B. Amaziane, “*Numerical Simulation of Two-Phase Flow through Heterogeneous Porous Media*”, Submitted to : *Numerical Algorithms* (2001).
- M. Afif, “*Numerical Simulation using Finite Volume Schemes for a Non-linear Convection-Diffusion Problem*”, in: “*International Conference on Numerical Algorithms*”, Marrakesh, Morocco (October 2001).
- M. Afif, “*Simulations Numériques pour des Problèmes d’Ecoulements Diphasiques en Milieux Poreux*”, in: “*International Congress Computational Methods for Porous Media*”, Fes Morocco (May 2001).
- M. Afif, B. Amaziane and F. El Dabaghi, “*Mixed Hybrid Finite Element and Finite Volume For Flow in Porous Media*”, in: “*The First International Conference on Salt Water Intrusion and Coastal Aquifers*”, Essaouira Morocco, (April 2001).

# Résumé

Dans ce travail, nous avons développé des méthodes numériques performantes pour des modèles d'écoulements diphasiques incompressibles et immiscibles en milieux poreux hétérogènes et anisotropes, ayant des applications dans des problèmes de la récupération secondaire du pétrole.

Nous avons traité et analysé trois familles de schémas volumes finis (explicite implicite et semi-implicite). Après avoir établi que les schémas sont  $L^\infty$  et  $BV$  stables, sous les conditions  $CFL$  appropriées et satisfont le principe du maximum discret, on obtient des résultats de convergence, vers la solution faible du problème, dans  $L^1$  pour des maillages réguliers en 1-D et 2-D, et dans  $L^2$  pour des maillages non structurés en dimension multiple, ceci en introduisant une technique de maillage adéquate permettant de préserver le principe du maximum discret sur des maillages déstructurés.

Des résultats numériques en 1-D confirment la stabilité des schémas numériques proposés et l'efficacité du schéma semi-implicite en temps de calcul ( $C.P.U.$ ). En dimension deux, les résultats numériques obtenus montrent que la méthode des volumes finis est bien adaptée à la discrétisation de ce problème. Les solutions approchées calculées satisfont le principe du maximum discret et sont monotones. De plus les hétérogénéités anisotropes du milieu poreux sont prises d'une manière efficace. En outre, les schémas volumes finis semi-implicite et implicite donnent un meilleur temps de calcul par rapport au schéma explicite.

# Abstract

In This work, we have developed some efficient numerical methods for an incompressible and immiscible two-phase flow in anisotropic heterogeneous porous media in oil recovery field. The model under consideration is a coupled system which includes a nonlinear degenerate parabolic saturation equation and an elliptic pressure-velocity equation.

We develop and analyze three families of finite volumes schemes (explicit, implicit and semi-implicit) for the saturation equation. First, we establish that these schemes are  $L^\infty$  and  $BV$  stable, under appropriate  $CFL$  conditions, and satisfy the discrete maximum principle, then we prove convergence results. More precisely, we get the convergence of the approximate solution in  $L^1$  for a regular mesh in 1-D et 2-D cases, and in  $L^2$  for unstructured grids in the multidimensional case. An adequate mesh technique was developed in order to obtain the discrete maximum principle on unstructured grids.

Numerical results in 1-D tests confirm the stability of the schemes proposed and show the efficiency of the semi-implicit scheme in  $CPU$  time. A mixed finite element method is used for the approximation of the pressure velocity equation. Numerical simulations for 2-D problems are presented for homogeneous and anisotropic heterogeneous problems. Numerical results show the effectiveness of the methodology developed in this work. It's shown that the semi-implicit and implicit schemes are robust.

## ملخص الرسالة :

### تخطيطات "الأحجام المحدودة" لمجموعة المعادلات من نوع "كحل والانتثار" في الأوساط المسامية

في هذه الرسالة، قمنا بتطوير طرق فعّالة تخص نماذج من التدفق المزدوج الغير قابل للامتزاج والضغط في الأوساط المسامية المتباينة. وتستعمل هذه النماذج على سبيل المثال في محاكاة استخراج النفط أو في دراسة تلوث المياه الجوفية.

لقد استوفينا بالدرس والتحليل ثلاثة أنماط من تخطيطات "الأحجام المحدودة" (تخطيطات صريحة وضمنية وشبه ضمنية). قمنا أولاً بالبرهنة على أن تلك التخطيطات تعطي حلولاً مستقرة في المجالين  $(L^\infty)$  و  $(BV)$ ، باشتراط  $CFL$  (شرط فريديريك ليفي) الملائم. وتخضع هذه التخطيطات لمبدأ الأقصى المنفصل. بعد ذلك حصلنا على نتائج تقارب نحو "الحل الضعيف" للمشكل المطروح، في المجال  $(L^1)$  بالنسبة للشبكة المنتظمة في فضاء أحادي البعد وفي فضاء ثنائي البعد، وفي المجال  $(L^2)$  بالنسبة للشبكات الغير منتظمة في الفضاءات ذات الأبعاد المتعددة. كما قدّمنا تقنية تشبيك مناسبة تجيز الاحتفاظ بالمبدأ الأقصى المنفصل على الشبكات الغير منتظمة.

النتائج العددية في فضاء أحادي البعد، تؤكد استقرار حلول التخطيطات المقترحة ونجاعة التخطيط الشبه ضمني في اختصار وقت  $C.P.U.$  (وحدة الحساب للمعالج). ومن النتائج العددية في فضاء ثنائي البعد، يتضح أن طريقة "الأحجام المحدودة" تلائم تحليل المشكل المطروح. كما أن الحلول المحسوبة تخضع لمبدأ الأقصى المنفصل وهي تراتبية وتأخذ أيضاً بعين الاعتبار عدم تجانس الأوساط المسامية بأسلوب ناجع. وعلاوة على ذلك نرى أن تخطيطات "الأحجام المحدودة" الشبه ضمنية والضمنية تعطي اختصاراً أفضل للوقت من مثيلاتها الصريحة.

# Table des matières

Remerciements . . . . .	iii
Avant propos . . . . .	v
Résumés . . . . .	vii
Nomenclature . . . . .	7
<b>Introduction Générale</b>	<b>11</b>
<b>1 Modélisation mathématique des écoulements diphasiques ...</b>	<b>19</b>
1.1 Introduction . . . . .	19
1.2 Équations fondamentales . . . . .	20
1.2.1 Équation de continuité . . . . .	21
1.2.2 Équations de conservation . . . . .	22
1.2.3 Loi de Darcy généralisée . . . . .	22
1.2.4 Loi de capillarité . . . . .	23
1.2.5 Conditions aux bords et condition initiale . . . . .	24
1.3 Modélisation en pression globale . . . . .	25
1.3.1 Saturation réduite . . . . .	26
1.3.2 Pression globale . . . . .	26
1.4 Formulation du problème . . . . .	30
1.4.1 Formulation réduite . . . . .	30
1.4.2 Formulation mixte . . . . .	32
1.4.3 Cas mono-dimensionnel . . . . .	32
1.4.4 Découplage dans le cas multi-dimensionnel . . . . .	33
1.5 Existence et unicité de solution faible . . . . .	33
1.5.1 Cas mono-dimensionnel . . . . .	33

1.5.2	Cas multi-dimensionnel . . . . .	35
1.6	Conclusion . . . . .	36
<b>I</b>	<b>Schémas volumes finis pour une équation de convection-diffusion dégénérée en milieu poreux</b>	<b>37</b>
<b>2</b>	<b>Convergence de quelques schémas de type V.F. dans le cas 1-D</b>	<b>39</b>
2.1	Introduction . . . . .	39
2.2	Hypothèses sur les données du problème . . . . .	40
2.3	Discrétisation par volumes finis . . . . .	41
2.3.1	Notations . . . . .	41
2.3.2	Définitions . . . . .	43
2.3.3	Schéma explicite . . . . .	44
2.3.4	Schéma implicite . . . . .	46
2.3.5	Schéma semi-implicite . . . . .	47
2.4	Stabilité $L^\infty$ et estimation $BV$ . . . . .	48
2.4.1	Analyse du schéma explicite . . . . .	49
2.4.2	Analyse des schémas implicite et semi-implicite . . . . .	51
2.5	Résultat de convergence . . . . .	58
2.6	Conclusion . . . . .	65
<b>3</b>	<b>Convergence dans le cas 2-D pour un maillage rectangulaire</b>	<b>67</b>
3.1	Introduction . . . . .	67
3.2	Hypothèses sur les données . . . . .	68
3.3	Discrétisation par volumes finis . . . . .	69
3.3.1	Notations . . . . .	69
3.3.2	Définitions . . . . .	71
3.3.3	Schéma explicite . . . . .	73
3.3.4	Schéma implicite . . . . .	75
3.3.5	Schéma semi-implicite . . . . .	76
3.4	Résultats de stabilité . . . . .	77
3.4.1	Stabilité $L^\infty$ . . . . .	78

3.4.2	Estimation $BV$ . . . . .	82
3.5	Résultat de convergence . . . . .	86
3.6	Conclusion . . . . .	95
<b>4</b>	<b>Convergence pour des maillages non-structurés dans <math>\mathbb{R}^d</math></b>	<b>97</b>
4.1	Introduction . . . . .	97
4.2	Hypothèses sur les données . . . . .	98
4.3	Discrétisation par volumes finis . . . . .	99
4.3.1	Notations . . . . .	99
4.3.2	Définition . . . . .	101
4.3.3	Schéma explicite . . . . .	103
4.3.4	Schéma implicite . . . . .	106
4.3.5	Schéma semi-implicite . . . . .	107
4.3.6	Propriétés et remarque . . . . .	108
4.4	Résultats de stabilité $L^\infty$ . . . . .	111
4.4.1	Définition et propriété . . . . .	112
4.4.2	Stabilité du schéma explicite . . . . .	113
4.4.3	Stabilité des schémas implicite et semi-implicite . . . . .	114
4.5	Estimations $BV$ faibles . . . . .	120
4.5.1	Analyse du schéma explicite . . . . .	122
4.5.2	Analyse du schéma implicite . . . . .	125
4.5.3	Analyse du schéma semi-implicite . . . . .	127
4.6	Résultats de convergence . . . . .	131
4.7	Conclusion . . . . .	137
<b>II</b>	<b>Simulations numériques des écoulements diphasiques en milieu poreux</b>	<b>139</b>
<b>5</b>	<b>Simulations numériques dans le cas mono-dimensionnel</b>	<b>141</b>
5.1	Introduction . . . . .	141
5.2	Données du problème . . . . .	142
5.3	Simulations numériques . . . . .	143

5.3.1	Profil de la saturation en fonction de la CFL . . . . .	144
5.3.2	Approximation autour du front raide . . . . .	144
5.3.3	Comparaisons du temps CPU et de l'erreur $l^1$ . . . . .	149
5.4	Conclusion . . . . .	150
<b>6</b>	<b>Simulations numériques dans le cas bi-dimensionnel</b>	<b>151</b>
6.1	Introduction . . . . .	151
6.2	Données du problème . . . . .	152
6.3	Maillage rectangulaire . . . . .	153
6.4	Maillage non structuré . . . . .	156
6.4.1	Test 1: domaine homogène et isotrope . . . . .	156
6.4.2	Test 2: chenal hétérogène et anisotrope . . . . .	160
6.4.3	Test 3: milieu stratifié et anisotrope . . . . .	163
6.4.4	Test 4: milieu hétérogène et anisotrope . . . . .	166
6.5	Conclusion . . . . .	169
	<b>Conclusion Générale</b>	<b>173</b>
	<b>A Rappels sur les éléments finis mixtes hybrides</b>	<b>175</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>181</b>
	<b>Liste des tableaux</b>	<b>191</b>
	<b>Liste des figures</b>	<b>193</b>
	<b>Index</b>	<b>195</b>

# Partie



# Nomenclature

- $\Omega$  : domaine de  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 1, 2$  ou  $3$ ), figurant un milieu poreux.
- $\Gamma = \partial\Omega = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2 \cup \bar{\Gamma}_3$  : frontière du domaine  $\Omega$ .
- $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  : frontières d'injection, imperméable et de production.
- $\vec{n}$  : normale unitaire à une frontière, orientée vers l'extérieur.
- $x = x, (x, y), (x, y, z)$  : variable d'espace dans  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ .
- $t, \tau$  : variable temporaire et temps final, en ( $s$ ).
- $h$  : pas du maillage dans  $\Omega$ , en ( $m$ ).
- $\Delta t$  : pas de discrétisation en temps dans  $[0, \tau[$ , en ( $s$ ).
- $\phi = \phi(x)$  : porosité du milieu poreux en (%).
- $K = K(x)$  : tenseur des perméabilités absolues en (*Darcy*).
- $i = w, o$  : fluide mouillant ( $w =$  l'eau) et non mouillant ( $o =$  l'huile).
- $S_i = S_i(x, t)$  : saturation du fluide  $i = w, o$ , en (%).
- $p_i = p_i(x, t)$  : pression du fluide  $i, i = w, o$ , en ( $Pa$ ).
- $\vec{q}_i = \vec{q}_i(x, t)$  : vitesse de filtration du fluide  $i, i = w, o$ , en ( $m.s^{-1}$ ).
- $u = u(x, t)$  : saturation réduite de l'un des constituants, en (%).
- $\vec{q} = \vec{q}(x, t)$  : vitesse de filtration totale, en ( $m.s^{-1}$ ).
- $P = P(x, t)$  : pression globale en ( $Pa$ ).

**Les constantes**

- $\rho_i$  : masse volumique du fluide  $i$ ,  $i = w, o$ , en  $(g.m^{-3})$ .
- $\mu_i$  : viscosité du fluide  $i$ ,  $i = w, o$ , en  $(Pa.s)$ .
- $P_{CM}$  : pression capillaire maximale en valeur absolue, en  $(Pa)$ .
- $P_{atm}$  : pression atmosphérique, en  $(Pa)$ .
- $\vec{g}$  : accélération de la pesanteur, en  $(m.s^{-2})$ .
- $C$  : constante indépendante de  $h$  et  $\Delta t$ .

**Les fonctions de la saturation**

- $k_{ri} = k_{ri}(u)$  : perméabilité relative du fluide  $i$ ,  $i = w, o$ .
- $k_i = k_i(u)$  : mobilité du fluide  $i$ ,  $i = w, o$ .
- $p_c = p_c(u)$  : pression capillaire réduite, fonction non linéaire de  $u$ .
- $a = a(u)$  : diffusion capillaire, fonction non linéaire de  $u$ .
- $b = b(u)$  : fraction du flux, fonction non linéaire de  $u$ .
- $d = d(u)$  : mobilité totale, fonction non linéaire de  $u$ .

**Les opérateurs**

- $(f)^+, (f)^-$  :  $\max(f, 0), \max(-f, 0)$ .
- $f^+, f_-$  :  $\sup f(x), \inf f(x)$ .
- $|f|$  :  $\max(f, -f)$ , valeur absolue de  $f$ .
- $\mathcal{L}^d$  : mesure de Lebesgue dans  $\mathbb{R}^d$ .
- $|\omega|$  : mesure de Lebesgue pour  $\omega \subset \subset \mathbb{R}^s, 1 \leq s \leq d$ .
- $\bar{\omega}$  : fermeture de l'ouvert  $\omega \subset \subset \mathbb{R}^s, 1 \leq s \leq d$ .

- $|\xi|$  : norme euclidienne pour  $\xi \in \mathbb{R}^d$ .
- $\delta(p, q)$  : distance euclidienne entre les points  $p$  et  $q$  dans  $\mathbb{R}^d$ .
- $\cdot$  : produit scalaire entre deux vecteurs de  $\mathbb{R}^d$ .
- $\wedge$  : produit vectoriel entre deux vecteurs de  $\mathbb{R}^d$ .
- $\det[M]$  : déterminant de  $M$  matrice carré  $d \times d$ .
- $M^t$  : transposée de la matrice  $M$ .
- $I_d$  : matrice identité dans  $\mathbb{R}^d$ .
- $\mathbf{adj}[M]$  : matrice carré  $d \times d$ , telle que :  $\mathbf{adj}[M]^t M = \det[M] \cdot I_d$ .

### Les espaces fonctionnels

- $L^p(\Omega) := \{f; \mathcal{L}^d\text{-mesurable sur } \Omega; \text{ tel que } \int_{\Omega} |f|^p dx < \infty\}, 1 \leq p < \infty$ .
- $L^\infty(\Omega) := \{f; \mathcal{L}^d\text{-mesurable sur } \Omega; \text{ tel que } |f| < C < \infty \mathcal{L}^d\text{-p.p. sur } \Omega\}$ .
- $L^p_{loc}(\Omega) := \{f : \Omega \mapsto \mathbb{R}; f \in L^p(\omega) \text{ pour tout compact } \bar{\omega} \subset \Omega\}$ .
- $W^{m,p}(\Omega) := \left\{ w \in L^p(\Omega); D^\delta w \in L^p(\Omega); \text{ pour } |\delta| := \sum_{i=1}^d \delta_i \leq m \right\}$ .
- $H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega)$ , espace de Sobolev d'ordre  $m$ .
- $\mathcal{C}^m(\Omega) := \left\{ f : \Omega \mapsto \mathbb{R} \text{ tel que } D^\delta f \text{ est continue sur } \Omega, |\delta| := \sum_{i=1}^d \delta_i \leq m \right\}$ .
- $\mathcal{C}_0^m(\Omega)$  : espace des fonctions de  $\mathcal{C}^m(\Omega)$  à support compact dans  $\Omega$ .
- $\mathcal{M}(\Omega)$  : espace des mesures de Radon sommables sur  $\Omega$ .
- $\overline{BV}(\Omega) := \left\{ f \in L^1_{loc}(\Omega) \text{ tel que } \frac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathcal{M}(\Omega) \text{ pour } i = 1, \dots, d \right\}$ .
- $\mathcal{B}(I \times J) := L^1(J; \overline{BV}(I)) \times L^1(I; \overline{BV}(J))$ , pour  $I$  et  $J$  ouvert de  $\mathbb{R}$ .
- $H(\text{div}; \Omega) := \left\{ \vec{q} \in (L^2(\Omega))^d; \text{div}(\vec{q}) \in L^2(\Omega) \right\}$ .
- $W(\Omega) := \{w \in H^1(\Omega); w = 0 \text{ sur } \Gamma_3\}$ .

- $W_0(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega); \alpha(u) \in W; \alpha(u) = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}$ , pour  $\alpha \in \mathcal{C}^1([0, 1])$ .
- $W(0, \tau) := \left\{ u; \alpha(u) \in L^2(0, \tau; W); \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, \tau; W') \right\}$ .
- $V(\Omega) := \{v \in \mathcal{C}^1(0, \tau; \mathcal{C}^2(\bar{\Omega}))\}; v(., \tau) \equiv 0 \text{ et } v = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_3\}$ .
- $\mathcal{P}_k$  : ensemble des polynômes de degré  $\leq k$ , sur  $\mathbb{R}^d$ .

# Introduction Générale

L'étude des écoulements multiphasiques en milieu poreux est d'une grande importance, dans l'industrie pétrolière lors de l'exploitation d'un gisement de pétrole ou de gaz, dans la gestion des ressources en eau et aussi pour beaucoup de problèmes d'environnement. Les milieux poreux naturels sont hétérogènes, à plusieurs échelles, ce qui rend l'étude expérimentale difficile et coûteuse, d'où l'intérêt d'utiliser des méthodes de simulation numérique pour des modèles d'écoulement de fluide. Ces simulations sont généralement basées sur la modélisation mathématique du gisement en exploitation par un système d'équation aux dérivées partielles non linéaires. Dans ce cadre, nous nous proposons de développer des méthodes numériques performantes pour un modèle d'écoulements diphasiques incompressibles en milieux poreux hétérogènes.

L'étude théorique des écoulements multiphasiques en milieux poreux a été largement étudié dans la littérature (voir p.e. **Chavent** [CHJ86] et **Antontsev & al.** [AKM90] et leur bibliographie). Dans ce travail, on considère un modèle qui utilise la notion de pression globale introduit séparément en 1976 par **Chavent** [CHA76] et en 1978 par **Antontsev & Monakhov** [ANM78]. Un premier théorème d'existence de solution, pour le système qui décrit l'écoulement de deux phases fluides incompressibles et immiscibles a été établi par **Chavent & Jaffré** [CHJ86], depuis, de nombreux travaux ont été effectués dans ce domaine, voir : pour l'étude théorique d'existence et unicité de la solution, **Gagneux & Madaune-Tort** [GAM96] et sa bibliographie; pour les schémas numériques du problème de convection-diffusion, **Morton** [MOR96] et sa bibliographie; pour les schémas de type volumes finis, **Eymard, Gallouët & Herbin** [EGH00] et sa bibliographie.

Dans ce travail, nous étudions la convergence des schémas numériques de type volumes finis pour des problèmes issus de la modélisation des écoulements diphasiques en milieu poreux. Nous nous intéressons à un modèle d'écoulements diphasiques incompressibles et immiscibles, qui correspond physiquement à l'injection de l'eau dans un réservoir de pétrole. Nous considérons l'écoulement diphasique de l'eau et du pétrole en milieu poreux, en utilisant la formulation en pression globale de **Chavent & Jaffré** [CHJ86], la vitesse totale et la saturation de l'eau sont les inconnues du problème. Cette formulation mène à un système couplé d'équations aux dérivées partielles composé d'une équation de saturation parabolique non linéaire dégénérée et d'une équation de pression elliptique [CHJ86, GAM96]. Ces équations décrivent l'écoulement de deux phases liquides incompressibles et immiscibles dans un milieu poreux, pour lequel, dans un souci de simplicité, on néglige l'effet de la pesanteur. Le système est alors :

### Équation en saturation réduite

$$(P_d) \begin{cases} 0 \leq u(x, t) \leq 1 & \text{dans } Q_\tau \\ \Phi(x) \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(b(u)\vec{q}) - \operatorname{div}(K(x)\nabla\alpha(u)) = 0 & \text{dans } Q_\tau \\ u|_{\Gamma_1} = 1 ; K\nabla\alpha(u) \cdot \vec{n}|_{\Gamma_2} = 0 \text{ et } u|_{\Gamma_3} = 0 & \text{sur } [0, \tau[ \\ u(x, 0) = u^0(x) & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (1)$$

### Équation en pression globale

$$(E_d) \begin{cases} \vec{q} = -d(u)K(x)\nabla P; \operatorname{div}(\vec{q}) = 0 & \text{dans } Q_\tau \\ \vec{q} \cdot \vec{n}|_{\Gamma_1} = -q_d; \vec{q} \cdot \vec{n}|_{\Gamma_2} = 0; P|_{\Gamma_3} = P_0 & \text{sur } [0, \tau[ \end{cases} \quad (2)$$

où  $u(x, t)$  est la saturation réduite de l'eau et  $P$  la pression globale sont les inconnues du problème,  $\vec{q}$  la vitesse de filtration totale,  $\Phi(x)$  la porosité du milieu poreux et  $K(x)$  le tenseur des perméabilités absolues du réservoir  $\Omega$ . La frontière  $\Gamma = \partial\Omega$ , supposée régulière par morceaux, est divisée en trois régions  $\Gamma = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2 \cup \bar{\Gamma}_3$  avec  $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$  pour  $i \neq j$ ; où  $\Gamma_1$  est la partie du bord où l'eau est injectée,  $\Gamma_2$  la partie imperméable et  $\Gamma_3$  la partie de production. On note  $Q_\tau := \Omega \times [0, \tau[$  où  $[0, \tau[$  l'intervalle de temps d'étude.  $\alpha(u)$ ,  $b(u)$  et  $d(u)$  sont des fonctions non linéaires qui dépendent des mobilités et de la pression capillaire. Le coefficient de diffusion  $a := \alpha'$  s'annule pour deux valeurs de la

---

saturation,  $a(0) = a(1) = 0$  (dégénérescence du terme de diffusion). Pour plus de détails sur le modèle on peut consulter les références [ CHJ86, GAM96].

La simulation des écoulements dans des réservoirs de pétrole et des eaux souterraines a été largement étudiée par plusieurs méthodes numériques.

On peut citer pour les méthodes des différences finis, **Young** [ YOU84] qui présente des simulations numériques 1-D et 2-D, en utilisant différents schémas de type différences finies. Dans **Douglas & al.** [ DWK84], on trouve des résultats numériques en 1-D, pour des schémas de type différences finies combinés avec des schémas éléments finis, pour des pas adaptatifs, où un terme de diffusion artificielle est ajouté pour assurer la monotonie de la solution numérique. Un résultat d'estimation à posteriori d'erreur, pour un schéma différences finies implicite, pour une équation de diffusion non linéaire, est présentée par **Dawson & al.** [ DWW98]. Plus récemment, on trouve dans les travaux de **Karlsen & al.** [ EVK99, EVK00, KAR01], une étude de la convergence de schémas monotones, vers la solution entropique du problème, en utilisant les solutions mesures.

Pour les méthodes des éléments finis, **Chavent & Jaffré** [ CHJ86], présente des méthodes d'éléments finis mixtes avec la modélisation et l'étude théorique pour les problèmes en milieux poreux. En outre, une discrétisation utilisant la méthode des éléments finis mixte hybrid et volumes finis pour les écoulements diphasiques en milieu poreux est présentée par **Chavent & al.** [ CJR95]. Dans **Arbogast & al.** [ AWZ96], une méthode des éléments finis mixte est utilisée pour avoir un résultat d'estimation d'erreur. Dans **Chen & Ewing** [ CHE97], on trouve une analyse d'une méthode d'éléments finis couplée à une méthode d'éléments finis mixte, pour un problème en hydrogéologie. Des résultats numériques, pour une nouvelle méthode des caractéristiques combinée à une méthode d'éléments finis mixte hybride, sont présentés par **Douglas & al.** [ DFP97]. Une analyse à posteriori de l'erreur, pour une méthode des caractéristiques-éléments finis, est présentée par **Ghabbouhy & Mghazli** [ GAB00, GAM00], ainsi qu'une technique auto-adaptative de raffinement du maillage.

Les méthodes volumes finis, qui sont relativement plus récentes, sont en

général utilisées dans les lois de conservation pour l'approximation des flux de convections. Elles permettent d'avoir une conservation locale des flux élément par élément avec une stabilité numérique et une diffusion numérique minimale. Pour l'analyse de ces méthodes on se réfère à [ EGH00, FRO98, KRO97, MIC96, MOR98] et leurs bibliographies. Ces méthodes ont été développées et analysées pour les écoulements diphasiques immiscibles en milieu poreux dans le cas où le terme de diffusion est négligé. Dans ce cas, le problème devient purement hyperbolique. On trouve dans **Gallouët & Vila** [ GAV91] un schéma volumes finis, sur un maillage uniforme en 1-D et 2-D, utilisé pour le couplage d'une équation elliptique et d'une équation hyperbolique. **Champier & al.** [ CGH93] ont étudié la convergence d'un schéma de type volumes finis sur un maillage triangulaire, pour une équation hyperbolique. Dans **Verdière & Vignal** [ VEV98, VIG96], un schéma volumes finis, sur un maillage dual centré sur les arêtes, est utilisé pour le couplage d'une équation elliptique et une équation hyperbolique. **Eymard & al.** [ EGH98] présentent une estimation d'erreur pour une large variété de schémas volumes finis explicite, une extension au schéma implicite est présentée par **Ghilani** [ GHI98]. Un autre résultat de convergence des schémas volumes finis, pour une équation de diffusion non linéaire, est présenté par **Eymard & al.** [ EGN98].

Dans le cas stationnaire où le terme de diffusion est linéaire, on trouve dans **Lazarov & al.** [ LMV94, LMV96], un schéma volumes finis, sur un maillage rectangulaire en 2-D avec raffinement local, avec des résultats d'estimation d'erreur et un résultat de régularité de la solution. **Herbin** [ HER95] donne des résultats d'estimation d'erreur, pour un schéma volumes finis à 4-points, sur un maillage triangulaire, des résultats numériques pour le couplage avec une équation hyperbolique sont présentés par **Herbin & Labergerie** [ HEL97], une généralisation pour un maillage de quadrangles, est analysé dans **Courdière & al.** [ CVV99]. Dans **Eymard & al.** [ EGH95], est étudié la convergence des schémas volumes finis en utilisant des résultats de compacité, une généralisation pour des conditions au bord générales et une diffusion anisotrope, est étudiée par **Gallouët & al.** [ GHV00].

Ou encore récemment, le cas où le coefficient de diffusion est isotrope, voir

---

**Ohlberger** [OHL97, OHL01], qui présente des résultats d'estimation à posteriori d'erreur, pour un schéma volumes finis adaptatif centré sur les sommets d'une triangulation.

Dans les travaux cités précédemment le terme de diffusion est soit négligé où bien il est traité par des techniques d'éléments finis mixtes qui ne donnent pas entière satisfaction. Bien que l'équation de saturation est à convection dominante; le terme de diffusion est petit, mais important et ne peut être négligé, voir **Bear & Bachmat** [BEB91] et **Marl** [MAR81], ainsi des soins spéciaux devraient être pris dans la discrétisation. En outre, les structures géologiques irrégulières, suggèrent l'utilisation de maillages non structurés, voir **Hontans** [HON00]. Les difficultés principales liées à la convergence de la solution approchée de tels systèmes sont le couplage entre l'équation de pression et l'équation de saturation, en plus de la dégénérescence de l'équation de saturation et l'hétérogénéité anisotrope du réservoir. En raison de ces difficultés, notre but est de construire des schémas volumes finis (SVF) pour l'équation de saturation qui satisfont le principe du maximum discret et permettent d'établir des résultats de convergence. Nous considérons une approximation numérique de ce système où les équations de saturation et de pression se découplent numériquement. Nous nous concentrons sur l'étude de la convergence du (SVF) pour l'équation de saturation en tenant compte de la non linéarité du terme de diffusion et de l'hétérogénéité anisotrope du réservoir. Une méthode d'éléments finis mixte duale hybride est employée pour obtenir une approximation précise de la vitesse totale, voir **Brezzi & Fortin** [BRF91] et **Bendali & al.** [BRT96].

Le travail que nous présentons est organisé, en une partie préliminaire, deux parties principales et une partie annexe.

Dans le **chapitre 1**, qui est une **partie préliminaire**, on rappelle les équations du modèle mathématique utilisé, d'abord on rappelle les lois fondamentales régissant les écoulements diphasiques en milieux poreux, ensuite nous présentons le problème sous la formulation en pression globale [CHJ86, AKM90] et on termine par un rappel de quelques résultats d'existence et d'unicité de la solution

faible du problème selon les travaux [ CHJ86, GAM96, HID93].

La **première partie** est constituée des chapitres 2, 3 et 4; elle est consacrée à l'étude de la convergence des schémas numériques de type volumes finis. Dans le **chapitre 2**, on présente des schémas de type volumes finis pour l'équation non linéaire mono-dimensionnelle de convection-diffusion dégénérée (1). Nous analysons trois types de schémas, conservatifs et consistants au sens des volumes finis, l'un totalement explicite, le deuxième totalement implicite, puis un nouveau schéma semi-implicite où l'on choisit une approximation explicite pour le terme de convection et implicite pour le terme de diffusion. Pour ces trois méthodes le terme de convection est approché par un schéma de Godunov décentré amont et le terme de diffusion par une approximation centrée d'ordre 1. On montre que ces schémas sont  $L^\infty$  et  $BV$  stables, sous des conditions CFL appropriées et satisfont le principe du maximum discret, après avoir établi l'existence et l'unicité de solution pour les systèmes non linéaires résultants des schémas implicite et semi-implicite. On montre ensuite la  $L^1$ -continuité en temps des solutions approchées, et par compacité on a la convergence dans  $L^1(Q_\tau)$  des solutions numériques vers l'unique solution faible du problème. Dans le **chapitre 3**, nous étendons les résultats du chapitre 2 à un maillage rectangulaire dans  $\mathbb{R}^2$ , pour l'équation non linéaire bi-dimensionnelle de convection-diffusion dégénérée (1), nous sommes amenés à faire des hypothèses supplémentaires sur les données pour avoir une convergence forte dans  $L^1(Q_\tau)$ . Nous avons traité et analysé les schémas de type volumes finis explicite, implicite et semi-implicite. Nous montrons la convergence, après avoir établi que ces schémas sont  $L^\infty$  et  $BV$  stables, sous les conditions CFL appropriées et satisfont le principe du maximum discret. La méthodologie et l'analyse développées peuvent être étendues aux problèmes dans  $\mathbb{R}^3$ , pour un maillage formé de parallélépipèdes. Le **chapitre 4** traite le problème multi-dimensionnel ( $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ ) pour des maillages non structurés, on choisit une approximation de type volumes finis, sur un maillage dual centré sur les nœuds d'une triangulation, pour laquelle nous introduisons une nouvelle technique de maillage, permettant de préserver le principe du maximum discret pour des hétérogénéités anisotropes du réservoir. Comme précédemment, on anal-

---

yse trois schémas de type volumes finis explicite, implicite et semi-implicite, où le terme de convection est approché par un schéma de Godunov décentré amont et le terme de diffusion par une approximation d'ordre 1, dont l'approximation du gradient est de type  $\mathcal{P}_1$  sur chaque triangle et qui conduit à des schémas de type volumes finis à  $(d + 1)$  points non symétrique dans le cas du schéma implicite. On obtient ainsi des résultats de stabilité  $L^\infty$  et une estimation  $BV$  faible, et par suite un résultat de convergence dans  $L^2(Q_\tau)$  de la solution approchée vers la solution faible du problème. Ces résultats sont obtenus sous les mêmes hypothèses que celles qui garantissent l'existence et l'unicité de la solution.

Dans la **deuxième partie**, constituée des chapitres 5 et 6, nous présentons les simulations numériques d'écoulements diphasiques en milieux poreux, correspondant aux schémas numériques introduits dans la première partie. Dans le **chapitre 5**, après avoir introduit les données physiques du problème monodimensionnel (1), on donne des simulations numériques pour les trois schémas traités au chapitre 2, une comparaison entre ces schémas et d'un schéma explicite où le terme de diffusion est approché par une méthode d'éléments finis mixte [CHJ86, CHS82, DAW93], montre l'efficacité du schéma semi-implicite par rapport aux autres. Dans un premier temps, on donne des simulations pour illustrer la stabilité des schémas par rapport à la condition CFL. Dans un deuxième temps, on donne une comparaison entre les différents schémas au voisinage du front de la saturation, puis on termine par un tableau de comparaison entre l'erreur relative  $L^1$  et un tableau des temps (CPU).

Dans le **chapitre 6**, on présente des simulations numériques pour les schémas traités au chapitre 3 pour des maillages rectangulaires et au chapitre 4 pour des maillages non structurés en 2-D. La résolution des systèmes non linéaires résultants des schémas implicite et semi-implicite, se fait par un procédé de prédiction-correction, plus une méthode du Double Gradient Conjugué préconditionné dans le cas de système non symétrique. Dans un premier temps, on compare les schémas numériques pour le cas d'un réservoir homogène isotrope, en mettant en évidence l'efficacité des schémas implicite et semi-implicite en temps de calcul (CPU) par rapport au schéma explicite. Dans un deuxième temps, on

donne des simulations numériques obtenues dans le cas de réservoirs hétérogènes et anisotropes. L'équation elliptique (2) est traitée numériquement par une méthode d'éléments finis mixte duale hybride qui sera détaillée dans l'annexe A. Le code numérique réalisé prend en compte les hétérogénéités anisotropiques du milieu et le couplage numérique entre la méthode d'éléments finis mixte hybride pour l'équation elliptique en pression et les méthodes volumes finis pour l'équation parabolique en saturation.

Ce travail se termine par une conclusion générale et des perspectives.

# Chapitre 1

## Modélisation mathématique des écoulements diphasiques en milieu poreux

### 1.1 Introduction

Ce chapitre a pour but de présenter les équations d'un modèle d'écoulement diphasique eau-huile en milieu poreux, tout en considérant la pression capillaire entre les deux fluides. Nous nous intéressons aux équations régissant l'écoulement d'un fluide composé de deux constituants immiscibles et incompressibles, l'exemple type est le balayage de l'huile par l'eau lors de l'exploitation secondaire des gisements pétroliers.

La mise en équations des écoulements diphasiques en milieu poreux dépend de la description de ces écoulements : à l'échelle microscopique ou à l'échelle macroscopique. Etant donné les dimensions du milieu poreux étudié, nous nous limitons ici à sa description macroscopique, dont les paramètres physiques, s'obtiennent par une théorie d'homogénéisation, basée sur une analyse au niveau microscopique, voir **Hornung** [HOR97] et sa bibliographie.

Dans un premier paragraphe, on présentera les lois générales de l'écoulement diphasique de fluides immiscibles et incompressibles en milieu poreux, après avoir introduit les différents paramètres et variables contenus dans ces lois. Les deux

autres paragraphes consistent à reformuler les équations générales obtenues, en vue de résoudre le problème d'écoulement avec une seule pression dite pression globale et une seule saturation, comme inconnues principales, d'après les travaux [ AKM90, CHA76, CHJ86]. Dans le dernier paragraphe, on présente un résultat d'existence et d'unicité de solution faible, voir [ CHJ86, GAM96, HID93].

## 1.2 Équations fondamentales

Le milieu poreux est représenté par un ouvert borné  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 2, 3$ ), figurant le réservoir de gisement (voir Figure 1.1), de frontière  $\Gamma$  régulière par morceaux, formée de trois parties, telle que  $\Gamma = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2 \cup \bar{\Gamma}_3$ , avec  $|\Gamma_i| > 0$  et  $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$  pour  $i \neq j$ ; où  $\Gamma_1$  est la partie du bord où l'eau est injectée,  $\Gamma_2$  la partie imperméable et  $\Gamma_3$  la partie de production, et soit  $[0, \tau[$  l'intervalle du temps d'étude, on note  $Q_\tau := \Omega \times [0, \tau[$ .

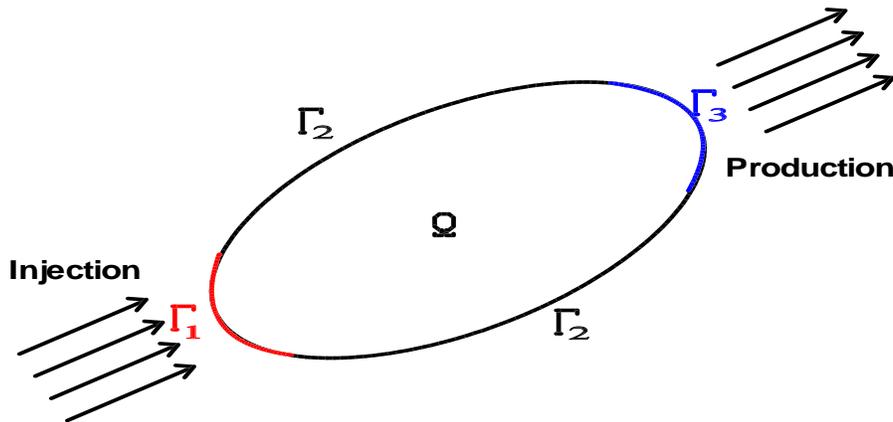


Fig. 1.1: Réservoir  $\Omega$

Avant d'introduire les lois physiques modélisant les écoulements diphasiques en milieu poreux, on fera les hypothèses suivantes :

1. Le milieu poreux est saturé par les deux fluides en écoulement artificiel.
2. La loi de Darcy s'applique séparément pour chaque fluide.

3. La pression capillaire et les perméabilités relatives sont des fonctions uniquement de la saturation, ce qui est le cas où le réservoir  $\Omega$  est constitué d'un seul type de roche.
4. Les déformations volumiques de l'aquifère et des particules sont négligeables, c.à.d. la porosité et les perméabilités absolues ne dépendent que de la variable d'espace  $x$ .
5. On ne s'intéresse qu'à l'écoulement avant le **temps de percée** c.à.d. le premier instant où le fluide mouillant parvient à la frontière de production, voir **Gagneux** [GAN84].

Pour plus de détails voir [AKM90, CHJ86, GAM96, MAR81] et leurs bibliographies.

Avec ces hypothèses, les équations modélisant les écoulements diphasiques de fluides immiscibles et incompressibles dans un milieu poreux  $\Omega$  s'écrivent :

### 1.2.1 Équation de continuité

Cette équation exprime que les pores du milieu poreux sont entièrement occupés par les deux fluides, on dira qu'on est en **régime saturé** :

$$S_w + S_o = 1 \quad \text{dans } Q_\tau \quad (1.1)$$

où  $S_i$  est la **saturation** du fluide  $i$  (c.à.d. le rapport du volume de pores occupé par ce fluide au volume de pores total).

On notera aussi que les saturations vérifient en plus :

$$S_w \geq S_{w,m} \quad \text{et} \quad S_o \geq S_{o,m} \quad (1.2)$$

où  $S_{i,m}$  est la **saturation résiduelle** du fluide  $i$  (c.à.d. la saturation pour laquelle la phase déplacée s'arrête de s'écouler). On note  $S_{w,M} := 1 - S_{o,m}$ , alors de (1.1) on a :

$$S_{w,m} \leq S_w \leq S_{w,M} \quad \text{dans } Q_\tau \quad (1.3)$$

avec  $S_{w,m} < S_{w,M}$ , (soit :  $S_{w,m} + S_{o,m} < 1$ ).

### 1.2.2 Équations de conservation

Ici on exprime la conservation de la masse pour chaque fluide  $i = w, o$

$$\phi(x) \frac{\partial S_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{q}_i) = 0 \quad \text{dans } Q_\tau \quad (1.4)$$

en l'absence de termes sources et en supposant les sections d'écoulement uniformes, où  $\vec{q}_i$  est la **vitesse de filtration** de la phase  $i$ ,  $\phi$  la **porosité** du milieu (c.à.d. le volume des vides d'un milieu poreux sur son volume totale), le milieu est supposé incompressible (c.à.d. la porosité  $\phi$  ne dépend que de la variable d'espace  $x$ ).

### 1.2.3 Loi de Darcy généralisée

La **loi de Darcy** généralisée aux écoulements polyphasiques s'exprime par : pour chaque fluide  $i = w, o$

$$\vec{q}_i = -k_i K(x) (\nabla p_i - \rho_i \vec{g}) \quad \text{dans } Q_\tau \quad (1.5)$$

où  $K(x)$  est le tenseur des **perméabilités absolues** du réservoir  $\Omega$ ,  $p_i$  est la **pression** de la phase  $i$ ,  $k_i$  la **mobilité** de la même phase  $i$ , traduisant les effets d'obstacle à l'écoulement d'un fluide par rapport à l'autre,  $\rho_i$  la masse volumique du fluide  $i$ , et  $\vec{g}$  l'accélération de la pesanteur. La **mobilité** se décompose sous la forme suivante :

$$k_i = \frac{k_{r,i}}{\mu_i} \quad (1.6)$$

où les **perméabilités relatives**  $k_{r,i}$ , représentent l'influence de la présence d'un fluide sur l'écoulement de l'autre,  $k_{r,i}$  est une fonction croissante de la saturation  $S_i$  à valeurs comprises entre 0 et 1, voir Figure 1.2.

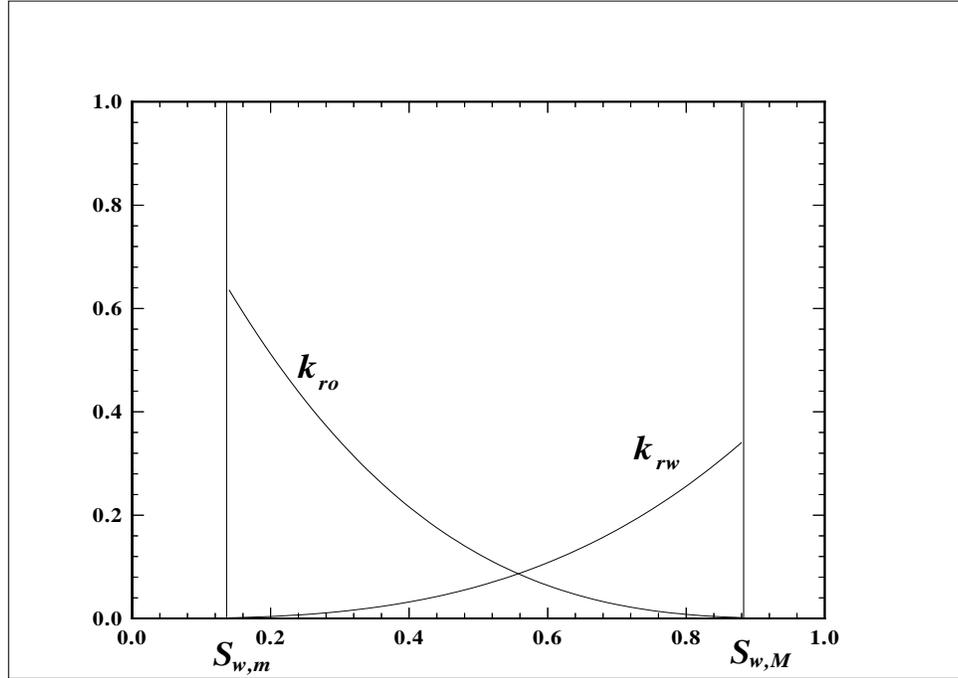


Fig. 1.2: Perméabilités relatives  $k_{r,i}$  en fonction de la saturation  $S_w$

### 1.2.4 Loi de capillarité

Entre deux fluides non miscibles, il existe une interface qui engendre une différence de pression entre eux, cette différence de pression est appelée **pression capillaire**, qui est une fonction de la saturation, par la relation :

$$P_C := p_w - p_o = p_c(S_w) P_{CM} \quad \text{dans } Q_\tau \quad (1.7)$$

où  $P_{CM} := \sup |P_C|$  **pression capillaire maximale**, et  $p_c = \frac{P_C}{P_{CM}}$  **pression capillaire réduite** sans dimension, fonction de la saturation, telle que

$$P_{CM} > 0 \quad \text{et} \quad -1 \leq p_c(S_w) \leq 0$$

avec  $p_c(S_{w,M}) = 0$ , voir Figure 1.3.

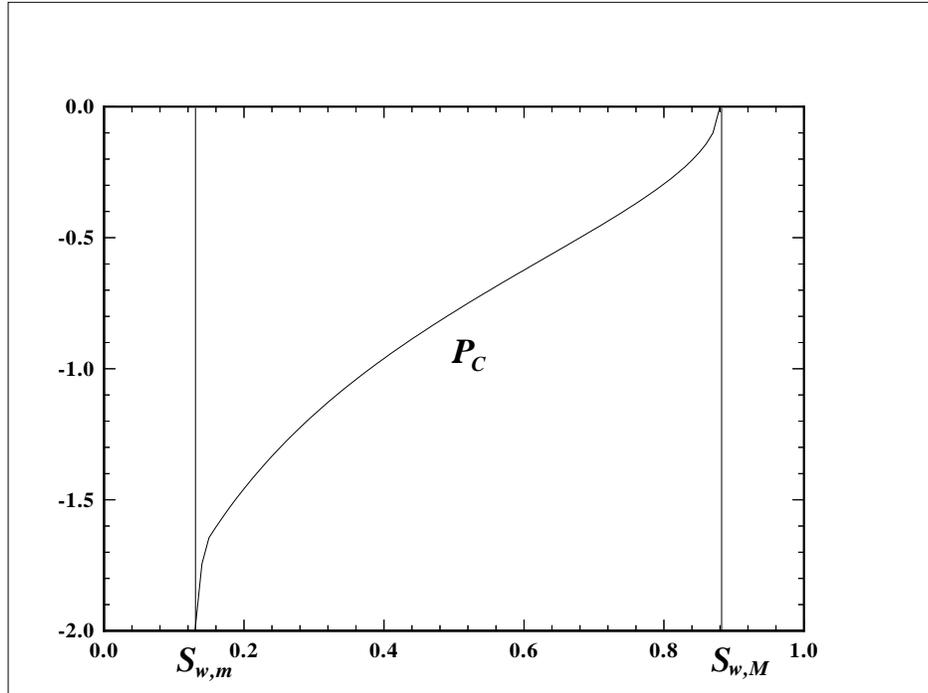


Fig. 1.3: Pression capillaire  $P_C$  en fonction de la saturation  $S_w$

Il existe dans la littérature plusieurs modèles pour les lois de perméabilités relatives et de la pression capillaire. Par exemple des modèles paramétriques pour ces différentes lois peuvent être calibrés à partir d'un minimum de données expérimentales. Les fonctions résultantes ont des expressions simples et faciles à employer pour les modèles numériques, voir **Marle** [MAR72].

### 1.2.5 Conditions aux bords et condition initiale

Sur la frontière  $\Gamma$  on considère les conditions aux limites suivantes :

#### Conditions sur $\Gamma_1$ (injection)

Aux puits d'injection, on suppose que le **fluide mouillant** ( $w$  : l'eau), est injecté avec une saturation maximale  $S_{w,M}$  à débit constant  $q_d$ , soit :

$$S_w = S_{w,M} \quad \text{et} \quad \vec{q}_w \cdot \vec{n} = -q_d \quad \text{sur } \Gamma_1 \quad (1.8)$$

où  $\vec{n}$  est la normale unitaire à  $\Gamma$ .

**Conditions sur  $\Gamma_2$  (imperméable)**

Aux frontières imperméables, on suppose que les écoulements latéraux sont nuls, soit :

$$\vec{q}_w \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{q}_o \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_2 \quad (1.9)$$

**Conditions sur  $\Gamma_3$  (production)**

Aux puits de production, on suppose que le **fluide non mouillant** ( $o$  : l'huile), est produit avec une saturation maximale  $1 - S_{w,m}$  (avant le **temps de percée**) et à pression constante (en général la **pression atmosphérique**  $P_{atm}$ ), soit :

$$S_w = S_{w,m} \quad , \quad \vec{q}_o \cdot \vec{n} > 0 \quad \text{et} \quad p_o = P_{atm} \quad \text{sur } \Gamma_3 \quad (1.10)$$

Pour d'autres choix de conditions aux bords, voir [ CHJ86, GAM96].

**Condition initiale**

On suppose que saturation  $S_w^0$  en eau du réservoir à l'instant  $t = 0$  est connue :

$$S_w = S_w^0 \quad \text{dans } \Omega \quad \text{à} \quad t = 0 \quad (1.11)$$

De plus  $S_w^0$  doit vérifier la double inégalité (1.3), soit :

$$S_{w,m} \leq S_w^0 \leq S_{w,M} \quad \text{dans } \Omega \quad (1.12)$$

**1.3 Modélisation en pression globale**

Dans cette section, afin de simplifier les calculs, on négligera l'effet de gravité dans (1.5), ce qui donne les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \phi(x) \frac{\partial S_w}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{q}_w) = 0 & \text{dans } Q_\tau \quad (i) \\ \phi(x) \frac{\partial S_o}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{q}_o) = 0 & \text{dans } Q_\tau \quad (ii) \\ \vec{q}_w = -k_w K(x) \nabla p_w & \text{dans } Q_\tau \quad (iii) \\ \vec{q}_o = -k_o K(x) \nabla p_o & \text{dans } Q_\tau \quad (iv) \\ S_w + S_o = 1 & \text{dans } Q_\tau \quad (v) \\ p_w - p_o = p_c(S_w) P_{CM} & \text{dans } Q_\tau \quad (vi) \end{array} \right. \quad (1.13)$$

Ce système de six équations à six inconnues  $(S_w, S_o, p_w, p_o, \vec{q}_w, \vec{q}_o)$ , se prête mal à une étude mathématique, du fait que dans la région où  $S_w = S_{w,m}$ , l'équation (1.13)-(i) disparaît. C'est l'une des raisons pour laquelle **Chavent** [CHA76, CHJ86] et **Antontsev et al.** [AKM90, ANM78] ont introduit une grandeur fictive, appelée “**pression globale**”, que nous allons présenter par la suite.

### 1.3.1 Saturation réduite

On définit d'abord la **saturation réduite**  $u$  de l'un des deux fluides, par exemple pour le fluide mouillant  $w$ , par :

$$u := \frac{S_w - S_{w,m}}{1 - S_{w,m} - S_{o,m}} \quad (1.14)$$

sachant que  $S_{w,m} < S_{w,M} = 1 - S_{o,m}$ , et par suite, par un changement de variable, toutes les fonctions introduites précédemment peuvent s'écrire en fonction de  $u$ , et d'après (1.3) on a :

$$0 \leq u(x, t) \leq 1 \quad \text{dans } Q_\tau \quad (1.15)$$

### 1.3.2 Pression globale

Soit  $\vec{q}$  la **vitesse de filtration totale** des deux fluides, définie par :

$$\vec{q} := \vec{q}_w + \vec{q}_o \quad \text{dans } Q_\tau \quad (1.16)$$

en additionnant les équations (1.13)-(i) et (1.13)-(ii) et en utilisant la relation (1.13)-(v), il s'en suit que

$$\operatorname{div}(\vec{q}) = 0 \quad \text{dans } Q_\tau \quad (1.17)$$

de plus, les équations (1.13)-(iii) et (1.13)-(iv) donne

$$\vec{q} = -K(x) [k_w(u) \nabla p_w + k_o(u) \nabla p_o] \quad \text{dans } Q_\tau \quad (1.18)$$

et pour simplifier les notations, on introduit les fonctions auxiliaires suivantes :

$$\begin{cases} b(u) := \frac{k_w(u)}{k_w(u) + k_o(u)} & , \text{ fraction du flux} \\ d(u) := k_w(u) + k_o(u) & , \text{ mobilité totale} \end{cases} \quad (1.19)$$

voir Figures 1.5-1.6.

En utilisant (1.13)-(vi) on a

$$\begin{aligned} & k_w(u) \nabla p_w + k_o(u) \nabla p_o \\ & = d(u) \left[ \frac{1}{2} (\nabla p_w + \nabla p_o) + \left( b(u) - \frac{1}{2} \right) p'_c(u) P_{CM} \nabla u \right] \end{aligned} \quad (1.20)$$

ce qui implique

$$k_w(u) \nabla p_w + k_o(u) \nabla p_o = d(u) \nabla \left[ \frac{1}{2} (p_w + p_o) + \gamma(u) \right] \quad (1.21)$$

où  $\gamma$  est la fonction définie, pour tout  $u \in [0, 1]$ , par :

$$\gamma(u) := \int_1^u \left( b(s) - \frac{1}{2} \right) p'_c(s) P_{CM} ds \quad (1.22)$$

et par suite, d'après (1.18) on a :

$$\vec{q} = -K(x) d(u) \nabla P \quad \text{dans } Q_\tau \quad (1.23)$$

où

$$P := \frac{1}{2} (p_w + p_o) + \gamma(u) \quad (1.24)$$

appelée **pression globale** (dite aussi “intermédiaire” ou “réduite”). Cette grandeur dimensionnée à une pression est fictive; éventuellement discontinue dans certains cas, vu qu'elle dépend de la saturation  $u$ .

D'autre part, à l'aide de (1.13)-(iii – iv), (1.13)-(vi) et (1.16), on a :

$$[k_w(u) + k_o(u)] \vec{q}_w = k_w(u) \vec{q} + k_o(u) [-k_w(u) K(x) \nabla p_c(u) P_{CM}]$$

et on introduit la fonction suivante :

$$a(u) := \frac{k_w(u) k_o(u)}{k_w(u) + k_o(u)} p'_c(u) P_{CM} \quad , \quad \text{diffusion capillaire} \quad (1.25)$$

voir Figures 1.4, et soit  $\alpha(u) := \int_0^u a(s) ds$ , alors on a :

$$\vec{q}_w = b(u) \vec{q} - K(x) \nabla \alpha(u) \quad (1.26)$$

et d'après l'équation (1.13)-(i), on obtient alors :

$$\Phi(x) \frac{\partial u}{\partial t} + \text{div}(b(u) \vec{q} - K(x) \nabla \alpha(u)) = 0 \quad \text{dans } Q_\tau \quad (1.27)$$

où  $\Phi(x) := (1 - S_{w,m} - S_{o,m}) \phi(x) \in [0, 1]$ , appelée aussi **porosité** et égale à la porosité du milieu, dans le cas où les saturations résiduelles des deux fluides sont nulles.

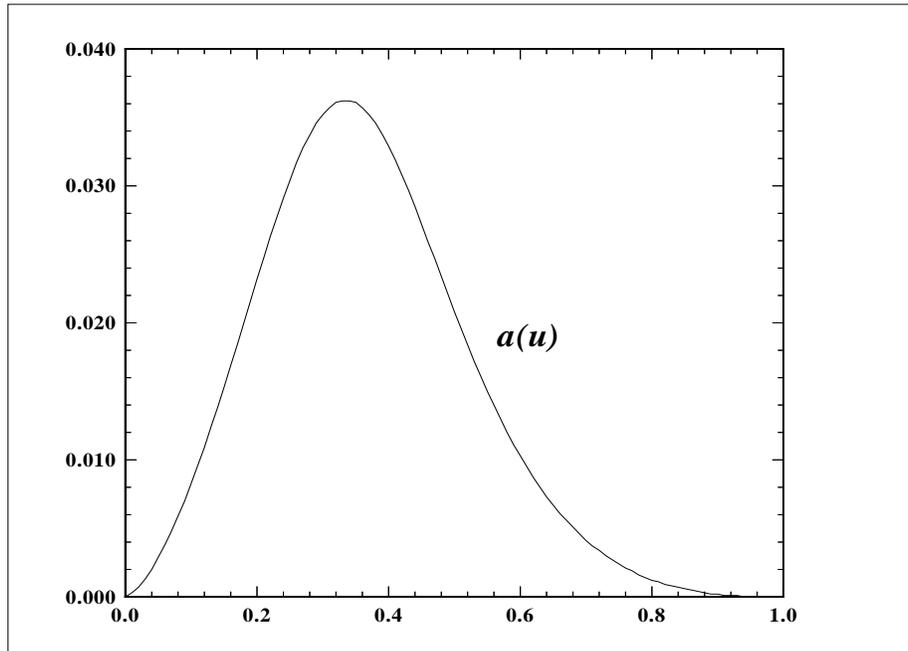


Fig. 1.4: Diffusion capillaire  $a$  en fonction de la saturation réduite  $u$

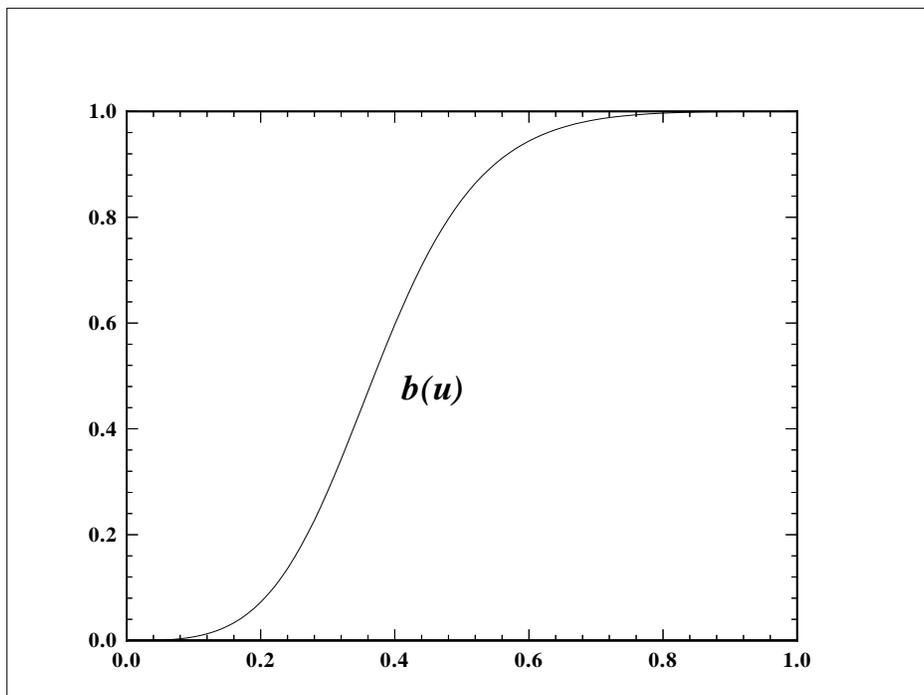


Fig. 1.5: Fraction du flux  $b$  en fonction de la saturation réduite  $u$

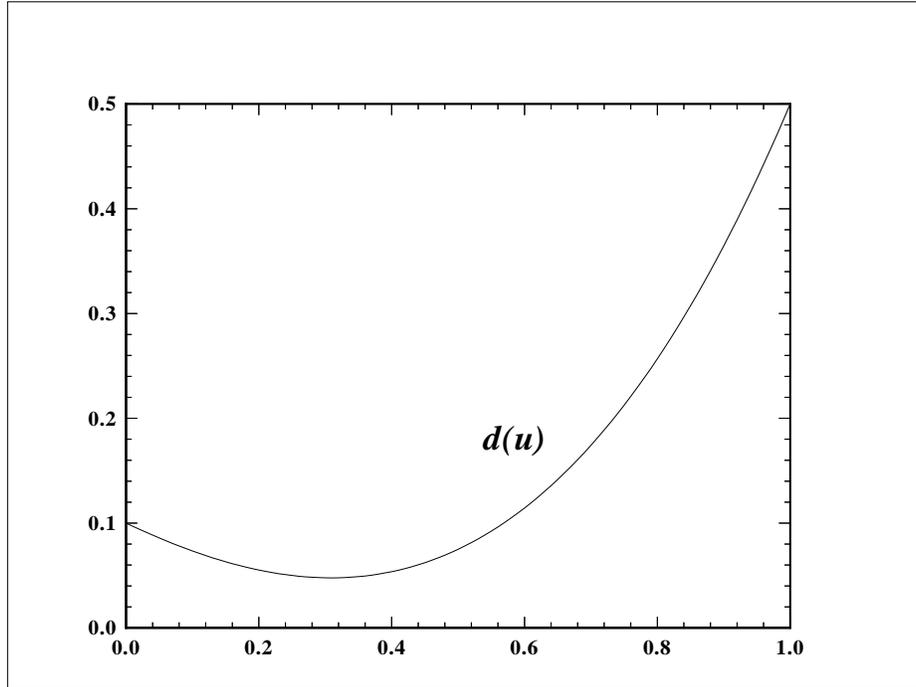


Fig. 1.6: Mobilité totale  $d$  en fonction de la saturation réduite  $u$

## 1.4 Formulation du problème

On présente ici différentes formulations du problème d'écoulement diphasique en milieu poreux.

### 1.4.1 Formulation réduite

Il s'en suit de (1.15), (1.17), (1.23) et (1.27), qu'on a un système de deux équations à deux inconnues  $(u, P)$ , défini par :  $\forall (x, t) \in Q_\tau$

$$\begin{cases} 0 \leq u(x, t) \leq 1 \\ \Phi(x) \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(b(u) K(x) d(u) \nabla P + K(x) \nabla \alpha(u)) = 0 \\ \operatorname{div}(K(x) d(u) \nabla P) = 0 \end{cases} \quad (1.28)$$

il s'agit donc ici du couplage entre une équation d'évolution non linéaire de convection-diffusion dégénérée (du fait que  $a(0) = a(1) = 0$ ), et une famille

d'équations elliptiques paramétrées par le temps par l'intermédiaire du coefficient de mobilité  $d(u(\cdot, t))$ .

Avec les conditions aux bords et condition initiale suivantes :

#### Conditions sur $\Gamma_1$ (injection)

De (1.8) et (1.26), on a :

$$u = 1 \quad \text{et} \quad \vec{q}_w = \vec{q} \quad \text{sur } \Gamma_1$$

et par suite :

$$u = 1 \quad \text{et} \quad \vec{q} \cdot \vec{n} = -q_d \quad \text{sur } \Gamma_1 \quad (1.29)$$

#### Conditions sur $\Gamma_2$ (imperméable)

De (1.9), (1.26) et (1.16), on a :

$$\vec{q} \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{et} \quad K(x) \nabla \alpha(u) \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_2 \quad (1.30)$$

#### Conditions sur $\Gamma_3$ (production)

De (1.10), (1.16) et (1.13)-(vi), on a :

$$u = 0 \quad , \quad \vec{q} \cdot \vec{n} > 0 \quad \text{et} \quad P = P_0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \quad (1.31)$$

où  $P_0$  est donnée par

$$P_0 := P_{atm} + \gamma(0) - \frac{1}{2} P_{CM}$$

#### Condition initiale

De (1.11), on a :

$$u(x, 0) = u^0(x) \quad \text{dans } \Omega \quad (1.32)$$

où  $u^0$  est donnée par

$$u^0 := \frac{S_w^0 - S_{w,m}}{1 - S_{w,m} - S_{o,m}}$$

### 1.4.2 Formulation mixte

Une formulation mixte du problème est donnée par :

#### Équation en Saturation réduite

$$(P_d) \begin{cases} 0 \leq u(x, t) \leq 1 & \text{dans } Q_\tau \\ \Phi(x) \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(b(u)\vec{q}) - \operatorname{div}(K(x)\nabla\alpha(u)) = 0 & \text{dans } Q_\tau \\ u|_{\Gamma_1} = 1 ; K\nabla\alpha(u) \cdot \vec{n}|_{\Gamma_2} = 0 \text{ et } u|_{\Gamma_3} = 0 & \text{sur } [0, \tau[ \\ u(x, 0) = u^0(x) & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (1.33)$$

#### Équation en Pression globale

$$(E_d) \begin{cases} \vec{q} = -d(u)K(x)\nabla P; \operatorname{div}(\vec{q}) = 0 & \text{dans } Q_\tau \\ \vec{q} \cdot \vec{n}|_{\Gamma_1} = -q_d; \vec{q} \cdot \vec{n}|_{\Gamma_2} = 0; P|_{\Gamma_3} = P_0 & \text{sur } [0, \tau[ \end{cases} \quad (1.34)$$

**Remarque 1.1** *Connaissant  $u$  et  $P$ , on peut déterminer les vraies pressions  $p_w$  et  $p_o$  des deux fluides, par les formules*

$$\begin{cases} p_w = P - \gamma(u) + \frac{1}{2}p_c(u) P_{CM} \\ p_o = P - \gamma(u) - \frac{1}{2}p_c(u) P_{CM} \end{cases} \quad (1.35)$$

*De même, connaissant  $u$  et  $\vec{q}$ , on peut déterminer  $\vec{q}_w$  et  $\vec{q}_o$  par les relations (1.26) et (1.16).*

### 1.4.3 Cas mono-dimensionnel

Dans le cas mono-dimensionnel, les équations de saturation et de pression se découpent, du fait que  $\operatorname{div}(q) = 0$  avec  $q(0, t) = q_d$  ce qui implique que  $q = q_d$ , qu'on adimensionne à  $q_d := 1$ , et par suite pour  $I := \Omega = ]0, 1[$ , la saturation réduite  $u$  est solution de l'équation parabolique non linéaire dégénérée suivante :

$$(P_1) \begin{cases} 0 \leq u(x, t) \leq 1 & \text{dans } Q_\tau \\ \Phi(x) \frac{\partial u}{\partial t} + (b(u))_x - (K(x) \nabla \alpha(u))_x = 0 & \text{dans } Q_\tau \\ u(0, t) = 1 \text{ et } u(1, t) = 0 & \text{sur } [0, \tau[ \\ u(x, 0) = u^0(x) & \text{dans } I \end{cases} \quad (1.36)$$

et la pression globale  $P$  est donnée par :

$$P(x, t) = P_0 - \int_1^x \frac{1}{d(u(s, t))K(s)} ds \quad (1.37)$$

#### 1.4.4 Découplage dans le cas multi-dimensionnel

Dans le cas multi-dimensionnel, le découplage est possible si  $\vec{q} = \vec{q}(x)$ , par exemple dans le cas suivant, voir **Hidani** [HID93] :

$$k_w(u) = \frac{u^s}{\mu} \quad \text{et} \quad k_o(u) = \frac{1 - u^s}{\mu}$$

la pression globale  $P$ , ne dépend plus de  $t$ , et  $P = P(x)$  est solution de :

$$(E_d) \begin{cases} \vec{q} = -\frac{1}{\mu} K(x) \nabla P; \operatorname{div}(\vec{q}) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \vec{q} \cdot \vec{n}|_{\Gamma_1} = -q_d; \vec{q} \cdot \vec{n}|_{\Gamma_2} = 0; P|_{\Gamma_3} = P_0 \end{cases} \quad (1.38)$$

et la saturation réduite  $u$ , solution de :

$$(P_d) \begin{cases} 0 \leq u(x, t) \leq 1 & \text{dans } Q_\tau \\ \Phi(x) \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(b(u)\vec{q}) - \operatorname{div}(K(x)\nabla\alpha(u)) = 0 & \text{dans } Q_\tau \\ u|_{\Gamma_1} = 1; K\nabla\alpha(u) \cdot \vec{n}|_{\Gamma_2} = 0 \text{ et } u|_{\Gamma_3} = 0 & \text{sur } [0, \tau[ \\ u(x, 0) = u^0(x) & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (1.39)$$

## 1.5 Existence et unicité de solution faible

### 1.5.1 Cas mono-dimensionnel

Dans le cas mono-dimensionnel, pour  $I := ]0, 1[$ , on suppose que les données du problème vérifient les hypothèses suivantes, qui assurent l'existence et l'unicité de la solution faible :

(H1-1)  $\Phi \in L^\infty(I)$  telle que  $0 < \Phi_- \leq \Phi(x) \leq \Phi^+ \leq 1$ , p.p. dans  $I$ .

(H1-2)  $K \in L^\infty(I)$  telle que  $0 < K_- \leq K(x) \leq K^+ < \infty$ , p.p. dans  $I$ .

(H1-3)  $\alpha \in \mathcal{C}^1([0, 1])$  tel que pour  $a = \alpha'$ ,  $a(0) = a(1) = 0$  et  $a(s) > 0 \forall s \in ]0, 1[$ .

(H1-4)  $b \in \mathcal{C}^1([0, 1])$  est une fonction monotone telle que  $b'(s) > 0 \forall s \in ]0, 1[$ .

(H1-5)  $u^0 \in L^\infty(I)$  tel que  $0 \leq u^0(x) \leq 1$  p.p. dans  $I$ .

(H1-6)  $\alpha^{-1}$  est une fonction continue hölderienne d'exposant  $\theta \in ]0, 1[$  et  $b \circ \alpha^{-1}$  une fonction continue hölderienne d'exposant  $\frac{1+\theta}{2}$ .

et on notera  $u$  la **solution faible** du problème  $(P_1)$  définie par :

$$(P_1^*) \left\{ \begin{array}{ll} u : ]0, \tau[ \longrightarrow W_0; 0 \leq u(x, t) \leq 1 \text{ p.p. dans } Q_\tau & (i) \\ u_t \in L^2(0, \tau; W') \text{ et } \alpha(u) \in L^2(0, \tau; W) & (ii) \\ \int \int_{Q_\tau} [\Phi u v_t + (b(u) - K \alpha(u)_x) v_x] dt dx & \\ + \int_I \Phi u^0 v(x, 0) dx = 0 \quad \forall v \in V & (iii) \end{array} \right. \quad (1.40)$$

où les espaces fonctionnels  $W, W_0$  et  $V$  sont définis par :

$$\begin{aligned} W &:= \{w \in H^1(I); w(1) = 0\} \\ W_0 &:= \{u \in L^2(I); \alpha(u) \in W; [\alpha(u)](0) = \alpha(1)\} \\ V &:= \{v \in \mathcal{C}^1(0, \tau; \mathcal{C}_0^1(\bar{I})); v(\cdot, \tau) \equiv 0\} \end{aligned}$$

alors on a le résultat suivant :

**Proposition 1.2** *Sous les hypothèses (H1-1)-(H1-5) le problèmes  $(P_1^*)$  admet au moins une solution faible. Si de plus l'hypothèse (H1-6) est vérifiée,  $(P_1^*)$  admet une solution unique. [ CHJ86, GAM96, JIN90].*

### 1.5.2 Cas multi-dimensionnel

Dans le cas multi-dimensionnel, notre étude portera sur l'analyse de schémas numériques pour l'équation en saturation (1.33), en supposant que la vitesse de filtration totale  $\vec{q}$  est donnée ou calculée numériquement tout en vérifiant (1.34).

On considère alors les hypothèses suivantes sur les données du problème, qui assurent l'existence et l'unicité de solution faible :

- (H2-0)  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$ , de frontière lipschitzienne  $\Gamma = \partial\Omega$ .
- (H2-1)  $\Phi \in L^\infty(\Omega)$  telle que  $0 < \Phi_- \leq \Phi(x) \leq \Phi^+ \leq 1$ , p.p. dans  $\Omega$ .
- (H2-2)  $K$  est un tenseur symétrique défini positif, uniformément borné dans  $\Omega$  (c.à.d.  $\forall \xi \neq 0, 0 < K_- |\xi|^2 \leq \xi^t K(x) \xi \leq K^+ |\xi|^2 < \infty$  p.p. dans  $\Omega$ ).
- (H2-3)  $\alpha \in \mathcal{C}^1([0, 1])$  tel que pour  $a = \alpha'$ ,  $a(0) = a(1) = 0$  et  $a(s) > 0 \forall s \in ]0, 1[$ .
- (H2-4)  $b \in \mathcal{C}^1([0, 1])$  est une fonction monotone telle que  $b'(s) > 0 \forall s \in ]0, 1[$ .
- (H2-5)  $u^0 \in L^\infty(\Omega)$  tel que  $0 \leq u^0(x) \leq 1$  p.p. dans  $\Omega$ .
- (H2-6)  $\vec{q} \in L^2(0, \tau; H(\text{div}, \Omega))$ , telle que  $\text{div}(\vec{q}) = 0$ ,  $\vec{q} \cdot \vec{n}|_{\Gamma_1} = -q_d < 0$ ,  $\vec{q} \cdot \vec{n}|_{\Gamma_2} = 0$  et  $\vec{q} \cdot \vec{n}|_{\Gamma_3} > 0$ .
- (H2-7)  $\vec{q} \in (L^\infty(Q_\tau))^d$ .
- (H2-8)  $\alpha^{-1}$  est une fonction continue hölderienne d'exposant  $\theta \in ]0, 1[$  et  $b \circ \alpha^{-1}$  une fonction continue hölderienne d'exposant  $\frac{1+\theta}{2}$ .

Une **solution faible**  $u$  pour le problème  $(P_d)$  est définie par :

$$(P_d^*) \left\{ \begin{array}{ll} u : ]0, \tau[ \longrightarrow W_0; 0 \leq u(x, t) \leq 1 \text{ p.p. dans } Q_\tau & (i) \\ u_t \in L^2(0, \tau; W') \text{ et } \alpha(u) \in L^2(0, \tau; W) & (ii) \\ \int \int_{Q_\tau} (\Phi u v_t + [b(u)\vec{q} - K\nabla\alpha(u)] \cdot \nabla v) dt dx & \\ + \int_\Omega \Phi u^0 v(x, 0) dx = 0 \quad \forall v \in V & (iii) \end{array} \right. \quad (1.41)$$

où les espaces fonctionnels  $W$ ,  $W_0$  et  $V$  sont définis par :

$$W := \{w \in H^1(\Omega); w = 0 \text{ sur } \Gamma_3\}$$

$$W_0 := \{u \in L^2(\Omega); \alpha(u) \in W; \alpha(u) = \alpha(1) \text{ sur } \Gamma_1\}$$

$$V := \{v \in C^1(0, \tau; C^2(\bar{\Omega})); v(., \tau) \equiv 0 \text{ et } v = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_3\}$$

alors on a le résultat suivant :

**Proposition 1.3** *Sous les hypothèses (H2-0)-(H2-6) le problème  $(P_d^*)$  admet au moins une solution faible. Si de plus les hypothèses (H2-7)-(H2-8) sont vérifiées, alors  $(P_d^*)$  admet une solution unique. [CHJ86, GAM96, BOH95].*

## 1.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté une formulation mathématique du problème d'écoulement diphasique de fluides en milieu poreux, où les inconnues sont réduites à la saturation de l'un des constituants et une pression fictive, le problème ainsi formulé est gouverné par une équation parabolique non linéaire dégénérée couplée à une famille d'équations elliptiques paramétrée par le temps.

Des résultats d'existence et d'unicité sont présentés pour l'équation en saturation (1.33) dans le cas du découplage. Bien que ce problème est plus simple que le modèle général, il décrit certaines situations physiques, par exemple le cas mono-dimensionnel (1.36) qui sera étudié au chapitre 2, et le cas où les équations de saturation et de pression se découplent (1.39), qui sera étudié au chapitre 3.

## Partie I

Schémas volumes finis pour une  
équation de convection-diffusion  
dégénérée en milieu poreux



# Chapitre 2

## Convergence de quelques schémas de type volumes finis dans le cas mono-dimensionnel

### 2.1 Introduction

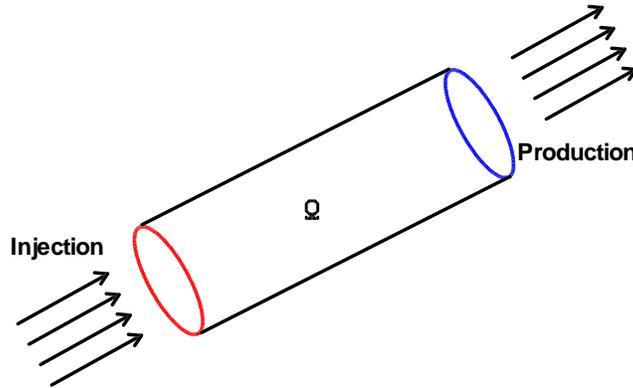
Dans ce chapitre, on développe des schémas de type volumes finis pour le problème mono-dimensionnel non linéaire de convection-diffusion dégénéré, vue au chapitre 1 :

$$(P_1) \begin{cases} 0 \leq u(x, t) \leq 1 & \text{dans } Q_\tau \\ \Phi(x)u_t + b(u)_x - (K(x)\alpha(u)_x)_x = 0 & \text{dans } Q_\tau \\ u(0, t) = 1; u(1, t) = 0 & \text{sur } [0, \tau[ \\ u(x, 0) = u^0(x) & \text{dans } I \end{cases} \quad (2.1)$$

où on note par  $u_t$  la dérivée en temps de la saturation  $u$  et  $u_x$  la dérivation en espace,  $Q_\tau := I \times [0, \tau[$  où  $I := ]0, 1[$ ,  $\alpha \in \mathcal{C}^1([0, 1])$ , telle que  $a := \alpha'$ ,  $a(0) = a(1) = 0$  et  $a(s) > 0 \forall s \in ]0, 1[$ ,  $b \in \mathcal{C}^1([0, 1])$  est une fonction croissante (voir Figures 1.5-1.4),  $\Phi$  et  $K \in L^\infty(I)$ .

Ce problème modélise l'écoulement diphasique de fluides immiscibles et incompressibles, en milieu poreux. Par exemple le drainage de l'huile par injection de l'eau à débit constant, dans une **carotte poreuse** (voir Figure 2.1).

Pour l'analyse mathématique de ce problème on se réfère à [ ALL83, AKM90, ARB92, CHJ86, GAM96].



**Fig. 2.1:** Ecoulement mono-dimensionnel dans une carotte poreuse

Dans la suite, nous allons présenter des schémas de type volumes finis, qui prennent en compte les discontinuités dues au caractère purement hyperbolique du problème au voisinage de la dégénérescence du terme de diffusion.

Ce chapitre est organisé comme suit : dans la section 2.2, on rappelle les hypothèses sur les données du problème ( $P_1$ ) qui assurent l'existence et l'unicité de la solution faible. Dans la section 2.3, nous présentons la discrétisation par trois familles de schémas numériques de type volumes finis pour le problème ( $P_1$ ). Pour tenir compte, d'une manière efficace, des discontinuités, la solution est approchée par des constantes par maille. Dans la section 2.4, on établit la stabilité  $L^\infty$  et des estimations  $BV$  sous les conditions CFL appropriées. La convergence de ces schémas est donnée dans la section 2.5. Les résultats de ce chapitre ont fait l'objet de la publication [ AFA97], et peuvent être vu comme une extension des résultats de **Evje & Karlsen** [ EVK99, EVK00] pour des schémas différences finies monotones explicite et implicite.

## 2.2 Hypothèses sur les données du problème

Dans la suite, nous supposons que les données vérifient les hypothèses suivantes, qui garantissent l'existence et l'unicité d'une solution faible du problème,

voir chapitre 1 proposition 1.2 :

- (H1)  $\Phi \in L^\infty(I)$  telle que  $0 < \Phi_- \leq \Phi(x) \leq \Phi^+ \leq 1$ , p.p. dans  $I$ .
- (H2)  $K \in L^\infty(I)$  telle que  $0 < K_- \leq K(x) \leq K^+ < \infty$ , p.p. dans  $I$ .
- (H3)  $\alpha \in \mathcal{C}^1([0, 1])$  tel que pour  $a := \alpha'$ ,  $a(0) = a(1) = 0$  et  $a(s) > 0 \forall s \in ]0, 1[$ .
- (H4)  $b \in \mathcal{C}^1([0, 1])$  est une fonction monotone telle que  $b'(s) > 0 \forall s \in ]0, 1[$ .
- (H5)  $u^0 \in L^\infty(I)$  tel que  $0 \leq u^0(x) \leq 1$  p.p. dans  $I$ .
- (H6)  $\alpha^{-1}$  est une fonction continue hölderienne d'exposant  $\theta \in ]0, 1[$  et  $b \circ \alpha^{-1}$  une fonction continue hölderienne d'exposant  $\frac{1+\theta}{2}$ .

Plus des hypothèses supplémentaires pour la convergence des schémas numériques.

- (H7)  $u^0 \in \overline{BV}(I)$ .
- (H8)  $K\alpha(u^0)_x \in L^\infty(I) \cap \overline{BV}(I)$ .

Ces dernières hypothèses sont en général vérifiées par les données physiques du problème, même pour des perméabilités  $K$  discontinues. Dans **Evje & Karlsen** [EVK99, EVK00], où  $K \equiv 1$  et  $I = IR$ , on suppose  $u^0 \in L^1(IR) \cap BV(IR)$  et  $[b(u^0) - \alpha(u^0)_x] \in BV(IR)$ .

## 2.3 Discrétisation par volumes finis

### 2.3.1 Notations

Pour une discrétisation en volumes finis, on introduit les notations et définitions suivantes :

- $(t_n)_{n=0, \dots, N_\tau}$  une partition de  $[0, \tau]$  par des pas de temps  $\Delta t_n := t_{n+1} - t_n$ , on pose  $\Delta t := \max_n \Delta t_n$ .
- $(x_i)_{i=1, \dots, N_x}$  une partition de  $I$  avec  $x_{i+1} = x_i + \Delta x_i$ , on pose  $\Delta x := \max_i \Delta x_i$ .

- On note :  $x_{i+\frac{1}{2}}$  le centre de  $I_{i+\frac{1}{2}} := [x_i, x_{i+1}]$ ,  $x_{\frac{1}{2}} := 0$ ,  $x_{N_x+\frac{1}{2}} := 1$ .
- $I_i := \left[ x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \right]$ ,  $i = 1, \dots, N_x$ , le **volume de contrôle** (voir Figure 2.2).
- $h_i := |I_i| = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$ , et on pose  $h := \min_i (h_i)$ .
- Pour  $\Phi \in L^\infty(I)$ , on pose  $\Phi_i := \frac{1}{h_i} \int_{I_i} \Phi(x) dx$ .
- Pour des raisons de simplicité on suppose que la fonction  $K$  est constante par morceaux, et on pose  $K_{i+\frac{1}{2}} := K|_{I_{i+\frac{1}{2}}}$ .
- Pour une condition initiale  $u^0 \in L^\infty(I)$ , on pose  $u_i^0 := \frac{1}{h_i} \int_{I_i} u^0(x) dx$ , avec les conditions aux bords  $u_{\frac{1}{2}}^n = 1$  et  $u_{N_x+\frac{1}{2}}^n = 0$ .
- Soit  $u_i^n$  [resp.  $u_{i+\frac{1}{2}}^n$ ] une approximation de  $u$  au point  $(x_i, t_n)$  supposée constante sur le volume de contrôle  $I_i$  [resp. au point  $(x_{i+\frac{1}{2}}, t_n)$ ].

Ces approximations seront définies par les schémas numériques qui suivent. On aura besoin aussi de l'hypothèse sur la **régularité du maillage** :

(H9)  $\exists \beta \in ]0, 1]$ , tel que  $\beta \Delta x \leq h$ , où  $\beta$  est une constante indépendante de  $h$ .

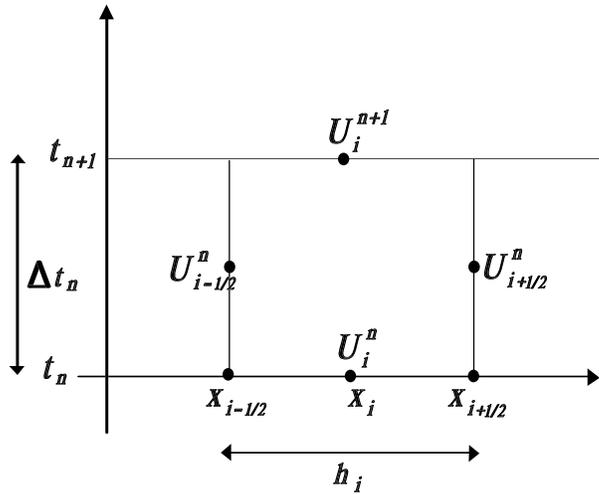


Fig. 2.2: Volume de contrôle  $I_i$

### 2.3.2 Définitions

En intégrant (2.1) sur  $I_i \times [t_n, t_{n+1}]$  on obtient le schéma suivant :

Pour  $i = 1, \dots, N_x$

$$\begin{aligned} & \Phi_i (u_i^{n+1} - u_i^n) h_i + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left( b(u)_{i+\frac{1}{2}} - b(u)_{i-\frac{1}{2}} \right) dt \\ &= K_{i+\frac{1}{2}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left( \frac{\partial \alpha(u)}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2}} dt - K_{i-\frac{1}{2}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left( \frac{\partial \alpha(u)}{\partial x} \right)_{i-\frac{1}{2}} dt \end{aligned} \quad (2.2)$$

Ce schéma peut s'écrire sous la forme suivante :

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\Delta t_n}{\Phi_i h_i} \left( F_{i+\frac{1}{2}}^- + F_{i-\frac{1}{2}}^+ \right) - \frac{\Delta t_n}{\Phi_i h_i} \left( G_{i+\frac{1}{2}}^- + G_{i-\frac{1}{2}}^+ \right) \quad (2.3)$$

où  $F_{i+\frac{1}{2}}^\pm$  et  $G_{i+\frac{1}{2}}^\pm$  sont respectivement le **flux de convection** et le **flux de diffusion**, à droite et à gauche du point  $x_{i+\frac{1}{2}} = I_{i+1} \cap I_i$ , définis par :

$$\begin{aligned} F_{i+\frac{1}{2}}^+ &:= \frac{1}{\Delta t_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} b(u)_{i+\frac{1}{2}} dt \\ F_{i+\frac{1}{2}}^- &:= -\frac{1}{\Delta t_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} b(u)_{i+\frac{1}{2}} dt \end{aligned} \quad (2.4)$$

et

$$\begin{aligned} G_{i+\frac{1}{2}}^+ &:= \frac{K_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta t_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left( \frac{\partial \alpha(u)}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2}} dt \\ G_{i+\frac{1}{2}}^- &:= -\frac{K_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta t_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left( \frac{\partial \alpha(u)}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2}} dt \end{aligned} \quad (2.5)$$

soient  $F_{i+\frac{1}{2}}^{*\pm}(u_{i+1}, u_i)$  et  $G_{i+\frac{1}{2}}^{*\pm}(u_{i+1}, u_i)$  des approximations à deux points respectivement de  $F_{i+\frac{1}{2}}^\pm$  et  $G_{i+\frac{1}{2}}^\pm$ , appelées aussi **flux numériques**.

La conservation des flux numériques est une propriété caractéristique des schémas numériques pour les lois de conservation, cette conservation est en général définie par l'égalité entre le flux entrant et le flux sortant à travers une interface du maillage [ EGH00, KRO97].

La consistance du flux numérique est en général définie pour que l'ordre de l'approximation numérique choisi pour le flux soit supérieur ou égale à 1. [ EGH00, KRO97]

Ainsi d'après ces définitions de la conservation et de la consistance, pour les flux numériques des termes de convection et de diffusion cités séparément dans [ EGH00, KRO97], on peut les généraliser par :

**Définition 2.1 (Conservativité)** *On dira que les flux approchés  $F_{i+\frac{1}{2}}^*$  et  $G_{i+\frac{1}{2}}^*$  sont conservatifs au sens des volumes finis, si on a une conservation locale :*

$$F_{i+\frac{1}{2}}^{*-} + F_{i+\frac{1}{2}}^{*+} = 0 \text{ et } G_{i+\frac{1}{2}}^{*-} + G_{i+\frac{1}{2}}^{*+} = 0 \text{ pour } i = 1, \dots, N_x - 1 \quad (2.6)$$

plus une conservation globale :

$$F_{N_x+\frac{1}{2}}^{*-} + F_{\frac{1}{2}}^{*+} = [b(u)]_{x=0}^{x=1} \text{ et } G_{N_x+\frac{1}{2}}^{*-} + G_{\frac{1}{2}}^{*+} = [K(x)\alpha(u)]_{x=0}^{x=1} \quad (2.7)$$

où  $[F(s)]_{s=0}^{s=1} := F(1) - F(0)$ .

**Définition 2.2 (Consistance)** *On dira que les flux approchés  $F_{i+\frac{1}{2}}^*$  et  $G_{i+\frac{1}{2}}^*$  sont consistants au sens des volumes finis, si on a :*

$$\begin{aligned} F_{i+\frac{1}{2}}^{*\pm}(v, v) &= \pm b(v) && \text{pour tout } v \in [0, 1] \text{ et} \\ G_{i+\frac{1}{2}}^{*\pm}(u_{i+1}, u_i) &= \pm K_{i+\frac{1}{2}} \left( \frac{\partial \alpha(u)}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2}} + \theta(h) && \text{pour tout } u \text{ assez régulière} \end{aligned} \quad (2.8)$$

où  $|\theta(h)| \leq Ch$ , ( $C \in \mathbb{R}_+$ , ne dépendant que de  $u$ ).

**Définition 2.3 (Volumes Finis)** *On dira qu'un schéma numérique pour le problème  $(P_1)$  est de type volumes finis, si les flux numériques approchés sont conservatifs et consistants au sens des définitions 2.1 et 2.2.*

De (2.2) nous pouvons décrire trois familles de schémas volumes finis (SVF) conservatifs et consistants : l'un est explicite, les deux autres sont implicite et semi-implicite.

### 2.3.3 Schéma explicite

En utilisant une approximation explicite dans (2.2), on a :

Pour  $i = 1, \dots, N_x$

$$\begin{aligned} & \Phi_i (u_i^{n+1} - u_i^n) h_i + \left( b(u)_{i+\frac{1}{2}}^n - b(u)_{i-\frac{1}{2}}^n \right) \Delta t_n \\ &= K_{i+\frac{1}{2}} \left( \frac{\partial \alpha(u)}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2}}^n \Delta t_n - K_{i-\frac{1}{2}} \left( \frac{\partial \alpha(u)}{\partial x} \right)_{i-\frac{1}{2}}^n \Delta t_n \end{aligned} \quad (2.9)$$

Le terme de convection est approché par un schéma de **Godunov** [GOD76], soit  $b(u)_{i+\frac{1}{2}}^n = b(u_{i+\frac{1}{2}}^n)$  où  $u_{i+\frac{1}{2}}^n$  est la solution au point  $x_{i+\frac{1}{2}}$  du **problème de Riemann** suivant :

$$(PR) \begin{cases} \Phi(x)u_x + b(u)_x = 0 \\ u_g = u_i^n \text{ et } u_d = u_{i+1}^n \end{cases} \quad (2.10)$$

et du fait que  $b'(u) \geq 0$  on a  $u_{i+\frac{1}{2}}^n = u_i^n$ , c.à.d. le terme de convection est approché par un schéma décentré amont, ce qui assure une conservation et une consistance pour le flux de convection, pour le terme de diffusion on choisit une approximation centrée, d'ordre 1 de la forme :

$$\left( \frac{\partial \alpha(u)}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2}}^n \simeq \frac{\alpha(u_{i+1}^n) - \alpha(u_i^n)}{\Delta x_i}$$

Ainsi d'après les hypothèses **(H3)**-**(H4)**, le schéma peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= u_i^n - \frac{\Delta t_n}{\Phi_i h_i} (b(u_i^n) - b(u_{i-1}^n)) + \frac{K_{i+\frac{1}{2}} \Delta t_n}{\Phi_i h_i \Delta x_i} (\alpha(u_{i+1}^n) - \alpha(u_i^n)) \\ &\quad - \frac{K_{i-\frac{1}{2}} \Delta t_n}{\Phi_i h_i \Delta x_{i-1}} (\alpha(u_i^n) - \alpha(u_{i-1}^n)) \end{aligned} \quad (2.11)$$

pour  $i = 2, \dots, N_x - 1$ , et

$$u_1^{n+1} = u_1^n - \frac{\Delta t_n}{\Phi_1 h_1} (b(u_1^n) - b(1)) + \frac{K_{\frac{3}{2}} \Delta t_n}{\Phi_1 h_1 \Delta x_1} (\alpha(u_2^n) - \alpha(u_1^n)) \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} u_{N_x}^{n+1} &= u_{N_x}^n - \frac{\Delta t_n}{\Phi_{N_x} h_{N_x}} (b(u_{N_x}^n) - b(u_{N_x-1}^n)) \\ &\quad - \frac{K_{N_x-\frac{1}{2}} \Delta t_n}{\Phi_{N_x} h_{N_x} \Delta x_{N_x-1}} (\alpha(u_{N_x}^n) - \alpha(u_{N_x-1}^n)) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Pour des raisons de simplicité des notations, on pose :

$$\alpha(u_0^n) := \alpha(u_1^n), \quad \alpha(u_{N_x+1}^n) := \alpha(u_{N_x}^n) \text{ et } b(u_0^n) := b(1)$$

ainsi on peut écrire le schéma sous la forme suivante :

Pour  $i = 1, \dots, N_x$

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= u_i^n - \frac{\Delta t_n}{\Phi_i h_i} (b(u_i^n) - b(u_{i-1}^n)) \\ &+ \frac{K_{i+\frac{1}{2}} \Delta t_n}{\Phi_i h_i \Delta x_i} (\alpha(u_{i+1}^n) - \alpha(u_i^n)) - \frac{K_{i-\frac{1}{2}} \Delta t_n}{\Phi_i h_i \Delta x_{i-1}} (\alpha(u_i^n) - \alpha(u_{i-1}^n)) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Ici les **flux numériques** sont donnés par : pour  $i = 1, \dots, N_x$

$$\begin{aligned} F_{i-\frac{1}{2}}^{*+}(u_i^n, u_{i-1}^n) &:= b(u_{i-1}^n) \\ G_{i-\frac{1}{2}}^{*+}(u_i^n, u_{i-1}^n) &:= \frac{K_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x_{i-1}} (\alpha(u_i^n) - \alpha(u_{i-1}^n)) \end{aligned} \quad (2.15)$$

et

$$\begin{aligned} F_{i+\frac{1}{2}}^{*-}(u_{i+1}^n, u_i^n) &:= -b(u_i^n) \\ G_{i+\frac{1}{2}}^{*-}(u_{i+1}^n, u_i^n) &:= \frac{-K_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta x_i} (\alpha(u_{i+1}^n) - \alpha(u_i^n)) \end{aligned} \quad (2.16)$$

ce qui assure la conservation des flux, la consistance est due au fait que les approximations choisies sont d'ordre 1, et par suite le schéma explicite (2.14) est de type volumes finis au sens de la définition 2.3.

### 2.3.4 Schéma implicite

De même en utilisant une approximation implicite dans (2.2) le schéma devient :

Pour  $i = 1, \dots, N_x$

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= u_i^n - \frac{\Delta t_n}{\Phi_i h_i} (b(u_i^{n+1}) - b(u_{i-1}^{n+1})) \\ &+ \frac{K_{i+\frac{1}{2}} \Delta t_n}{\Phi_i h_i \Delta x_i} (\alpha(u_{i+1}^{n+1}) - \alpha(u_i^{n+1})) - \frac{K_{i-\frac{1}{2}} \Delta t_n}{\Phi_i h_i \Delta x_{i-1}} (\alpha(u_i^{n+1}) - \alpha(u_{i-1}^{n+1})) \end{aligned} \quad (2.17)$$

avec

$$\alpha(u_0^{n+1}) := \alpha(u_1^{n+1}), \quad \alpha(u_{N_x+1}^{n+1}) := \alpha(u_{N_x}^{n+1}) \quad \text{et} \quad b(u_0^{n+1}) := b(1)$$

Notons qu'on a utilisé ici une approximation implicite pour les termes de convection et de diffusion. Les **flux numériques** sont donnés par : pour  $i = 1, \dots, N_x$

$$\begin{aligned}
F_{i-\frac{1}{2}}^{*+}(u_i^{n+1}, u_{i-1}^{n+1}) &:= b(u_{i-1}^{n+1}) \\
G_{i-\frac{1}{2}}^{*+}(u_i^{n+1}, u_{i-1}^{n+1}) &:= \frac{K_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x_{i-1}} (\alpha(u_i^{n+1}) - \alpha(u_{i-1}^{n+1}))
\end{aligned} \tag{2.18}$$

et

$$\begin{aligned}
F_{i+\frac{1}{2}}^{*-}(u_{i+1}^{n+1}, u_i^{n+1}) &:= -b(u_i^{n+1}) \\
G_{i+\frac{1}{2}}^{*-}(u_{i+1}^{n+1}, u_i^{n+1}) &:= \frac{-K_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta x_i} (\alpha(u_{i+1}^{n+1}) - \alpha(u_i^{n+1}))
\end{aligned} \tag{2.19}$$

ce qui montre la conservation et la consistance des flux, au sens des définitions 2.1 et 2.2, et par suite le schéma implicite (2.17) est de type volumes finis au sens de la définition 2.3.

### 2.3.5 Schéma semi-implicite

Ici on considère une approximation implicite pour le terme de diffusion et une approximation explicite pour le terme de convection dans (2.2), ainsi on a :

Pour  $i = 1, \dots, N_x$

$$\begin{aligned}
u_i^{n+1} &= u_i^n - \frac{\Delta t_n}{\Phi_i h_i} (b(u_i^n) - b(u_{i-1}^n)) \\
&+ \frac{K_{i+\frac{1}{2}} \Delta t_n}{\Phi_i h_i \Delta x_i} (\alpha(u_{i+1}^{n+1}) - \alpha(u_i^{n+1})) - \frac{K_{i-\frac{1}{2}} \Delta t_n}{\Phi_i h_i \Delta x_{i-1}} (\alpha(u_i^{n+1}) - \alpha(u_{i-1}^{n+1}))
\end{aligned} \tag{2.20}$$

avec

$$\alpha(u_0^{n+1}) := \alpha(u_1^{n+1}), \quad \alpha(u_{N_x+1}^{n+1}) := \alpha(u_{N_x}^{n+1}) \quad \text{et} \quad b(u_0^n) := b(1)$$

Ici les **flux numériques** sont donnés par : pour  $i = 1, \dots, N_x$

$$\begin{aligned}
F_{i-\frac{1}{2}}^{*+}(u_i^n, u_{i-1}^n) &:= b(u_{i-1}^n) \\
G_{i-\frac{1}{2}}^{*+}(u_i^{n+1}, u_{i-1}^{n+1}) &:= \frac{K_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x_{i-1}} (\alpha(u_i^{n+1}) - \alpha(u_{i-1}^{n+1}))
\end{aligned} \tag{2.21}$$

et

$$\begin{aligned} F_{i+\frac{1}{2}}^{*-} (u_{i+1}^n, u_i^n) &:= -b(u_i^n) \\ G_{i+\frac{1}{2}}^{*-} (u_{i+1}^{n+1}, u_i^{n+1}) &:= \frac{-K_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta x_i} (\alpha(u_{i+1}^{n+1}) - \alpha(u_i^{n+1})) \end{aligned} \quad (2.22)$$

ce qui montre la conservation et la consistance des flux, au sens des définitions 2.1 et 2.2, et par suite le schéma semi-implicite (2.20) est de type volumes finis au sens de la définition 2.3.

L'existence et l'unicité pour les systèmes non linéaires (2.17) et (2.20), seront étudiées dans la section 2.4.

## 2.4 Stabilité $L^\infty$ et estimation $BV$

Dans cette section, on présentera l'analyse des schémas volumes finis obtenus dans la section 2.3, et on étudiera leurs stabilités  $L^\infty$  et  $BV$ .

**Définition 2.4** (*Stabilité  $L^\infty$* ) *On dira que la solution approchée  $(u_i^n)$  est  $L^\infty$  stable sur  $I$ , si on a :*

$$\|u^n\|_\infty := \sup_{1 \leq i \leq N_x} |u_i^n| \leq C \text{ pour tout } n = 1, \dots, N_\tau \quad (2.23)$$

**Définition 2.5** (*Stabilité  $BV$* ) *On dira que la solution approchée  $(u_i^n)$  est  $BV$  stable sur  $I$ , si on a :*

$$\|u^n\|_{BV(I)} := \sum_{i=0, \dots, N_x} |u_{i+1}^n - u_i^n| \leq C \text{ pour tout } n = 1, \dots, N_\tau \quad (2.24)$$

L'espace  $BV(I)$  est l'espace des fonctions à variation totale bornée sur  $I$ .

Soient  $C_1$  et  $C_2$  définies par :

$$C_1 := \sup_i \left( \frac{h}{\Phi_i h_i} \right) \text{ et } C_2 := \sup_i \frac{h^2}{\Phi_i h_i} \left( \frac{K_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta x_i} + \frac{K_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x_{i-1}} \right) \quad (2.25)$$

D'après les hypothèses **(H1)**-**(H2)** et **(H9)**, on a :

$$\frac{\beta}{\Phi_+} \leq C_1 \leq \frac{1}{\Phi_-} \text{ et } \frac{2\beta^2 K_-}{\Phi_+} \leq C_2 \leq \frac{2K^+}{\Phi_-} \quad (2.26)$$

### 2.4.1 Analyse du schéma explicite

**Proposition 2.6** *Sous les hypothèses (H1)-(H7), (H9) et la condition CFL suivante :*

$$CFL_1 := \frac{\Delta t}{h} C_1 \sup_{0 \leq s \leq 1} b'(s) + \frac{\Delta t}{h^2} C_2 \sup_{0 \leq s \leq 1} a(s) \leq 1 \quad (2.27)$$

la solution approchée  $(u_i^n)$  définie par (2.14) satisfait le **principe du maximum discret** suivant :

$$0 \leq u_i^n \leq 1 \text{ pour } i = 1, \dots, N_x \text{ et } n = 1, \dots, N_\tau \quad (2.28)$$

De plus, le schéma explicite (2.14) est  $BV$  stable.

**Démonstration.** On écrira le schéma (2.14) sous la forme suivante :

Pour  $i = 1, \dots, N_x$

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} = & u_i^n - \frac{\Delta t_n}{\Phi_i h_i} b_{i-\frac{1}{2}}^n (u_i^n - u_{i-1}^n) \\ & + \frac{K_{i+\frac{1}{2}} \Delta t_n}{\Phi_i h_i \Delta x_i} a_{i+\frac{1}{2}}^n (u_{i+1}^n - u_i^n) - \frac{K_{i-\frac{1}{2}} \Delta t_n}{\Phi_i h_i \Delta x_{i-1}} a_{i-\frac{1}{2}}^n (u_i^n - u_{i-1}^n) \end{aligned} \quad (2.29)$$

où

$$\begin{aligned} b_{i-\frac{1}{2}}^n & := \frac{b(u_i^n) - b(u_{i-1}^n)}{u_i^n - u_{i-1}^n} \quad \text{et} \quad a_{i-\frac{1}{2}}^n := \frac{\alpha(u_i^n) - \alpha(u_{i-1}^n)}{u_i^n - u_{i-1}^n} \quad \text{si} \quad u_i^n \neq u_{i-1}^n \\ b_{i-\frac{1}{2}}^n & := b'(u_i^n) \quad \text{et} \quad a_{i-\frac{1}{2}}^n := a(u_i^n) \quad \text{si} \quad u_i^n = u_{i-1}^n \end{aligned}$$

avec

$$a_{\frac{1}{2}}^n := a_{N_x+\frac{1}{2}}^n := 0, \quad u_0^n := 1 \quad \text{et} \quad u_{N_x+1}^n := 0$$

D'après les hypothèses (H3)-(H4) les coefficients  $b_{i-\frac{1}{2}}^n$  et  $a_{i-\frac{1}{2}}^n$  sont tous positifs, ainsi on peut écrire l'équation (2.29) sous la forme suivante :

Pour  $i = 1, \dots, N_x$

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} = & u_i^n \left( 1 - \left( \frac{\Delta t_n}{\Phi_i h_i} b_{i-\frac{1}{2}}^n + \frac{K_{i+\frac{1}{2}} \Delta t_n}{\Phi_i h_i \Delta x_i} a_{i+\frac{1}{2}}^n + \frac{K_{i-\frac{1}{2}} \Delta t_n}{\Phi_i h_i \Delta x_{i-1}} a_{i-\frac{1}{2}}^n \right) \right) \\ & + u_{i-1}^n \left( \frac{\Delta t_n}{\Phi_i h_i} b_{i-\frac{1}{2}}^n + \frac{K_{i-\frac{1}{2}} \Delta t_n}{\Phi_i h_i \Delta x_{i-1}} a_{i-\frac{1}{2}}^n \right) + u_{i+1}^n \left( \frac{K_{i+\frac{1}{2}} \Delta t_n}{\Phi_i h_i \Delta x_i} a_{i+\frac{1}{2}}^n \right) \end{aligned} \quad (2.30)$$

maintenant d'après la condition CFL (2.27) on a

$$\left( 1 - \left( \frac{\Delta t_n}{\Phi_i h_i} b_{i-\frac{1}{2}}^m + \frac{K_{i+\frac{1}{2}} \Delta t_n}{\Phi_i h_i \Delta x_i} a_{i+\frac{1}{2}}^n + \frac{K_{i-\frac{1}{2}} \Delta t_n}{\Phi_i h_i \Delta x_{i-1}} a_{i-\frac{1}{2}}^n \right) \right) \geq 0$$

et par récurrence sur  $n$  on a :

$$0 \leq u_i^n \leq 1 \text{ pour } i = 0, \dots, N_x + 1 \implies 0 \leq u_i^{n+1} \leq 1$$

d'où la stabilité  $L^\infty$ .

Pour montrer l'estimation  $BV$ , nous avons d'après (2.30) :

pour  $i = 1, \dots, N_x - 1$

$$\begin{aligned} & u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1} \\ &= (u_{i+1}^n - u_i^n) \left( 1 - \frac{\Delta t_n}{\Phi_{i+1} h_{i+1}} b_{i+\frac{1}{2}}^m - \frac{K_{i+\frac{1}{2}} \Delta t_n}{\Phi_{i+1} h_{i+1} \Delta x_i} a_{i+\frac{1}{2}}^n - \frac{K_{i+\frac{1}{2}} \Delta t_n}{\Phi_i h_i \Delta x_i} a_{i+\frac{1}{2}}^n \right) \\ &+ (u_i^n - u_{i-1}^n) \left( \frac{\Delta t_n}{\Phi_i h_i} b_{i-\frac{1}{2}}^m + \frac{K_{i-\frac{1}{2}} \Delta t_n}{\Phi_i h_i \Delta x_{i-1}} a_{i-\frac{1}{2}}^n \right) \\ &+ (u_{i+2}^n - u_{i+1}^n) \left( \frac{K_{i+\frac{3}{2}} \Delta t_n}{\Phi_{i+1} h_{i+1} \Delta x_{i+1}} a_{i+\frac{3}{2}}^n \right) \end{aligned}$$

En utilisant la condition CFL (2.27) et par prolongement de la fonction  $u^n$  à l'extérieur de l'intervalle  $[0, 1]$ , par  $u^n|_{]-\infty, 0[} := 1$  et  $u^n|_{]1, +\infty[} := 0$ , il vient immédiatement que

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in \mathbb{Z}} |u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}| \\ & \leq \sum_{i \in \mathbb{Z}} |u_{i+1}^n - u_i^n| \left( 1 - \frac{\Delta t_n}{\Phi_{i+1} h_{i+1}} b_{i+\frac{1}{2}}^m - \frac{K_{i+\frac{1}{2}} \Delta t_n}{\Phi_{i+1} h_{i+1} \Delta x_i} a_{i+\frac{1}{2}}^n - \frac{K_{i+\frac{1}{2}} \Delta t_n}{\Phi_i h_i \Delta x_i} a_{i+\frac{1}{2}}^n \right) \\ & + \sum_{i \in \mathbb{Z}} |u_{i+1}^n - u_i^n| \left( \frac{\Delta t_n}{\Phi_{i+1} h_{i+1}} b_{i+\frac{1}{2}}^m + \frac{K_{i+\frac{1}{2}} \Delta t_n}{\Phi_{i+1} h_{i+1} \Delta x_i} a_{i+\frac{1}{2}}^n \right) \\ & + \sum_{i \in \mathbb{Z}} |u_{i+1}^n - u_i^n| \left( \frac{K_{i+\frac{1}{2}} \Delta t_n}{\Phi_i h_i \Delta x_i} a_{i+\frac{1}{2}}^n \right) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} |u_{i+1}^n - u_i^n| \end{aligned}$$

et par suite on a l'estimation :

$$\|u^{n+1}\|_{BV(I)} := \sum_{i=0, \dots, N_x} |u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}| \leq \sum_{i=0, \dots, N_x} |u_{i+1}^n - u_i^n| \leq \|u^0\|_{BV(I)} \quad (2.31)$$

Ceci termine la démonstration de la proposition 2.6. ■

### 2.4.2 Analyse des schémas implicite et semi-implicite

Pour les schémas implicite et semi-implicite, on montrera d'abord l'existence et l'unicité de solution pour les systèmes non linéaires (2.17) et (2.20), en utilisant un algorithme de point fixe.

On pose

$$U^n := [u_0^n, u_1^n, \dots, u_i^n, \dots, u_{N_x}^n]^t \text{ et } W^n := [w_0^n, w_1^n, \dots, w_i^n, \dots, w_{N_x}^n]^t$$

avec

$$w_i^n := u_i^n - \frac{\Delta t_n}{\Phi_i h_i} (b(u_i^n) - b(u_{i-1}^n)) = u_i^n - \frac{\Delta t_n}{\Phi_i h_i} b_{i-\frac{1}{2}}^n (u_i^n - u_{i-1}^n) \quad (2.32)$$

pour  $i = 1, \dots, N_x$  et  $w_0^n := u_0^n = 1$ .

Les solutions des schémas (2.17) et (2.20) peuvent s'écrire comme des limites des solutions des systèmes d'équations linéarisées suivants :

$$D_1 \left( [U^{n+1}]^{(k)} \right) [U^{n+1}]^{(k+1)} = U^n \quad \text{avec} \quad [U^{n+1}]^{(0)} = U^n \quad (2.33)$$

et

$$D_2 \left( [U^{n+1}]^{(k)} \right) [U^{n+1}]^{(k+1)} = W^n \quad \text{avec} \quad [U^{n+1}]^{(0)} = U^n \quad (2.34)$$

où  $D_s$ ,  $s = 1, 2$ , est une matrice tridiagonale dont les éléments non nuls s'écrivent sous la forme :  $(D_s)_{0,0} := 1$  et pour  $i = 1, \dots, N_x$

$$\begin{aligned}
 [D_1 (U^{n+1})^{(k)}]_{i,i} &:= 1 + \frac{\Delta t_n}{\Phi_i h_i} \left( (b_{i-\frac{1}{2}}^{n+1})^{(k)} + (d_{i-\frac{1}{2}}^{n+1})^{(k)} + (d_{i+\frac{1}{2}}^{n+1})^{(k)} \right) \\
 [D_1 (U^{n+1})^{(k)}]_{i,i-1} &:= -\frac{\Delta t_n}{\Phi_i h_i} \left( (b_{i-\frac{1}{2}}^{n+1})^{(k)} + (d_{i-\frac{1}{2}}^{n+1})^{(k)} \right) \\
 [D_1 (U^{n+1})^{(k)}]_{i,i+1} &:= -\frac{\Delta t_n}{\Phi_i h_i} (d_{i+\frac{1}{2}}^{n+1})^{(k)}
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

et

$$\begin{aligned}
 [D_2 (U^{n+1})^{(k)}]_{i,i} &:= 1 + \frac{\Delta t_n}{\Phi_i h_i} \left( (d_{i-\frac{1}{2}}^{n+1})^{(k)} + (d_{i+\frac{1}{2}}^{n+1})^{(k)} \right) \\
 [D_2 (U^{n+1})^{(k)}]_{i,i-1} &:= -\frac{\Delta t_n}{\Phi_i h_i} (d_{i-\frac{1}{2}}^{n+1})^{(k)} \\
 [D_2 (U^{n+1})^{(k)}]_{i,i+1} &:= -\frac{\Delta t_n}{\Phi_i h_i} (d_{i+\frac{1}{2}}^{n+1})^{(k)}
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

où

$$\begin{aligned}
 (d_{i-\frac{1}{2}}^{n+1})^{(k)} &:= \frac{K_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x_{i-1}} (a_{i-\frac{1}{2}}^{n+1})^{(k)} \text{ pour } i = 1, \dots, N_x \\
 \text{et } (d_{\frac{1}{2}}^{n+1})^{(k)} &:= (d_{N_x+\frac{1}{2}}^{n+1})^{(k)} := 0
 \end{aligned}$$

**Lemme 2.7** *Sous les hypothèses (H1)-(H7), les solutions  $([U^{n+1}]^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  des systèmes (2.33) satisfont le **principe du maximum discret** suivant :*

$$0 \leq (u_i^n)^{(k)} \leq 1 \text{ pour } i = 1, \dots, N_x \text{ et } n = 1, \dots, N_\tau \tag{2.37}$$

*Le même résultat est valable pour les solutions des systèmes (2.34) sous la condition **CFL** suivante :*

$$CFL_2 := \frac{\Delta t}{h} C_1 \sup_{0 \leq s \leq 1} b'(s) \leq 1 \tag{2.38}$$

où  $C_1$  est donnée par (2.25).

**Démonstration.** D'après les hypothèses (H3) et (H4), les coefficients  $b_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}$  et  $d_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}$  sont tous positifs, ainsi il est facile de voir que la matrice  $D_s$  est une matrice à **diagonale stictement dominante**, avec

$$(D_{i,i} - \sum_{i \neq j} |D_{i,j}|) \geq 1 \tag{2.39}$$

donc  $\|D_s^{-1}\|_\infty \leq 1$ , où  $\|\cdot\|_\infty$  est la norme matricielle  $l_\infty$ , de plus  $D_s$  est une **matrice monotone** [MIC96, FUL98], c.à.d.

$$D_{i,i} > 0 \text{ et } D_{i,j} \leq 0 \text{ pour } i \neq j \quad (2.40)$$

donc on a  $(D_s^{-1})_{i,j} \geq 0$ , et par suite

$$\forall V \in [0, 1]^{N_x+1}, D_s^{-1}V \in [0, 1]^{N_x+1} \quad (2.41)$$

Or  $U^0 \in [0, 1]^{N_x+1}$ , ce qui implique par récurrence sur  $k$  puis sur  $n$ , que toutes les solutions des systèmes (2.33)  $[U^{n+1}]^{(k+1)} = D_1^{-1} \left( [U^{n+1}]^{(k)} \right) [U^n] \in [0, 1]^{N_x+1}$ , c.à.d. satisfont le principe du maximum discret.

Pour le schéma semi-implicite, on a d'après la condition CFL (2.38) :

$$\left( 1 - \frac{\Delta t_n}{\Phi_i h_i} b_{i-\frac{1}{2}}^n \right) \geq 0$$

et par récurrence sur  $n$ , on a :

$$0 \leq u_i^n \leq 1 \text{ pour } i = 0, \dots, N_x$$

implique que

$$w_i^n = \left( u_i^n \left( 1 - \frac{\Delta t_n}{\Phi_i h_i} b_{i-\frac{1}{2}}^n \right) + u_{i-1}^n \frac{\Delta t_n}{\Phi_i h_i} b_{i-\frac{1}{2}}^n \right) \geq 0$$

et

$$\begin{aligned} w_i^n &= \left( u_i^n \left( 1 - \frac{\Delta t_n}{\Phi_i h_i} b_{i-\frac{1}{2}}^n \right) + u_{i-1}^n \frac{\Delta t_n}{\Phi_i h_i} b_{i-\frac{1}{2}}^n \right) \\ &\leq \left( \left( 1 - \frac{\Delta t_n}{\Phi_i h_i} b_{i-\frac{1}{2}}^n \right) + \frac{\Delta t_n}{\Phi_i h_i} b_{i-\frac{1}{2}}^n \right) = 1 \end{aligned}$$

c.à.d.  $W^n \in [0, 1]^{N_x+1}$ , ainsi toutes les solutions des systèmes (2.34)  $[U^{n+1}]^{(k+1)} = D_2^{-1} \left( [U^{n+1}]^{(k)} \right) [W^n] \in [0, 1]^{N_x+1}$ , c.à.d. satisfont le principe du maximum discret. Ceci termine la démonstration du lemme 2.7. ■

Maintenant on revient à l'existence et l'unicité de solution pour les schémas implicite (2.17) et semi-implicite (2.20).

**Proposition 2.8** *Sous les hypothèses (H1)-(H7), il existe une et une seule solution  $(u_i^n)$  pour le schéma implicite (2.17), de plus cette solution satisfait le principe du maximum discret suivant :*

$$0 \leq u_i^n \leq 1 \text{ pour } i = 1, \dots, N_x \text{ et } n = 1, \dots, N_\tau \quad (2.42)$$

*Les mêmes résultats sont valables pour le schéma semi-implicite (2.20) sous la condition CFL (2.38).*

**Démonstration.** Pour le schéma implicite (2.17), on a d'après le lemme 2.7 la suite  $\left([U^{n+1}]^{(k)}\right)_{k \in \mathbb{N}}$  est bornée, donc on peut extraire une sous-suite convergente, notée aussi  $\left([U^{n+1}]^{(k)}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ , telle que

$$U^{n+1} := \lim_{k \rightarrow \infty} [U^{n+1}]^{(k)} \in ([0, 1])^{N_x+1} \quad (2.43)$$

et d'après la continuité de l'application  $V \mapsto D_1(V)[V]$ , la limite  $U^{n+1}$  est une solution du système non linéaire  $D_1(V)[V] = U^n$  qui est équivalent à (2.17). On conclut alors l'existence d'une solution pour le schéma implicite (2.17).

Pour montrer l'unicité, on suppose  $U^{n+1}, V^{n+1}$  deux solutions du schéma implicite (2.17), c.à.d. qu'on a

pour  $i = 1, \dots, N_x$

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= u_i^n - \frac{\Delta t_n}{\Phi_i h_i} (b(u_i^{n+1}) - b(u_{i-1}^{n+1})) \\ &+ \frac{K_{i+\frac{1}{2}} \Delta t_n}{\Phi_i h_i \Delta x_i} (\alpha(u_{i+1}^{n+1}) - \alpha(u_i^{n+1})) - \frac{K_{i-\frac{1}{2}} \Delta t_n}{\Phi_i h_i \Delta x_{i-1}} (\alpha(u_i^{n+1}) - \alpha(u_{i-1}^{n+1})) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} v_i^{n+1} &= u_i^n - \frac{\Delta t_n}{\Phi_i h_i} (b(v_i^{n+1}) - b(v_{i-1}^{n+1})) \\ &+ \frac{K_{i+\frac{1}{2}} \Delta t_n}{\Phi_i h_i \Delta x_i} (\alpha(v_{i+1}^{n+1}) - \alpha(v_i^{n+1})) - \frac{K_{i-\frac{1}{2}} \Delta t_n}{\Phi_i h_i \Delta x_{i-1}} (\alpha(v_i^{n+1}) - \alpha(v_{i-1}^{n+1})). \end{aligned}$$

par soustraction, on obtient

$$\begin{aligned}
u_i^{n+1} - v_i^{n+1} &= -\frac{\Delta t_n}{\Phi_i h_i} (b(u_i^{n+1}) - b(v_i^{n+1}) - b(u_{i-1}^{n+1}) + b(v_{i-1}^{n+1})) \\
&\quad + \frac{K_{i+\frac{1}{2}} \Delta t_n}{\Phi_i h_i \Delta x_i} (\alpha(u_{i+1}^{n+1}) - \alpha(v_{i+1}^{n+1}) - \alpha(u_i^{n+1}) + \alpha(v_i^{n+1})) \\
&\quad - \frac{K_{i-\frac{1}{2}} \Delta t_n}{\Phi_i h_i \Delta x_{i-1}} (\alpha(u_i^{n+1}) - \alpha(v_i^{n+1}) - \alpha(u_{i-1}^{n+1}) + \alpha(v_{i-1}^{n+1}))
\end{aligned}$$

et par suite, on a pour  $i = 1, \dots, N_x$

$$\begin{aligned}
&(u_i^{n+1} - v_i^{n+1}) \left( 1 + \frac{b'_i \Delta t_n}{\Phi_i h_i} + \frac{K_{i+\frac{1}{2}} a_i \Delta t_n}{\Phi_i h_i \Delta x_i} + \frac{K_{i-\frac{1}{2}} a_i \Delta t_n}{\Phi_i h_i \Delta x_{i-1}} \right) \\
&- (u_{i-1}^{n+1} - v_{i-1}^{n+1}) \left( \frac{b'_{i-1} \Delta t_n}{\Phi_i h_i} + \frac{K_{i-\frac{1}{2}} a_{i-1} \Delta t_n}{\Phi_i h_i \Delta x_{i-1}} \right) - (u_{i+1}^{n+1} - v_{i+1}^{n+1}) \left( \frac{K_{i+\frac{1}{2}} a_{i+1} \Delta t_n}{\Phi_i h_i \Delta x_i} \right) = 0
\end{aligned} \tag{2.44}$$

où

$$\begin{aligned}
b'_i &:= \frac{b(u_i^{n+1}) - b(v_i^{n+1})}{u_i^{n+1} - v_i^{n+1}} & \text{et} & \quad a_i := \frac{\alpha(u_i^{n+1}) - \alpha(v_i^{n+1})}{u_i^{n+1} - v_i^{n+1}} & \text{si} & \quad u_i^{n+1} \neq v_i^{n+1} \\
b'_i &:= b'(u_i^{n+1}) & \text{et} & \quad a_i := a(u_i^{n+1}) & \text{si} & \quad u_i^{n+1} = v_i^{n+1}
\end{aligned}$$

avec  $a_0 := a_{N_x+1} := 0$ ,  $u_0^{n+1} := v_0^{n+1} := 1$  et  $u_{N_x+1}^{n+1} := v_{N_x+1}^{n+1} := 0$ .

Ce système d'équations peut s'écrire sous la forme suivante :

$$D(U^{n+1}, V^{n+1}) [U^{n+1} - V^{n+1}] = 0 \tag{2.45}$$

où  $D$  est une matrice  $N_x \times N_x$  tridiagonale dont les éléments non nuls s'écrivent sous la forme suivante :

pour  $i = 1, \dots, N_x$

$$\begin{aligned}
[D(U^{n+1}, V^{n+1})]_{i,i} &:= \frac{\Phi_i h_i}{\Delta t_n} + b'_i + \frac{K_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta x_i} a_i + \frac{K_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x_{i-1}} a_i \\
[D(U^{n+1}, V^{n+1})]_{i,i-1} &:= -b'_{i-1} - \frac{K_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x_{i-1}} a_{i-1} & i \geq 2 \\
[D(U^{n+1}, V^{n+1})]_{i,i+1} &:= -\frac{K_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta x_i} a_{i+1} & i \leq N_x - 1
\end{aligned} \tag{2.46}$$

D'après les hypothèses **(H3)**-**(H4)**, les coefficients  $b'_i$  et  $a_i^n$  sont tous positifs, ainsi il est facile de voir que la transposée de la matrice  $D$  est à **diagonale strictement dominante** donc inversible, et par suite on a l'unicité de la solution du schéma implicite (2.17). L'existence et l'unicité de la solution du schéma semi-implicite (2.20) s'obtiennent de la même manière. Ceci termine la démonstration de la proposition 2.8. ■

L'étape suivante est d'établir une estimation  $BV$ .

**Proposition 2.9** *Sous les hypothèses **(H1)**-**(H7)** et **(H9)**, l'approximation  $(u_i^n)$  donnée par le schéma implicite (2.17), est  $BV$  stable. Le même résultat est valable pour le schéma semi-implicite (2.20) sous la condition **CFL** (2.38).*

**Démonstration.** Pour le schéma implicite (2.17) on a :

Pour  $i = 1, \dots, N_x - 1$

$$\begin{aligned} & (u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}) \left( 1 + \frac{b'_{i+\frac{1}{2}} \Delta t_n}{\Phi_{i+1} h_{i+1}} + \frac{K_{i+\frac{1}{2}} a_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} \Delta t_n}{\Phi_{i+1} h_{i+1} \Delta x_i} + \frac{K_{i+\frac{1}{2}} a_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} \Delta t_n}{\Phi_i h_i \Delta x_i} \right) \\ &= (u_{i+1}^n - u_i^n) + (u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}) \left( \frac{b'_{i-\frac{1}{2}} \Delta t_n}{\Phi_i h_i} \right) \\ &+ (u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}) \left( \frac{K_{i-\frac{1}{2}} a_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} \Delta t_n}{\Phi_i h_i \Delta x_{i-1}} \right) + (u_{i+2}^{n+1} - u_{i+1}^{n+1}) \left( \frac{K_{i+\frac{3}{2}} a_{i+\frac{3}{2}}^{n+1} \Delta t_n}{\Phi_{i+1} h_{i+1} \Delta x_{i+1}} \right) \end{aligned}$$

en prolongeant la fonction  $u^n$  à l'extérieur de l'intervalle  $[0, 1]$ , par  $u^n|_{]-\infty, 0[} := 1$  et  $u^n|_{]1, +\infty[} := 0$ , on obtient :

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in \mathbb{Z}} |u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}| \left( 1 + \frac{b'_{i+\frac{1}{2}} \Delta t_n}{\Phi_{i+1} h_{i+1}} + \frac{K_{i+\frac{1}{2}} a_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} \Delta t_n}{\Phi_{i+1} h_{i+1} \Delta x_i} + \frac{K_{i+\frac{1}{2}} a_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} \Delta t_n}{\Phi_i h_i \Delta x_i} \right) \\ & \leq \sum_{i \in \mathbb{Z}} |u_{i+1}^n - u_i^n| + \sum_{i \in \mathbb{Z}} |u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}| \left( \frac{b'_{i+\frac{1}{2}} \Delta t_n}{\Phi_{i+1} h_{i+1}} \right) \\ & + \sum_{i \in \mathbb{Z}} |u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}| \left( \frac{K_{i+\frac{1}{2}} a_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} \Delta t_n}{\Phi_{i+1} h_{i+1} \Delta x_i} \right) + \sum_{i \in \mathbb{Z}} |u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}| \left( \frac{K_{i+\frac{1}{2}} a_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} \Delta t_n}{\Phi_i h_i \Delta x_i} \right) \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} |u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}| \leq \sum_{i \in \mathbb{Z}} |u_{i+1}^n - u_i^n|$$

ainsi on a l'estimation suivante :

$$\|u^{n+1}\|_{BV(I)} := \sum_{i=0, \dots, N_x} |u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}| \leq \sum_{i=0, \dots, N_x} |u_{i+1}^n - u_i^n| \leq \|u^0\|_{BV(I)} \quad (2.47)$$

Pour le schéma semi-implicite (2.20), on a :

pour  $i = 1, \dots, N_x - 1$

$$\begin{aligned} & (u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}) \left( 1 + \frac{K_{i+\frac{1}{2}} a_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} \Delta t_n}{\Phi_{i+1} h_{i+1} \Delta x_i} + \frac{K_{i+\frac{1}{2}} a_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} \Delta t_n}{\Phi_i h_i \Delta x_i} \right) \\ &= (u_{i+1}^n - u_i^n) \left( 1 - \frac{b'_{i+\frac{1}{2}} \Delta t_n}{\Phi_{i+1} h_{i+1}} \right) + (u_i^n - u_{i-1}^n) \left( \frac{b'_{i-\frac{1}{2}} \Delta t_n}{\Phi_i h_i} \right) \\ &+ (u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}) \left( \frac{K_{i-\frac{1}{2}} a_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} \Delta t_n}{\Phi_i h_i \Delta x_{i-1}} \right) + (u_{i+2}^{n+1} - u_{i+1}^{n+1}) \left( \frac{K_{i+\frac{3}{2}} a_{i+\frac{3}{2}}^{n+1} \Delta t_n}{\Phi_{i+1} h_{i+1} \Delta x_{i+1}} \right) \end{aligned}$$

en utilisant la condition CFL (2.38) et par prolongement de la fonction  $u^n$  à l'extérieur de l'intervalle  $[0, 1]$ , par  $u^n|_{]-\infty, 0[} := 1$  et  $u^n|_{]1, +\infty[} := 0$ , on obtient :

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in \mathbb{Z}} |u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}| \left( 1 + \frac{K_{i+\frac{1}{2}} a_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} \Delta t_n}{\Phi_{i+1} h_{i+1} \Delta x_i} + \frac{K_{i+\frac{1}{2}} a_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} \Delta t_n}{\Phi_i h_i \Delta x_i} \right) \\ & \leq \sum_{i \in \mathbb{Z}} |u_{i+1}^n - u_i^n| \left( 1 - \frac{b'_{i+\frac{1}{2}} \Delta t_n}{\Phi_{i+1} h_{i+1}} \right) + \sum_{i \in \mathbb{Z}} |u_{i+1}^n - u_i^n| \left( \frac{b'_{i+\frac{1}{2}} \Delta t_n}{\Phi_{i+1} h_{i+1}} \right) \\ & + \sum_{i \in \mathbb{Z}} |u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}| \left( \frac{K_{i+\frac{1}{2}} a_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} \Delta t_n}{\Phi_{i+1} h_{i+1} \Delta x_i} \right) + \sum_{i \in \mathbb{Z}} |u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}| \left( \frac{K_{i+\frac{1}{2}} a_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} \Delta t_n}{\Phi_i h_i \Delta x_i} \right) \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} |u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}| \leq \sum_{i \in \mathbb{Z}} |u_{i+1}^n - u_i^n|$$

ainsi on a l'estimation suivante :

$$\|u^{n+1}\|_{BV(I)} := \sum_{i=0, \dots, N_x} |u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}| \leq \sum_{i=0, \dots, N_x} |u_{i+1}^n - u_i^n| \leq \|u^0\|_{BV(I)} \quad (2.48)$$

Ceci termine la démonstration de la proposition 2.9. ■

## 2.5 Résultat de convergence

Dans cette section, on présente un résultat de convergence des schémas volumes finis introduits précédemment. Pour cela, on a besoin du lemme suivant :

**Lemme 2.10** *Sous les hypothèses (H1)-(H9) et la condition CFL (2.27) pour le schéma explicite (2.14), la condition CFL (2.38) pour le schéma semi-implicite (2.20), et sans aucune condition CFL pour le schéma implicite (2.17), l'estimation suivante est vérifiée : pour  $n = 0, \dots, N_\tau - 1$*

$$\|u^{n+1} - u^n\|_{L^1(I)} := \sum_{i=1, \dots, N_x} h_i |u_i^{n+1} - u_i^n| \leq C \Delta t \quad (2.49)$$

où  $C \left( \frac{1}{\Phi_-}, \sup(b'), \|u^0\|_{BV(I)}, \|K\alpha(u^0)_x\|_{BV(I)} \right)$  est une constante indépendante de  $h$  et  $\Delta t$ .

**Démonstration.** Pour simplifier, on présentera simplement la démonstration pour le schéma explicite, les mêmes résultats s'obtiennent de la même manière pour les schémas implicite et semi-implicite. Cette démonstration est analogue à celle des travaux de **Evje & Karlsen** [EVK99, EVK00], une autre idée de la démonstration se trouve dans **Ghilani** [GHI97].

En multipliant (2.14) par  $\frac{\Phi_i h_i}{\Delta t_n}$  et en sommant pour  $j \leq i$ , on obtient

pour  $i = 1, \dots, N_x$

$$w_i^n := \sum_{j \leq i} \Phi_j h_j \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t_n} = b(1) - b(u_i^n) + \frac{K_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta x_i} (\alpha(u_{i+1}^n) - \alpha(u_i^n)) \quad (2.50)$$

et on pose  $w_0^n := 0$  et  $w_{N_x+1}^n := b(1)$ , de plus on a

$$w_i^n - w_{i-1}^n = \Phi_i h_i \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t_n}$$

et

$$\begin{aligned} w_i^{n+1} &= w_i^n - b(u_i^{n+1}) + b(u_i^n) \\ &\quad + \frac{K_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta x_i} (\alpha(u_{i+1}^{n+1}) - \alpha(u_i^{n+1})) - \frac{K_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta x_i} (\alpha(u_{i+1}^n) - \alpha(u_i^n)) \\ &= w_i^n - b_i'^{n+\frac{1}{2}} (u_i^{n+1} - u_i^n) \\ &\quad + \frac{K_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta x_i} \left( a_{i+1}^{n+\frac{1}{2}} (u_{i+1}^{n+1} - u_{i+1}^n) - a_i^{n+\frac{1}{2}} (u_i^{n+1} - u_i^n) \right) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} b_i^{m+\frac{1}{2}} &:= \frac{b(u_i^{n+1}) - b(u_i^n)}{u_i^{n+1} - u_i^n} & \text{et} & \quad a_i^{n+\frac{1}{2}} := \frac{\alpha(u_i^{n+1}) - \alpha(u_i^n)}{u_i^{n+1} - u_i^n} & \text{si} & \quad u_i^{n+1} \neq u_i^n \\ b_i^{m+\frac{1}{2}} &:= b'(u_i^n) & \text{et} & \quad a_i^{n+\frac{1}{2}} := a(u_i^n) & \text{si} & \quad u_i^{n+1} = u_i^n \end{aligned}$$

avec  $a_{N_x+1}^{n+\frac{1}{2}} := 0$ , d'où

$$\begin{aligned} w_i^{n+1} &= w_i^n - \frac{\Delta t_n b_i'^{n+\frac{1}{2}}}{\Phi_i h_i} (w_i^n - w_{i-1}^n) \\ &\quad + \frac{\Delta t_n K_{i+\frac{1}{2}} a_{i+1}^{n+\frac{1}{2}}}{\Phi_{i+1} h_{i+1} \Delta x_i} (w_{i+1}^n - w_i^n) - \frac{\Delta t_n K_{i+\frac{1}{2}} a_i^{n+\frac{1}{2}}}{\Phi_i h_i \Delta x_i} (w_i^n - w_{i-1}^n) \end{aligned}$$

ainsi on a

$$\begin{aligned}
w_{i+1}^{n+1} - w_i^{n+1} &= \\
& (w_{i+1}^n - w_i^n) \left( 1 - \frac{\Delta t_n b_{i+1}'^{n+\frac{1}{2}}}{\Phi_{i+1} h_{i+1}} - \frac{\Delta t_n K_{i+\frac{1}{2}} a_{i+1}^{n+\frac{1}{2}}}{\Phi_{i+1} h_{i+1} \Delta x_i} - \frac{\Delta t_n K_{i+\frac{3}{2}} a_{i+1}^{n+\frac{1}{2}}}{\Phi_{i+1} h_{i+1} \Delta x_{i+1}} \right) \\
& + (w_i^n - w_{i-1}^n) \left( \frac{\Delta t_n b_i'^{n+\frac{1}{2}}}{\Phi_i h_i} + \frac{\Delta t_n K_{i+\frac{1}{2}} a_i^{n+\frac{1}{2}}}{\Phi_i h_i \Delta x_i} \right) \\
& + (w_{i+2}^n - w_{i+1}^n) \left( \frac{\Delta t_n K_{i+\frac{3}{2}} a_{i+2}^{n+\frac{1}{2}}}{\Phi_{i+2} h_{i+2} \Delta x_{i+1}} \right)
\end{aligned}$$

en utilisant la condition CFL (2.27) et en prolongeant la fonction  $w^n$  à l'extérieur de l'intervalle  $[0, 1]$ , par  $w^n|_{]-\infty, 0[} := 0$  et  $w^n|_{]1, +\infty[} := b(1)$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
& \sum_{i \in \mathbb{Z}} |w_{i+1}^{n+1} - w_i^{n+1}| \\
& \leq \sum_{i \in \mathbb{Z}} |w_{i+1}^n - w_i^n| \left( 1 - \frac{\Delta t_n b_{i+1}'^{n+\frac{1}{2}}}{\Phi_{i+1} h_{i+1}} - \frac{\Delta t_n K_{i+\frac{1}{2}} a_{i+1}^{n+\frac{1}{2}}}{\Phi_{i+1} h_{i+1} \Delta x_i} - \frac{\Delta t_n K_{i+\frac{3}{2}} a_{i+1}^{n+\frac{1}{2}}}{\Phi_{i+1} h_{i+1} \Delta x_{i+1}} \right) \\
& + \sum_{i \in \mathbb{Z}} |w_i^n - w_{i-1}^n| \left( \frac{\Delta t_n b_i'^{n+\frac{1}{2}}}{\Phi_i h_i} + \frac{\Delta t_n K_{i+\frac{1}{2}} a_i^{n+\frac{1}{2}}}{\Phi_i h_i \Delta x_i} \right) \\
& + \sum_{i \in \mathbb{Z}} |w_{i+2}^n - w_{i+1}^n| \left( \frac{\Delta t_n K_{i+\frac{3}{2}} a_{i+2}^{n+\frac{1}{2}}}{\Phi_{i+2} h_{i+2} \Delta x_{i+1}} \right)
\end{aligned}$$

soit

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} |w_{i+1}^{n+1} - w_i^{n+1}| \leq \sum_{i \in \mathbb{Z}} |w_{i+1}^n - w_i^n|$$

et par suite

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \Phi_i h_i \frac{|u_i^{n+1} - u_i^n|}{\Delta t_n} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} |w_{i+1}^{n+1} - w_i^{n+1}| \text{ est décroissante.}$$

Finalement d'après les hypothèses **(H7)** et **(H8)**, on a :

$$\begin{aligned}
& \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Phi_i h_i \frac{|u_i^{n+1} - u_i^n|}{\Delta t_n} \leq \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Phi_i h_i \frac{|u_i^1 - u_i^0|}{\Delta t_n} \\
& = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left| b(u_{i-1}^0) - b(u_i^0) + K_{i+\frac{1}{2}} \frac{\alpha(u_{i+1}^0) - \alpha(u_i^0)}{\Delta x_i} - K_{i-\frac{1}{2}} \frac{\alpha(u_i^0) - \alpha(u_{i-1}^0)}{\Delta x_{i-1}} \right| \\
& \leq \sup(b') \|u^0\|_{BV(I)} + \|K\alpha(u^0)_x\|_{BV(I)}
\end{aligned}$$

soit

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} h_i \frac{|u_i^{n+1} - u_i^n|}{\Delta t_n} \leq C$$

où

$$C := \frac{1}{\Phi_-} \left( \sup(b') \|u^0\|_{BV(I)} + \|K\alpha(u^0)_x\|_{BV(I)} \right) < \infty \quad (2.51)$$

Ceci complète la démonstration du lemme 2.10. ■

**Remarque 2.11** *Le lemme 2.10 exprime la  $L^1$  continuité en temps de la solution approchée.*

**Corollaire 2.12** *Sous les mêmes hypothèses du lemme 2.10, on a de plus les estimations discrètes suivantes : pour  $n = 1, \dots, N_\tau$*

$$\|K\alpha(u^n)_x\|_{BV(I)} := \sum_{i=1, \dots, N_x} \left| K_{i+\frac{1}{2}} \frac{\alpha(u_{i+1}^n) - \alpha(u_i^n)}{\Delta x_i} - K_{i-\frac{1}{2}} \frac{\alpha(u_i^n) - \alpha(u_{i-1}^n)}{\Delta x_{i-1}} \right| \leq C \quad (2.52)$$

et

$$\|K\alpha(u^n)_x\|_{L^\infty(I)} := \sup_{i=1, \dots, N_x} \left| K_{i+\frac{1}{2}} \frac{\alpha(u_{i+1}^n) - \alpha(u_i^n)}{\Delta x_i} \right| \leq C \quad (2.53)$$

**Démonstration.** En effet on a :

$$\begin{aligned}
 \|K\alpha(u^n)_x\|_{BV(I)} &:= \sum_{i=1,\dots,N_x} \left| K_{i+\frac{1}{2}} \frac{\alpha(u_{i+1}^n) - \alpha(u_i^n)}{\Delta x_i} - K_{i-\frac{1}{2}} \frac{\alpha(u_i^n) - \alpha(u_{i-1}^n)}{\Delta x_{i-1}} \right| \\
 &\leq \sum_{i=1,\dots,N_x} |w_i^n - w_{i-1}^n| + \sum_{i=1,\dots,N_x} |b(u_{i-1}^n) - b(u_i^n)| \\
 &\leq \sum_{i=1,\dots,N_x} |w_i^0 - w_{i-1}^0| + \sup(b') \|u^n\|_{BV(I)} \\
 &\leq 2 \sup(b') \|u^0\|_{BV(I)} + \|K\alpha(u^0)_x\|_{BV(I)}
 \end{aligned}$$

soit, d'après l'hypothèse **(H8)**

$$\|K\alpha(u^n)_x\|_{BV(I)} \leq C \quad (2.54)$$

où

$$C := 2 \sup(b') \|u^0\|_{BV(I)} + \|K\alpha(u^0)_x\|_{BV(I)} < \infty$$

et

$$\begin{aligned}
 \|K\alpha(u^n)_x\|_{L^\infty(I)} &:= \sup_{i=1,\dots,N_x} \left| K_{i+\frac{1}{2}} \frac{\alpha(u_{i+1}^n) - \alpha(u_i^n)}{\Delta x_i} \right| \\
 &\leq \sup_{i=1,\dots,N_x} \left( |b(u_i^n) - b(1)| + \sum_{j \leq i} \Phi_j h_j \frac{|u_j^{n+1} - u_j^n|}{\Delta t_n} \right) \\
 &\leq \sup(b') \|u^0 - 1\|_{L^\infty(I)} + \sup(b') \|u^0\|_{BV(I)} + \|K\alpha(u^0)_x\|_{BV(I)}
 \end{aligned}$$

soit, d'après l'hypothèse **(H8)**

$$\|K\alpha(u^n)_x\|_{L^\infty(I)} \leq C$$

où

$$C := \sup(b') \left( \|u^0 - 1\|_{L^\infty(I)} + \|u^0\|_{BV(I)} \right) + \|K\alpha(u^0)_x\|_{BV(I)} < \infty \quad (2.55)$$

Ce qui donne les estimations cherchées. ■

Maintenant, on va montrer le résultat essentiel de cette section. On note par  $u$  la solution faible du problème définie par (1.40) et on définit l'approximation  $u_h$  par  $u_h(x, t) = u_i^n$  dans  $I_i \times [t_n, t_{n+1}[$ .

**Théorème 2.13** *Sous les hypothèses (H1)-(H9) et la condition CFL (2.27) [resp. (2.38)] l'approximation  $u_h$ , donnée par le schéma explicite (2.14) [resp. semi-implicite (2.20)], converge vers  $u$  dans  $L^1(Q_\tau)$  quand  $h$  et  $\Delta t$  tendent vers zéro. Ce résultat est aussi valable pour le schéma implicite (2.17) sans aucune condition CFL.*

**Démonstration.** Pour montrer la convergence de  $u_h = u_h(x, t)$  vers la solution faible définie par (1.40), on passe à la limite dans l'équation discrète.

Des propositions 2.6, 2.8, 2.9 et du lemme 2.10 ( $u_h$ ) est bornée dans  $L^\infty(Q_\tau) \cap BV(Q_\tau) \subset L^1(Q_\tau)$  avec **injection compacte**. On peut ainsi extraire une sous-suite encore notée ( $u_h$ ), telle que

$$u_h \longrightarrow u^* \quad \text{dans } L^1(Q_\tau) \quad (2.56)$$

quand  $h$  et  $\Delta t$  tendent vers 0, où la limite  $u^* \in L^\infty(Q_\tau) \cap BV(Q_\tau)$  (voir **Evans & Gariépy** [EVG92] p. 176).

Soit  $\alpha_h(u) \in L^\infty(0, \tau; C^0(\bar{I}))$  définie par :  $\alpha_h(u)(x_i, t) := \alpha(u_i^n)$  pour tout  $t \in [t_n, t_{n+1}[$  et  $\alpha_h(u)(\cdot, t) \in \mathcal{P}_1$  sur  $I_{i+\frac{1}{2}}$ . Il est facile d'obtenir de (2.53) et de l'hypothèse (H2), l'estimation suivante :

pour tout  $t \in [0, \tau[$

$$\|(\alpha_h(u))_x\|_{L^\infty(I)} \leq C \quad (2.57)$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $h$  et  $\Delta t$ . Ainsi de l'**injection continue** de  $W^{1,\infty}(I)$  dans  $H^1(I)$  on a :

$$\alpha_h(u) \rightharpoonup \alpha^* \quad \text{dans } H^1(I) \text{ — faiblement}$$

pour tout  $t \in [0, \tau[$  et en utilisant l'injection compacte  $W^{1,\infty}(I) \hookrightarrow \mathcal{C}^0(\bar{I})$  on a :

$$\alpha_h(u) \longrightarrow \alpha^* \quad \text{dans } \mathcal{C}^0(\bar{I}) \quad (2.58)$$

où  $\alpha^* \in H^1(I)$  et de (2.58)  $\alpha^*$  satisfait les conditions au bord.

L'étape suivante est de montrer que  $\alpha^* = \alpha(u^*)$ . Utilisons l'hypothèse **(H3)**, il vient de (2.56) que :

pour tout  $t \in [0, \tau[$

$$\alpha(u_h) \longrightarrow \alpha(u^*) \quad \text{dans } L^1(I) \quad (2.59)$$

et du fait que  $\alpha(u_h) \in BV(I)$  on a :

$$\begin{aligned} & \int_I |\alpha(u_h) - \alpha_h(u)| dx \\ & \leq \sum_{i=1, \dots, N_x-1} \Delta x_i |\alpha(u_{i+1}^n) - \alpha(u_i^n)| \\ & \leq \frac{1}{\beta} h \|\alpha(u^n)\|_{BV(I)} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

et par suite

$$|\alpha(u_h) - \alpha_h(u)| \longrightarrow 0 \quad \text{dans } L^1(I) \quad (2.60)$$

on en déduit maintenant de (2.58)-(2.60) que  $\alpha^* = \alpha(u^*)$ .

A ce stade, on conclut que  $u^*$  vérifie (1.40)-(i), (ii), il reste à montrer que  $u^*$  satisfait (1.40)-(iii). Pour cela, soit  $v \in V$  une fonction test, notons par  $v_i^n := v(x_{i-\frac{1}{2}}, t_n)$ . En multipliant les schémas (2.14), (2.17) et (2.20) par  $h_i v_i^n \Phi_i$ , et en sommant sur  $n$  et  $i$ , on obtient :

$$\begin{aligned} & \sum_{n,i} \Delta t_n h_i v_i^n \Phi_i \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t_n} + \sum_{n,i} \Delta t_n v_i^n (b(u_i^s) - b(u_{i-1}^s)) \\ & = \sum_{n,i} \Delta t_n v_i^n \left[ K_{i+\frac{1}{2}} \frac{\alpha(u_{i+1}^k) - \alpha(u_i^k)}{\Delta x_i} - K_{i-\frac{1}{2}} \frac{\alpha(u_i^k) - \alpha(u_{i-1}^k)}{\Delta x_{i-1}} \right] \end{aligned} \quad (2.61)$$

où ( $k, s = n$  ou  $n+1$ ) suivant les schémas explicite, implicite et semi-implicite.

On transforme cette sommation (2.61) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
& - \sum_i h_i v_i^0 u_i^0 \Phi_i + \sum_{n,i} \Delta t_n h_i u_i^{n+1} \Phi_i \frac{v_i^n - v_i^{n+1}}{\Delta t_n} \\
& = \sum_{n,i} \Delta t_n h_i b(u_i^n) \frac{v_{i+1}^n - v_i^n}{h_i} + \sum_{n,i} \Delta t_n K_{i+\frac{1}{2}} \frac{\alpha(u_{i+1}^k) - \alpha(u_i^k)}{\Delta x_i} (v_i^n - v_{i+1}^n)
\end{aligned} \tag{2.62}$$

En prenant en considération les hypothèses sur les données et utilisons le théorème de Lebesgue, quand  $h$  et  $\Delta t$  tendent vers 0, il s'en suit que

$$\begin{aligned}
& - \sum_i h_i v_i^0 u_i^0 \Phi_i \longrightarrow - \int_I \Phi u^0 v(x, 0) dx \\
& \sum_{i,n} \Delta t h_i u_i^{n+1} \Phi_i \frac{v_i^n - v_i^{n+1}}{\Delta t_n} \longrightarrow - \int \int_{Q_\tau} \Phi u^* v_t dt dx \\
& \sum_{n,i} \Delta t h_i b(u_i^n) \frac{v_{i+1}^n - v_i^n}{h_i} \longrightarrow \int \int_{Q_\tau} b(u^*) v_x dt dx \\
& \sum_{n,i} \Delta t K_{i+\frac{1}{2}} \frac{\alpha(u_{i+1}^k) - \alpha(u_i^k)}{\Delta x_i} (v_i^n - v_{i+1}^n) \longrightarrow - \int \int_{Q_\tau} (K(x) \alpha(u^*)_x) v_x dt dx
\end{aligned}$$

Finalement, passons à la limite dans (2.62) il vient que

$$\int_I \Phi u^0 v(x, 0) dx + \int \int_{Q_\tau} [\Phi u^* v_t + (b(u^*) - K \alpha(u^*)_x) v_x] dt dx = 0 \tag{2.63}$$

D'où  $u^*$  est la solution faible du problème (1.40) lequel admet une unique solution  $u$ . Donc toute la suite  $(u_h)$  converge vers  $u$ . ■

## 2.6 Conclusion

Le but de ce chapitre était de développer des schémas volumes finis pour une équation non linéaire mono-dimensionnelle de convection-diffusion dégénérée. Nous avons traité et analysé trois familles de tels schémas. Après avoir établi que les schémas sont  $L^\infty$  et  $BV$  stables, sous les conditions CFL appropriées et satisfont le principe du maximum discret, nous avons obtenu des résultats de convergence vers la solution faible du problème.



# Chapitre 3

## Convergence dans le cas bi-dimensionnel pour un maillage rectangulaire

### 3.1 Introduction

On considère dans ce chapitre la discrétisation par des volumes finis rectangulaire, dans  $\mathbb{R}^2$  de l'équation de saturation décrivant l'écoulement de deux phases liquides incompressibles et immiscibles dans un milieu poreux, pour lequel, nous nous limitons au cas où les équations de saturation et de pression se découplent (voir chapitre 1, (1.38) et (1.39)), l'équation de saturation est à convection dominante, le terme de diffusion est petit mais important et ne peut être négligé, le problème est alors décrit par :

$$(P_2) \begin{cases} 0 \leq u(x, y, t) \leq 1 & \text{dans } Q_\tau \\ \Phi \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(b(u)\vec{q}) - \operatorname{div}(K\nabla\alpha(u)) = 0 & \text{dans } Q_\tau \\ u|_{\Gamma_1} = u_0 ; K\nabla\alpha(u) \cdot \vec{n}|_{\Gamma_2} = 0 \text{ et } u|_{\Gamma_3} = 0 & \text{sur } [0, \tau[ \\ u(x, y, 0) = u^0(x, y) & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $u(x, y, t)$  est la saturation de l'eau,  $\vec{q}(x, y)$  la vitesse totale,  $\Phi(x, y)$  la porosité du milieu poreux et  $K(x, y)$  le tenseur des perméabilités absolues du réservoir.  $\Omega := I \times J \subset \mathbb{R}^2$  où  $I$  et  $J$  sont des intervalles bornés de  $\mathbb{R}$ . La frontière  $\Gamma := \partial\Omega$

est formée de trois parties telle que  $\Gamma = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2 \cup \bar{\Gamma}_3$  avec  $|\Gamma_i| > 0$  et  $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$  pour  $i \neq j$ ;  $\Gamma_1$  est la partie du bord où l'eau est injectée,  $\Gamma_2$  la partie imperméable et  $\Gamma_3$  la partie de production. Soit  $[0, \tau[$  l'intervalle du temps d'étude, on note  $Q_\tau := \Omega \times [0, \tau[$ .  $\alpha(u)$  et  $b(u)$  sont des fonctions non linéaires qui dépendent de la mobilité et de la pression capillaire, avec le coefficient de diffusion  $a := \alpha'$  vérifiant :  $a(0) = a(1) = 0$  (dégénérescence du terme de diffusion).  $u_0 \in \{0, 1\}$ .

Ce chapitre est organisé comme suit : dans la section 3.2, on introduit les hypothèses sur les données du problème ( $P_2$ ), qui assurent l'existence et l'unicité de la solution faible. Dans la section 3.3, nous présentons la discrétisation volumes finis du problème ( $P_2$ ) en utilisant un maillage rectangulaire. Une approximation explicite du terme de convection combinée avec une approximation explicite [resp. implicite] du terme de diffusion est considérée. Dans la section 3.4, nous présentons des résultats de stabilité  $L^\infty$  et estimation  $BV$  sous les conditions CFL appropriées. Un résultat de convergence sera donné dans la section 3.5. Les résultats de ce chapitre, généralisent ceux du chapitre 2 au cas bi-dimensionnel et ont fait l'objet de la publication [AFI99].

## 3.2 Hypothèses sur les données

Par la suite, on introduit les hypothèses suivantes, qui sont suffisantes pour l'existence et l'unicité d'une solution faible du problème (voir proposition 1.3), plus des hypothèses supplémentaires pour la convergence des schémas numériques :

**(H0)**  $\Omega := I \times J \subset \mathbb{R}^2$  est borné.

**(H1)**  $\Phi \in L^\infty(\Omega)$  telle que  $0 < \Phi_- \leq \Phi(x, y) \leq \Phi^+ \leq 1$ , p.p. dans  $\Omega$ .

**(H2)**  $K$  est un tenseur diagonal de la forme  $K(x, y) = \begin{pmatrix} K^1(x, y) & 0 \\ 0 & K^2(x, y) \end{pmatrix}$ , telle que  $0 < K_- \leq K^s(x, y) \leq K^+ < \infty$  pour  $s = 1, 2$ , p.p. dans  $\Omega$ .

**(H3)**  $\alpha \in \mathcal{C}^1([0, 1])$  tel que pour  $a := \alpha'$ ,  $a(0) = a(1) = 0$  et  $a(s) > 0 \forall s \in ]0, 1[$ .

**(H4)**  $b \in \mathcal{C}^1([0, 1])$  est une fonction monotone telle que  $b'(s) > 0 \forall s \in ]0, 1[$ .

- (H5)  $u^0 \in L^\infty(\Omega)$  tel que  $0 \leq u^0(x) \leq 1$  p.p. dans  $\Omega$ .
- (H6)  $\vec{q} \in H(\operatorname{div}, \Omega)$ , telle que  $\operatorname{div}(\vec{q}) = 0$ ,  $\vec{q} \cdot \vec{n}|_{\Gamma_1} = -q_d < 0$ ,  $\vec{q} \cdot \vec{n}|_{\Gamma_2} = 0$  et  $\vec{q} \cdot \vec{n}|_{\Gamma_3} > 0$ .
- (H7)  $\vec{q} \in (L^\infty(\Omega))^2$ .
- (H8)  $\alpha^{-1}$  est une fonction continue hölderienne d'exposant  $\theta \in ]0, 1[$  et  $b \circ \alpha^{-1}$  une fonction continue hölderienne d'exposant  $\frac{1+\theta}{2}$ .
- (H9)  $u^0 \in \overline{BV}(\Omega)$ .
- (H10)  $K \nabla \alpha(u^0) \in \mathcal{B}(I \times J) := L^1(J; \overline{BV}(I)) \times L^1(I; \overline{BV}(J))$ .

Dans l'hypothèse (H2),  $K$  est un tenseur diagonal, cette restriction est due au maillage rectangulaire choisi, vu que l'approche qu'on présente ici est une généralisation des résultats obtenus dans le chapitre 2. De même dans les hypothèses (H6)-(H7)  $\vec{q}$  est indépendant du temps, cas où les équations se découpent voir (1.38).

### 3.3 Discrétisation par volumes finis

Avant de présenter la discrétisation par volumes finis pour le problème ( $P_2$ ) on donne quelques notations.

#### 3.3.1 Notations

- $(t_n)_{n=0, \dots, N_\tau}$  une partition de  $[0, \tau[$  en des intervalles de pas de temps  $\Delta t_n := t_{n+1} - t_n$  et on pose  $\Delta t := \max_n \Delta t_n$ .
- $\Sigma_h := (M_{ij})$  une partition rectangulaire de  $\bar{\Omega}$ , où  $M_{ij} := I_i \times J_j$ , pour  $i = 1, \dots, N_x$  et  $j = 1, \dots, N_y$  (voir Figure 3.1), appelée aussi **volume de contrôle**.
- $x_{M_{ij}} := (x_i, y_j)$ , centre de  $M_{ij}$ .

- On pose  $\Delta x_i := |I_i|$ ,  $\Delta y_j := |J_j|$ ,  $\Delta x_{i+\frac{1}{2}} := x_{i+1} - x_i$  et  $\Delta y_{j+\frac{1}{2}} := y_{j+1} - y_j$ .
- $h := \min_{ij} (\Delta x_i, \Delta y_j)$ ,  $\Delta x := \max_i \Delta x_i$  et  $\Delta y := \max_j \Delta y_j$ .
- $\mathcal{L}_h := \{l \in \partial M_{ij} \setminus \Gamma, \text{ pour } M_{ij} \in \Sigma_h\}$ ,  $M_l \in \Sigma_h$  tel que  $M \cap M_l = l$ .
- $\delta_{M,l} := \delta(x_M, x_{M_l})$  est la distance euclidienne entre  $x_M$  et  $x_{M_l}$ .
- Pour  $\Phi \in L^\infty(\Omega)$ , on pose  $\Phi_{ij} := \frac{1}{|M_{ij}|} \iint_{M_{ij}} \Phi(x, y) dx dy$ .
- Pour des raisons de simplicité, on suppose les fonctions  $K^s(x, y)$  constantes par maille et on pose  $K_{ij}^s := K^s|_{M_{ij}}$  pour  $s = 1, 2$ .
- Pour une condition initiale  $u^0 \in L^\infty(\Omega)$ , on pose  $u_{ij}^0 := \frac{1}{|M_{ij}|} \iint_{M_{ij}} u^0(x, y) dx dy$ .
- Soit  $u_{ij}^n$  [resp.  $u_l^n$ ] une approximation de  $u$  au point  $(x_i, y_j, t_n)$  supposée constante sur la maille  $M_{ij}$  [resp. au point  $(x_l, t_n)$  supposée constante sur  $l \in \partial M$ ].

Ces approximations seront définies par les schémas numériques qui suivent. On aura besoin aussi de l'hypothèse sur la **régularité du maillage** :

(H11)  $\exists \beta \in ]0, 1]$ , tel que  $\beta \max(\Delta x, \Delta y) \leq h$ , où  $\beta$  est une constante indépendante de  $h$ .

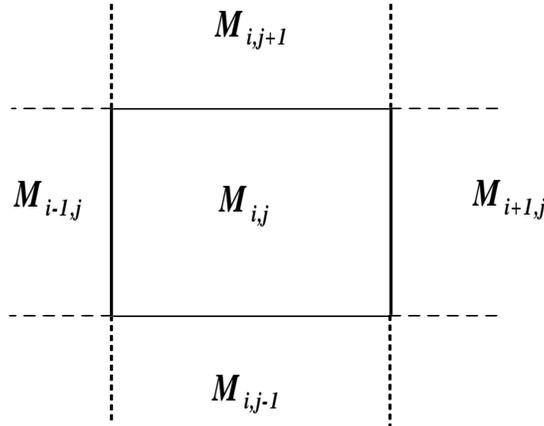


Fig. 3.1: Volume de contrôle  $M_{ij}$

### 3.3.2 Définitions

En intégrant (3.1) dans  $M_{ij} \times [t_n, t_{n+1}]$  où  $M_{ij} \in \Sigma_h$ , on obtient le schéma suivant

$$\begin{aligned} & \Phi_{ij} (u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^n) |M_{ij}| + \sum_{l \in \partial M_{ij}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} b(u)_l (\vec{q}_l \cdot \vec{n}_{M_{ij},l}) |l| dt \\ &= \sum_{l \in \partial M_{ij} \setminus \Gamma} \int_{t_n}^{t_{n+1}} K_l \nabla \alpha(u)_l \cdot \vec{n}_{M_{ij},l} |l| dt \end{aligned} \quad (3.2)$$

où  $\vec{n}_{M,l}$  est la normale extérieure à  $l \in \partial M$ .

Le schéma précédent peut s'écrire sous la forme suivante :

pour  $i = 1, \dots, N_x, j = 1, \dots, N_y$

$$\begin{aligned} u_{ij}^{n+1} &= u_{ij}^n + \frac{\Delta t_n}{\Phi_{ij} |M_{ij}|} \left( F_{i+\frac{1}{2}j}^- + F_{i-\frac{1}{2}j}^+ + F_{ij+\frac{1}{2}}^- + F_{ij-\frac{1}{2}}^+ \right) \\ &+ \frac{\Delta t_n}{\Phi_{ij} |M_{ij}|} \left( G_{i+\frac{1}{2}j}^- + G_{i-\frac{1}{2}j}^+ + G_{ij+\frac{1}{2}}^- + G_{ij-\frac{1}{2}}^+ \right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

où  $F_{i+\frac{1}{2}j}^\pm$  et  $G_{i+\frac{1}{2}j}^\pm$  sont respectivement le **flux de convection** et le **flux de diffusion**, à droite et à gauche de l'arête  $l = M_{i+1j} \cap M_{ij}$ , définis par

pour  $i = 1, \dots, N_x, j = 1, \dots, N_y$

$$\begin{aligned} F_{i+\frac{1}{2}j}^+ &:= -\frac{qx_{i+\frac{1}{2}j} \Delta y_j}{\Delta t_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} b(u)_{i+\frac{1}{2}j} dt \\ F_{i+\frac{1}{2}j}^- &:= +\frac{qx_{i+\frac{1}{2}j} \Delta y_j}{\Delta t_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} b(u)_{i+\frac{1}{2}j} dt \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} G_{i+\frac{1}{2}j}^+ &:= \frac{K_{i+\frac{1}{2}j}^1 \Delta y_j}{\Delta t_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \nabla \alpha(u)_{i+\frac{1}{2}j} dt \\ G_{i+\frac{1}{2}j}^- &:= -\frac{K_{i+\frac{1}{2}j}^1 \Delta y_j}{\Delta t_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \nabla \alpha(u)_{i+\frac{1}{2}j} dt \end{aligned}$$

$F_{ij+\frac{1}{2}}^\pm$  et  $G_{ij+\frac{1}{2}}^\pm$  sont respectivement le flux de convection et le flux de diffusion, en haut et en bas de l'arête  $l = M_{ij+1} \cap M_{ij}$ , définis par

pour  $i = 1, \dots, N_x, j = 1, \dots, N_y$

$$F_{ij+\frac{1}{2}}^+ := -\frac{qy_{ij+\frac{1}{2}}\Delta x_i}{\Delta t_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} b(u)_{ij+\frac{1}{2}} dt$$

$$F_{ij+\frac{1}{2}}^- := \frac{qy_{ij+\frac{1}{2}}\Delta x_i}{\Delta t_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} b(u)_{ij+\frac{1}{2}} dt$$

et

$$G_{ij+\frac{1}{2}}^+ := \frac{K_{ij+\frac{1}{2}}^2\Delta x_i}{\Delta t_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \nabla\alpha(u)_{ij+\frac{1}{2}} dt$$

$$G_{ij+\frac{1}{2}}^- := -\frac{K_{ij+\frac{1}{2}}^2\Delta x_i}{\Delta t_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \nabla\alpha(u)_{ij+\frac{1}{2}} dt$$

où  $(qx, qy)$  sont les composantes de  $\vec{q}$ . On pose

pour  $i = 1, \dots, N_x, j = 1, \dots, N_y$

$$F_l^\pm = F_{i+\frac{1}{2}j}^\pm \text{ et } G_l^\pm = G_{i+\frac{1}{2}j}^\pm \text{ si } l = M_{i+1j} \cap M_{ij}$$

$$F_l^\pm = F_{ij+\frac{1}{2}}^\pm \text{ et } G_l^\pm = G_{ij+\frac{1}{2}}^\pm \text{ si } l = M_{ij+1} \cap M_{ij}$$

Soient  $F_l^*(u_M, u_{M_l})$  et  $G_l^*(u_M, u_{M_l})$  des approximations à deux points respectivement de  $F_l$  et  $G_l$ , appelées aussi **flux numériques**.

La conservation des flux numériques est caractérisée par l'égalité entre le flux entrant et le flux sortant à travers une interface  $l \in \partial M$  [EGH00, KRO97].

La consistance du flux numérique est tel que l'ordre de l'approximation numérique choisi pour le flux doit être supérieur ou égal à 1. [EGH00, KRO97]

Ainsi d'après ces définitions de la conservation et de la consistance, pour les flux numériques des termes de convection et de diffusion cités séparément dans [EGH00, KRO97], on peut les généraliser par :

**Définition 3.1 (Conservativité)** *On dira que les flux approchés  $F_l^*$  et  $G_l^*$  sont conservatifs au sens des volumes finis, si on a une conservation locale*

$$F_l^{*-} + F_l^{*+} = 0 \text{ et } G_l^{*-} + G_l^{*+} = 0 \text{ pour tout } l \in \mathcal{L}_h \setminus \Gamma$$

plus une conservation globale

$$\begin{aligned} \sum_j \left( F_{N_x + \frac{1}{2}j}^{*-} + F_{\frac{1}{2}j}^{*+} \right) + \sum_i \left( F_{iN_y + \frac{1}{2}}^{*-} + F_{i\frac{1}{2}}^{*+} \right) &= \int_{\Gamma} b(u) (-\vec{q} \cdot \vec{n}) ds \\ \sum_j \left( G_{N_x + \frac{1}{2}j}^{*-} + G_{\frac{1}{2}j}^{*+} \right) + \sum_i \left( G_{iN_y + \frac{1}{2}}^{*-} + G_{i\frac{1}{2}}^{*+} \right) &= \int_{\Gamma} K \nabla \alpha(u) \cdot \vec{n} ds \end{aligned}$$

**Définition 3.2 (Consistance)** On dira que les flux approchés  $F_l^*$  et  $G_l^*$  sont consistants au sens des volumes finis, si on a :

$$F_l^{*\pm}(v, v) = \pm b(v) (-\vec{q}_l \cdot \vec{n}_{M,l}) |l| \text{ pour tout } v \in [0, 1]; \text{ et}$$

$$G_l^{*\pm}(u_M, u_{M_l}) = \pm K_l \nabla \alpha(u)_l \cdot \vec{n}_{M,l} |l| + \theta(h) \text{ pour tout } u \text{ assez régulière}$$

où  $|\theta(h)| \leq Ch$ , ( $C \in \mathbb{R}_+$  ne dépendant que de  $u$ ).

**Définition 3.3 (Volumes Finis)** On dira qu'un schéma numérique pour le problème  $(P_2)$  est de type volumes finis, si les flux numériques approchés sont conservatifs et consistants au sens des définitions 3.1 et 3.2.

De (3.2) on déduit trois familles de schémas de type volumes finis; l'un explicite les deux autres sont implicite et semi-implicite.

### 3.3.3 Schéma explicite

En utilisant dans (3.2) une approximation explicite pour les termes de convection et de diffusion, on a :

pour  $i = 1, \dots, N_x$ ,  $j = 1, \dots, N_y$

$$\begin{aligned} u_{ij}^{n+1} &= u_{ij}^n + \frac{\Delta t_n}{\Phi_{ij} |M_{ij}|} \sum_{l \in \partial M_{ij}} b(u)_l^n (-\vec{q}_l \cdot \vec{n}_{M_{ij},l}) |l| \\ &+ \frac{\Delta t_n}{\Phi_{ij} |M_{ij}|} \sum_{l \in \partial M_{ij} \setminus \Gamma} K_l \nabla \alpha(u)_l^n \cdot \vec{n}_{M_{ij},l} |l| \end{aligned}$$

où

$$b(u)_l^n := \begin{cases} b(u_{M_{ij}}^n) & \text{si } \vec{q}_l \cdot \vec{n}_{M_{ij},l} \geq 0 \\ b(u_{M_{ij}^l}^n) & \text{si } \vec{q}_l \cdot \vec{n}_{M_{ij},l} < 0 \end{cases}$$

avec  $M_{ij}^l \in \Sigma_h$  tel que  $l = M_{ij}^l \cap M_{ij}$ , sachant que  $b(u_{M_{ij}^l}^n) := b(u_0)$  si  $l \in \partial M_{ij} \cap \Gamma_1$ , et  $\vec{q}_l \cdot \vec{n}_{M_{ij},l} \geq 0$  si  $l \in \partial M_{ij} \cap (\Gamma_2 \cup \Gamma_3)$ , le terme de convection est approché par un schéma de Godunov décentré amont (voir **Godunov** [GOD76]), ce qui assure la conservation et la consistance pour le terme de convection. Pour le terme de diffusion on choisit une approximation d'ordre 1, avec  $K_l$  la **moyenne harmonique** entre  $K_{M_{ij}}$  et  $K_{M_{ij}^l}$ , c.à.d.

$$K_l^{-1} := \left( |M_{ij}| K_{M_{ij}}^{-1} + |M_{ij}^l| K_{M_{ij}^l}^{-1} \right) (|M_{ij}| + |M_{ij}^l|)^{-1}$$

et en utilisant  $\text{div}(\vec{q}) = 0$ , soit  $\sum_{l \in \partial M_{ij}} (\vec{q}_l \cdot \vec{n}_{M_{ij},l}) |l| = 0$ , on a le schéma explicite suivant :

pour  $i = 1, \dots, N_x, j = 1, \dots, N_y$

$$\begin{aligned} u_{ij}^{n+1} &= u_{ij}^n & (3.4) \\ &+ \frac{\Delta t_n}{\Phi_{ij} \Delta x_i} \left[ \frac{K_{i+\frac{1}{2}j}^1}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} (\alpha(u_{i+1j}^n) - \alpha(u_{ij}^n)) + \frac{K_{i-\frac{1}{2}j}^1}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} (\alpha(u_{i-1j}^n) - \alpha(u_{ij}^n)) \right] \\ &+ \frac{\Delta t_n}{\Phi_{ij} \Delta y_j} \left[ \frac{K_{ij+\frac{1}{2}}^2}{\Delta y_{j+\frac{1}{2}}} (\alpha(u_{ij+1}^n) - \alpha(u_{ij}^n)) + \frac{K_{ij-\frac{1}{2}}^2}{\Delta y_{j-\frac{1}{2}}} (\alpha(u_{ij-1}^n) - \alpha(u_{ij}^n)) \right] \\ &+ \frac{\Delta t_n}{\Phi_{ij} \Delta x_i} \left[ (b(u_{i+1j}^n) - b(u_{ij}^n)) (-qx_{i+\frac{1}{2}j})^+ + (b(u_{i-1j}^n) - b(u_{ij}^n)) (qx_{i-\frac{1}{2}j})^+ \right] \\ &+ \frac{\Delta t_n}{\Phi_{ij} \Delta y_j} \left[ (b(u_{ij+1}^n) - b(u_{ij}^n)) (-qy_{ij+\frac{1}{2}})^+ + (b(u_{ij-1}^n) - b(u_{ij}^n)) (qy_{ij-\frac{1}{2}})^+ \right] \end{aligned}$$

avec les conditions au bord suivantes :

$$(C.B) \left\{ \begin{array}{l} \alpha(u_{i0}^n) := \alpha(u_{i1}^n) ; \alpha(u_{iN_y+1}^n) := \alpha(u_{iN_y}^n) \\ \alpha(u_{0j}^n) := \alpha(u_{1j}^n) ; \alpha(u_{N_x+1j}^n) := \alpha(u_{N_xj}^n) \\ b(u_{i0}^n) := b(u_0) \text{ si } M_{i1} \cap \Gamma_1 \neq \emptyset, b(u_{i1}^n) \text{ si non} \\ b(u_{iN_y+1}^n) := b(u_0) \text{ si } M_{iN_y} \cap \Gamma_1 \neq \emptyset, b(u_{iN_y}^n) \text{ si non} \\ b(u_{0j}^n) := b(u_0) \text{ si } M_{1j} \cap \Gamma_1 \neq \emptyset, b(u_{1j}^n) \text{ si non} \\ b(u_{N_x+1j}^n) := b(u_0) \text{ si } M_{N_xj} \cap \Gamma_1 \neq \emptyset, b(u_{N_xj}^n) \text{ si non} \end{array} \right. \quad (3.5)$$

Ici les **flux numériques** sont donnés par :

pour  $M \in \Sigma_h$

$$\begin{aligned} F_l^* (u_M^n, u_{M_l}^n) &:= b(u_{M_l}^n) (-\vec{q}_l \cdot \vec{n}_{M,l})^+ |l| - b(u_M^n) (-\vec{q}_l \cdot \vec{n}_{M,l})^- |l| \\ G_l^* (u_M^n, u_{M_l}^n) &:= \frac{K_l |l|}{\delta_{M,l}} (\alpha(u_{M_l}^n) - \alpha(u_M^n)) \end{aligned}$$

ce qui montre la conservation des flux, la consistance est due au fait que les approximations choisies sont d'ordre 1, et par suite le schéma explicite (3.4) est de type volumes finis au sens de la définition 3.3.

### 3.3.4 Schéma implicite

En utilisant dans (3.2) une approximation implicite pour le terme de convection et de diffusion, on a

pour  $i = 1, \dots, N_x, j = 1, \dots, N_y$

$$\begin{aligned} u_{ij}^{n+1} &= u_{ij}^n + \frac{\Delta t_n}{\Phi_{ij} |M_{ij}|} \sum_{l \in \partial M_{ij}} b(u)_l^{n+1} (-\vec{q}_l \cdot \vec{n}_{M_{ij},l}) |l| \\ &+ \frac{\Delta t_n}{\Phi_{ij} |M_{ij}|} \sum_{l \in \partial M_{ij} \setminus \Gamma} K_l (\nabla \alpha(u)_l^{n+1} \cdot \vec{n}_{M_{ij},l}) |l| \end{aligned}$$

où :

$$b(u)_l^{n+1} = \begin{cases} b(u_{M_{ij}^l}^{n+1}) & \text{si } \vec{q}_l \cdot \vec{n}_{M_{ij},l} \geq 0 \\ b(u_{M_l}^{n+1}) & \text{si } \vec{q}_l \cdot \vec{n}_{M_{ij},l} < 0 \end{cases}$$

avec  $M_{ij}^l \in \Sigma_h$  tel que  $l = M_{ij}^l \cap M_{ij}$ . En utilisant  $\operatorname{div}(\vec{q}) = 0$ , on a le schéma implicite suivant :

pour  $i = 1, \dots, N_x, j = 1, \dots, N_y$

$$\begin{aligned} u_{ij}^n &= u_{ij}^{n+1} - \frac{\Delta t_n}{\Phi_{ij} \Delta x_i} \left[ \frac{K_{i+\frac{1}{2}j}^1}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} (\alpha(u_{i+1j}^{n+1}) - \alpha(u_{ij}^{n+1})) + \frac{K_{i-\frac{1}{2}j}^1}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} (\alpha(u_{i-1j}^{n+1}) - \alpha(u_{ij}^{n+1})) \right] \\ &- \frac{\Delta t_n}{\Phi_{ij} \Delta y_j} \left[ \frac{K_{ij+\frac{1}{2}}^2}{\Delta y_{j+\frac{1}{2}}} (\alpha(u_{ij+1}^{n+1}) - \alpha(u_{ij}^{n+1})) + \frac{K_{ij-\frac{1}{2}}^2}{\Delta y_{j-\frac{1}{2}}} (\alpha(u_{ij-1}^{n+1}) - \alpha(u_{ij}^{n+1})) \right] \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} &- \frac{\Delta t_n}{\Phi_{ij} \Delta x_i} \left[ (b(u_{i+1j}^{n+1}) - b(u_{ij}^{n+1})) (-qx_{i+\frac{1}{2}j})^+ + (b(u_{i-1j}^{n+1}) - b(u_{ij}^{n+1})) (qx_{i-\frac{1}{2}j})^+ \right] \\ &- \frac{\Delta t_n}{\Phi_{ij} \Delta y_j} \left[ (b(u_{ij+1}^{n+1}) - b(u_{ij}^{n+1})) (-qy_{ij+\frac{1}{2}})^+ + (b(u_{ij-1}^{n+1}) - b(u_{ij}^{n+1})) (qy_{ij-\frac{1}{2}})^+ \right] \end{aligned}$$

avec les mêmes conditions au bord (3.5). Ici les **flux numériques** sont donnés par : pour  $M \in \Sigma_h$

$$\begin{aligned} F_l^* (u_M^{n+1}, u_{M_l}^{n+1}) &:= b(u_{M_l}^{n+1}) (-\vec{q}_l \cdot \vec{n}_{M,l})^+ |l| - b(u_M^{n+1}) (-\vec{q}_l \cdot \vec{n}_{M,l})^- |l| \\ G_l^* (u_M^{n+1}, u_{M_l}^{n+1}) &:= \frac{K_l |l|}{\delta_{M,l}} (\alpha(u_{M_l}^{n+1}) - \alpha(u_M^{n+1})) \end{aligned}$$

ce qui montre la conservation des flux, la consistance est due au fait que les approximations choisies sont d'ordre 1, et par suite le schéma implicite (3.6) est de type volumes finis au sens de la définition 3.3.

### 3.3.5 Schéma semi-implicite

En utilisant dans (3.2) une approximation explicite pour le terme de convection et une approximation implicite pour le terme de diffusion, on a :

$$\begin{aligned} u_{ij}^{n+1} &= u_{ij}^n + \frac{\Delta t_n}{\Phi_{ij} |M_{ij}|} \sum_{l \in \partial M_{ij}} b(u)_l^n (-\vec{q}_l \cdot \vec{n}_{M_{ij},l}) |l| \\ &+ \frac{\Delta t_n}{\Phi_{ij} |M_{ij}|} \sum_{l \in \partial M_{ij} \setminus \Gamma} K_l (\nabla \alpha(u)_l^{n+1} \cdot \vec{n}_{M_{ij},l}) |l| \end{aligned}$$

pour  $i = 1, \dots, N_x, j = 1, \dots, N_y$ , où

$$b(u)_l^n = \begin{cases} b(u_{M_{ij}}^n) & \text{si } \vec{q}_l \cdot \vec{n}_{M_{ij},l} \geq 0 \\ b(u_{M_{ij}^l}^n) & \text{si } \vec{q}_l \cdot \vec{n}_{M_{ij},l} < 0 \end{cases}$$

avec  $M_{ij}^l \in \Sigma_h$  tel que  $l = M_{ij}^l \cap M_{ij}$ . En utilisant  $\text{div}(\vec{q}) = 0$ , on a le schéma semi-implicite suivant : pour  $i = 1, \dots, N_x, j = 1, \dots, N_y$

$$\begin{aligned} & \left[ u_{ij}^{n+1} - \frac{\Delta t_n}{\Phi_{ij} \Delta x_i} \left[ \frac{K_{i+\frac{1}{2}j}^1}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} (\alpha(u_{i+1j}^{n+1}) - \alpha(u_{ij}^{n+1})) + \frac{K_{i-\frac{1}{2}j}^1}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} (\alpha(u_{i-1j}^{n+1}) - \alpha(u_{ij}^{n+1})) \right] \right. \\ & \left. - \frac{\Delta t_n}{\Phi_{ij} \Delta y_j} \left[ \frac{K_{ij+\frac{1}{2}}^2}{\Delta y_{j+\frac{1}{2}}} (\alpha(u_{ij+1}^{n+1}) - \alpha(u_{ij}^{n+1})) + \frac{K_{ij-\frac{1}{2}}^2}{\Delta y_{j-\frac{1}{2}}} (\alpha(u_{ij-1}^{n+1}) - \alpha(u_{ij}^{n+1})) \right] \right] \quad (3.7) \\ & = u_{ij}^n + \frac{\Delta t_n}{\Phi_{ij} \Delta x_i} \left[ (b(u_{i+1j}^n) - b(u_{ij}^n)) (-qx_{i+\frac{1}{2}j})^+ + (b(u_{i-1j}^n) - b(u_{ij}^n)) (qx_{i-\frac{1}{2}j})^+ \right] \\ & + \frac{\Delta t_n}{\Phi_{ij} \Delta y_j} \left[ (b(u_{ij+1}^n) - b(u_{ij}^n)) (-qy_{ij+\frac{1}{2}})^+ + (b(u_{ij-1}^n) - b(u_{ij}^n)) (qy_{ij-\frac{1}{2}})^+ \right] \end{aligned}$$

avec les mêmes conditions au bord (3.5). Ici les **flux numériques** sont donnés par : pour  $M \in \Sigma_h$

$$\begin{aligned} F_l^* (u_M^n, u_{M_l}^n) &:= b(u_{M_l}^n) (-\vec{q}_l \cdot \vec{n}_{M,l})^+ |l| - b(u_M^n) (-\vec{q}_l \cdot \vec{n}_{M,l})^- |l| \\ G_l^* (u_M^{n+1}, u_{M_l}^{n+1}) &:= \frac{K_l |l|}{\delta_{M,l}} (\alpha(u_{M_l}^{n+1}) - \alpha(u_M^{n+1})) \end{aligned}$$

ce qui montre la conservation des flux, la consistance est due au fait que les approximations choisies sont d'ordre 1, et par suite le schéma semi-implicite (3.7) est de type volumes finis au sens de la définition 3.3.

L'existence et l'unicité de solution pour les systèmes non linéaires (3.6) et (3.7) seront établies dans la section 3.4.

### 3.4 Résultats de stabilité

Dans cette section, on présente des résultats de stabilité  $L^\infty$  et des estimations  $BV$  pour les schémas volumes finis introduits dans la section 3.3.

**Définition 3.4** (*Stabilité  $L^\infty$* ) On dira que la solution approchée  $(u_{ij}^n)$  est  $L^\infty$  stable sur  $\Omega$ , si on a :

$$\|u^n\|_\infty := \sup_{ij} |u_{ij}^n| \leq C \text{ pour tout } n = 1, \dots, N_\tau$$

**Définition 3.5** (*Stabilité  $BV$* ) On dira que la solution approchée  $(u_{ij}^n)$  est  $BV$  stable sur  $\Omega$ , si on a :

$$\|u^n\|_{BV(\Omega)} := \sum_{i,j} |u_{i+1,j}^n - u_{ij}^n| \Delta x_i + \sum_{i,j} |u_{i+1,j}^n - u_{ij}^n| \Delta y_j \leq C$$

pour tout  $n = 1, \dots, N_\tau$

Soient  $C_q$  et  $C_K$  définies par :

$$C_q := \sup_{ij} \frac{h}{\Phi_{ij}} \left( \frac{(-qx_{i+\frac{1}{2}j})^+ + (qx_{i-\frac{1}{2}j})^+}{\Delta x_i} + \frac{(-qy_{ij+\frac{1}{2}})^+ + (qy_{ij-\frac{1}{2}})^+}{\Delta y_j} \right) \leq \frac{4 \|\vec{q}\|_\infty}{\Phi_-} < \infty$$

et

$$C_K = \sup_{ij} \frac{h^2}{\Phi_{ij}} \left( \frac{K_{i+\frac{1}{2}j}^1}{\Delta x_i \Delta x_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{K_{i-\frac{1}{2}j}^1}{\Delta x_i \Delta x_{i-\frac{1}{2}}} + \frac{K_{ij+\frac{1}{2}}^2}{\Delta y_j \Delta y_{j+\frac{1}{2}}} + \frac{K_{ij-\frac{1}{2}}^2}{\Delta y_j \Delta y_{j-\frac{1}{2}}} \right) \leq \frac{4K^+}{\Phi_-} < \infty$$

On introduit les conditions **CFL** suivantes :

$$CFL_1 := \frac{\Delta t}{h} C_q \sup_{0 \leq s \leq 1} b'(s) + \frac{\Delta t}{h^2} C_K \sup_{0 \leq s \leq 1} \alpha'(s) \leq 1 \quad (3.8)$$

et

$$CFL_2 := \frac{\Delta t}{h} C_q \sup_{0 \leq s \leq 1} b'(s) \leq 1 \quad (3.9)$$

et on établit les résultats suivants :

### 3.4.1 Stabilité $L^\infty$

**Proposition 3.6** *Sous les hypothèses (H0)-(H8), (H11) et la condition CFL (3.8), le schéma explicite (3.4)-(3.5) est  $L^\infty$  stable. De plus, la solution approchée  $(u_{ij}^n)$  satisfait le **principe du maximum discret** suivant :*

$$0 \leq u_{ij}^n \leq 1 \quad \text{pour tout } M_{ij} \in \Sigma_h \quad \text{et } n = 1, \dots, N_\tau \quad (3.10)$$

**Démonstration.** Le schéma (3.4) peut s'écrire sous la forme pour  $i = 1, \dots, N_x, j = 1, \dots, N_y$

$$\begin{aligned} u_{ij}^{n+1} &= u_{ij}^n & (3.11) \\ &- \frac{\Delta t_n}{\Phi_{ij} \Delta x_i} \left[ \frac{K_{i+\frac{1}{2}j}^1 a_{i+\frac{1}{2}j}^n}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} (u_{ij}^{n+1} - u_{i+1j}^{n+1}) + \frac{K_{i-\frac{1}{2}j}^1 a_{i-\frac{1}{2}j}^n}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} (u_{ij}^{n+1} - u_{i-1j}^{n+1}) \right] \\ &- \frac{\Delta t_n}{\Phi_{ij} \Delta y_j} \left[ \frac{K_{ij+\frac{1}{2}}^2 a_{ij+\frac{1}{2}}^n}{\Delta y_{j+\frac{1}{2}}} (u_{ij}^{n+1} - u_{ij+1}^{n+1}) + \frac{K_{ij-\frac{1}{2}}^2 a_{ij-\frac{1}{2}}^n}{\Delta y_{j-\frac{1}{2}}} (u_{ij}^{n+1} - u_{ij-1}^{n+1}) \right] \\ &+ \frac{\Delta t_n}{\Phi_{ij} \Delta x_i} \left[ b_{i+\frac{1}{2}j}^n (u_{i+1j}^n - u_{ij}^n) (-qx_{i+\frac{1}{2}j})^+ + b_{i-\frac{1}{2}j}^n (u_{i-1j}^n - u_{ij}^n) (qx_{i-\frac{1}{2}j})^+ \right] \\ &+ \frac{\Delta t_n}{\Phi_{ij} \Delta y_j} \left[ b_{ij+\frac{1}{2}}^n (u_{ij+1}^n - u_{ij}^n) (-qy_{ij+\frac{1}{2}})^+ + b_{ij-\frac{1}{2}}^n (u_{ij-1}^n - u_{ij}^n) (qy_{ij-\frac{1}{2}})^+ \right] \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
b_{i\pm\frac{1}{2}j}^n &= \frac{b(u_{i\pm 1j}^n) - b(u_{ij}^n)}{u_{i\pm 1j}^n - u_{ij}^n} \text{ si } u_{i\pm 1j}^n \neq u_{ij}^n \text{ et } b_{i\pm\frac{1}{2}j}^n = b'(u_{ij}^n) \text{ si non} \\
b_{ij\pm\frac{1}{2}}^n &= \frac{b(u_{ij\pm 1}^n) - b(u_{ij}^n)}{u_{ij\pm 1}^n - u_{ij}^n} \text{ si } u_{ij\pm 1}^n \neq u_{ij}^n \text{ et } b_{ij\pm\frac{1}{2}}^n = b'(u_{ij}^n) \text{ si non} \\
a_{i\pm\frac{1}{2}j}^n &= \frac{\alpha(u_{i\pm 1j}^n) - \alpha(u_{ij}^n)}{u_{i\pm 1j}^n - u_{ij}^n} \text{ si } u_{i\pm 1j}^n \neq u_{ij}^n \text{ et } a_{i\pm\frac{1}{2}j}^n = \alpha'(u_{ij}^n) \text{ si non} \\
a_{ij\pm\frac{1}{2}}^n &= \frac{\alpha(u_{ij\pm 1}^n) - \alpha(u_{ij}^n)}{u_{ij\pm 1}^n - u_{ij}^n} \text{ si } u_{ij\pm 1}^n \neq u_{ij}^n \text{ et } a_{ij\pm\frac{1}{2}}^n = \alpha'(u_{ij}^n) \text{ si non}
\end{aligned}$$

avec les conditions aux bords

$$\begin{aligned}
a_{\frac{1}{2}j}^n &:= a_{i\frac{1}{2}}^n := a_{N_x+\frac{1}{2}j}^n := a_{iN_y+\frac{1}{2}}^n := 0 \\
u_{i0}^n &:= \begin{cases} u_0 \text{ si } (x_i, y_{\frac{1}{2}}) \in \Gamma_1 \\ u_{i1}^n \text{ si non} \end{cases} \quad \text{et} \quad u_{iN_y+1}^n := \begin{cases} u_0 \text{ si } (x_i, y_{N_y+\frac{1}{2}}) \in \Gamma_1 \\ u_{iN_y}^n \text{ si non} \end{cases} \\
u_{0j}^n &:= \begin{cases} u_0 \text{ si } (x_{\frac{1}{2}}, y_j) \in \Gamma_1 \\ u_{1j}^n \text{ si non} \end{cases} \quad \text{et} \quad u_{N_x+1j}^n := \begin{cases} u_0 \text{ si } (x_{N_x+\frac{1}{2}}, y_j) \in \Gamma_1 \\ u_{N_xj}^n \text{ si non} \end{cases}
\end{aligned}$$

ainsi on a :

$$\begin{aligned}
u_{ij}^{n+1} &= u_{ij}^n \left[ 1 - \frac{\Delta t_n}{\Phi_{ij}} \left( \frac{K_{i+\frac{1}{2}j}^1 a_{i+\frac{1}{2}j}^n}{\Delta x_i \Delta x_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{K_{i-\frac{1}{2}j}^1 a_{i-\frac{1}{2}j}^n}{\Delta x_i \Delta x_{i-\frac{1}{2}}} + \frac{K_{ij+\frac{1}{2}}^2 a_{ij+\frac{1}{2}}^n}{\Delta y_j \Delta y_{j+\frac{1}{2}}} + \frac{K_{ij-\frac{1}{2}}^2 a_{ij-\frac{1}{2}}^n}{\Delta y_j \Delta y_{j-\frac{1}{2}}} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\Delta t_n}{\Phi_{ij}} \left( \frac{b_{i+\frac{1}{2}j}^n (-qx_{i+\frac{1}{2}j})^+}{\Delta x_i} + \frac{b_{i-\frac{1}{2}j}^n (qx_{i-\frac{1}{2}j})^+}{\Delta x_i} + \frac{b_{ij+\frac{1}{2}}^n (-qy_{ij+\frac{1}{2}})^+}{\Delta y_j} + \frac{b_{ij-\frac{1}{2}}^n (qy_{ij-\frac{1}{2}})^+}{\Delta y_j} \right) \right] \\
&\quad + \frac{\Delta t_n}{\Phi_{ij}} \left[ \frac{K_{i+\frac{1}{2}j}^1 a_{i+\frac{1}{2}j}^n}{\Delta x_i \Delta x_{i+\frac{1}{2}}} u_{i+1j}^{n+1} + \frac{K_{i-\frac{1}{2}j}^1 a_{i-\frac{1}{2}j}^n}{\Delta x_i \Delta x_{i-\frac{1}{2}}} u_{i-1j}^{n+1} + \frac{K_{ij+\frac{1}{2}}^2 a_{ij+\frac{1}{2}}^n}{\Delta y_j \Delta y_{j+\frac{1}{2}}} u_{ij+1}^{n+1} + \frac{K_{ij-\frac{1}{2}}^2 a_{ij-\frac{1}{2}}^n}{\Delta y_j \Delta y_{j-\frac{1}{2}}} u_{ij-1}^{n+1} \right. \\
&\quad \left. + \frac{b_{i+\frac{1}{2}j}^n (-qx_{i+\frac{1}{2}j})^+ u_{i+1j}^n}{\Delta x_i} + \frac{b_{i-\frac{1}{2}j}^n (qx_{i-\frac{1}{2}j})^+ u_{i-1j}^n}{\Delta x_i} + \frac{b_{ij+\frac{1}{2}}^n (-qy_{ij+\frac{1}{2}})^+ u_{ij+1}^n}{\Delta y_j} + \frac{b_{ij-\frac{1}{2}}^n (qy_{ij-\frac{1}{2}})^+ u_{ij-1}^n}{\Delta y_j} \right]
\end{aligned}$$

et en utilisant la condition CFL (3.8), on a par récurrence sur  $n$  :

$$0 \leq u_{ij}^n \leq 1 \text{ implique que } 0 \leq u_{ij}^{n+1} \leq 1$$

d'où la stabilité  $L^\infty$ . Ceci termine la démonstration de la proposition 3.6. ■

**Proposition 3.7** *Sous les hypothèses (H0)-(H8), (H11) et la condition CFL (3.9), le schéma semi-implicite (3.7)-(3.5) est  $L^\infty$  stable. De plus, la solution approchée  $(u_{ij}^n)$  satisfait le **principe du maximum discret** suivant :*

$$0 \leq u_{ij}^n \leq 1 \quad \text{pour tout } M_{ij} \in \Sigma_h \quad \text{et } n = 1, \dots, N_\tau \quad (3.12)$$

on a les mêmes résultats pour le schéma (3.6)-(3.5), sans aucune condition CFL.

**Démonstration.** Pour des raisons de simplicité, on n'écrira la démonstration que pour le schéma semi-implicite (3.7), qui peut s'écrire sous la forme

pour  $i = 1, \dots, N_x, j = 1, \dots, N_y$

$$\begin{aligned} u_{ij}^{n+1} &+ \frac{\Delta t_n}{\Phi_{ij} \Delta x_i} \left[ \frac{K_{i+\frac{1}{2}j}^{1} a_{i+\frac{1}{2}j}^{n+1}}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} (u_{ij}^{n+1} - u_{i+1j}^{n+1}) + \frac{K_{i-\frac{1}{2}j}^{1} a_{i-\frac{1}{2}j}^{n+1}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} (u_{ij}^{n+1} - u_{i-1j}^{n+1}) \right] \\ &+ \frac{\Delta t_n}{\Phi_{ij} \Delta y_j} \left[ \frac{K_{ij+\frac{1}{2}}^{2} a_{ij+\frac{1}{2}}^{n+1}}{\Delta y_{j+\frac{1}{2}}} (u_{ij}^{n+1} - u_{ij+1}^{n+1}) + \frac{K_{ij-\frac{1}{2}}^{2} a_{ij-\frac{1}{2}}^{n+1}}{\Delta y_{j-\frac{1}{2}}} (u_{ij}^{n+1} - u_{ij-1}^{n+1}) \right] \quad (3.13) \\ &= u_{ij}^n + \frac{\Delta t_n}{\Phi_{ij} \Delta x_i} \left[ b_{i+\frac{1}{2}j}^n (u_{i+1j}^n - u_{ij}^n) (-qx_{i+\frac{1}{2}j})^+ + b_{i-\frac{1}{2}j}^n (u_{i-1j}^n - u_{ij}^n) (qx_{i-\frac{1}{2}j})^+ \right] \\ &+ \frac{\Delta t_n}{\Phi_{ij} \Delta y_j} \left[ b_{ij+\frac{1}{2}}^n (u_{ij+1}^n - u_{ij}^n) (-qy_{ij+\frac{1}{2}})^+ + b_{ij-\frac{1}{2}}^n (u_{ij-1}^n - u_{ij}^n) (qy_{ij-\frac{1}{2}})^+ \right] \end{aligned}$$

On pose

$$U^n = \left[ u_{00}^n, v_{11}^n, \dots, u_{N_x 1}^n, u_{12}^n, \dots, u_{ij}^n, \dots, u_{N_x N_y}^n \right]^t$$

et

$$W^n = \left[ w_{00}^n, w_{11}^n, \dots, w_{N_x 1}^n, w_{12}^n, \dots, w_{ij}^n, \dots, w_{N_x N_y}^n \right]^t$$

où les indices  $ij$  correspondent à la maille  $M_{ij}$ , et soit :

$$\begin{aligned} w_{ij}^n &= u_{ij}^n + \frac{\Delta t_n}{\Phi_{ij} \Delta x_i} \left[ b_{i+\frac{1}{2}j}^n (u_{i+1j}^n - u_{ij}^n) (-qx_{i+\frac{1}{2}j})^+ + b_{i-\frac{1}{2}j}^n (u_{i-1j}^n - u_{ij}^n) (qx_{i-\frac{1}{2}j})^+ \right] \\ &+ \frac{\Delta t_n}{\Phi_{ij} \Delta y_j} \left[ b_{ij+\frac{1}{2}}^n (u_{ij+1}^n - u_{ij}^n) (-qy_{ij+\frac{1}{2}})^+ + b_{ij-\frac{1}{2}}^n (u_{ij-1}^n - u_{ij}^n) (qy_{ij-\frac{1}{2}})^+ \right] \end{aligned}$$

pour  $i = 1, \dots, N_x, j = 1, \dots, N_y$  et  $w_{00}^n := u_{00}^n := u_0$ , (condition au bord  $\Gamma_1$ ).

Le schéma (3.7) peut alors s'écrire comme limite des solutions des systèmes d'équations suivants :

$$D \left( [U^{n+1}]^{(k)} \right) [U^{n+1}]^{(k+1)} = W^n \quad \text{avec} \quad [U^{n+1}]^{(0)} = U^n \quad (3.14)$$

où  $D$  est une matrice bande d'ordre  $N_x N_y + 1$ , dont les éléments non nuls s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned} (D)_{0,0} &:= 1 \text{ et pour } i = 1, \dots, N_x, j = 1, \dots, N_y \\ [D(U^{n+1})^{(k)}]_{ij,ij} &= 1 + \frac{\Delta t_n}{\Phi_{ij} \Delta x_i} \left( \left( d_{i-\frac{1}{2}j}^{n+1} \right)^{(k)} + \left( d_{i+\frac{1}{2}j}^{n+1} \right)^{(k)} \right) \\ &\quad + \frac{\Delta t_n}{\Phi_{ij} \Delta y_j} \left( \left( d_{ij-\frac{1}{2}}^{n+1} \right)^{(k)} + \left( d_{ij+\frac{1}{2}}^{n+1} \right)^{(k)} \right) \\ [D(U^{n+1})^{(k)}]_{ij,i-1j} &= \frac{-\Delta t_n}{\Phi_{ij} \Delta x_i} \left( d_{i-\frac{1}{2}j}^{n+1} \right)^{(k)} \quad \text{et} \quad [D(U^{n+1})^{(k)}]_{ij,i+1j} = \frac{-\Delta t_n}{\Phi_{ij} \Delta x_i} \left( d_{i+\frac{1}{2}j}^{n+1} \right)^{(k)} \\ [D(U^{n+1})^{(k)}]_{ij,ij-1} &= \frac{-\Delta t_n}{\Phi_{ij} \Delta y_j} \left( d_{ij-\frac{1}{2}}^{n+1} \right)^{(k)} \quad \text{et} \quad [D(U^{n+1})^{(k)}]_{ij,ij+1} = \frac{-\Delta t_n}{\Phi_{ij} \Delta y_j} \left( d_{ij+\frac{1}{2}}^{n+1} \right)^{(k)} \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \left( d_{i-\frac{1}{2}j}^{n+1} \right)^{(k)} &:= \frac{K^1_{i-\frac{1}{2}j}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} \left( a_{i-\frac{1}{2}j}^{n+1} \right)^{(k)} \quad \text{pour } i = 2, \dots, N_x, j = 1, \dots, N_y \\ \left( d_{ij-\frac{1}{2}}^{n+1} \right)^{(k)} &:= \frac{K^2_{ij-\frac{1}{2}}}{\Delta y_{j-\frac{1}{2}}} \left( a_{ij-\frac{1}{2}}^{n+1} \right)^{(k)} \quad \text{pour } i = 1, \dots, N_x, j = 2, \dots, N_y \\ \text{et } \left( d_{\frac{1}{2}j}^{n+1} \right)^{(k)} &:= \left( d_{N_x+\frac{1}{2}j}^{n+1} \right)^{(k)} := \left( d_{i\frac{1}{2}}^{n+1} \right)^{(k)} := \left( d_{iN_y+\frac{1}{2}}^{n+1} \right)^{(k)} := 0 \end{aligned}$$

Il est facile de voir que la matrice  $D$  est une matrice monotone, c.à.d. on a  $(D^{-1})_{i,j} \geq 0$ , de plus  $(D_{i,i} - \sum_{i \neq j} |D_{i,j}|) \geq 1$ , donc  $\|D^{-1}\|_\infty \leq 1$ , où  $\|\cdot\|_\infty$  est la norme matricielle  $l_\infty$ , ainsi  $\forall V \in [0, 1]^{N_x N_y + 1}$ ,  $D^{-1}V \in [0, 1]^{N_x N_y + 1}$ . Utilisons la condition CFL (3.9) on a :

$$0 \leq u_{ij}^n \leq 1 \quad \text{pour } i = 1, \dots, N_x \text{ et } j = 1, \dots, N_y$$

implique que :

$$\begin{aligned} w_{ij}^n &= u_{ij}^n \left[ 1 - \frac{\Delta t_n}{\Phi_{ij}} \left( \frac{b_{i+\frac{1}{2}j}^n (-qx_{i+\frac{1}{2}j})^+ + b_{i-\frac{1}{2}j}^n (qx_{i-\frac{1}{2}j})^+}{\Delta x_i} + \frac{b_{ij+\frac{1}{2}}^n (-qy_{ij+\frac{1}{2}})^+ + b_{ij-\frac{1}{2}}^n (qy_{ij-\frac{1}{2}})^+}{\Delta y_j} \right) \right] \\ &\quad + \frac{\Delta t_n}{\Phi_{ij}} \left( \frac{u_{i+1j}^n b_{i+\frac{1}{2}j}^n (-qx_{i+\frac{1}{2}j})^+ + u_{i-1j}^n b_{i-\frac{1}{2}j}^n (qx_{i-\frac{1}{2}j})^+}{\Delta x_i} + \frac{u_{ij+1}^n b_{ij+\frac{1}{2}}^n (-qy_{ij+\frac{1}{2}})^+ + u_{ij-1}^n b_{ij-\frac{1}{2}}^n (qy_{ij-\frac{1}{2}})^+}{\Delta y_j} \right) \\ &\in [0, 1] \end{aligned}$$

donc par récurrence sur  $k$  et  $n$  on a :  $U^n \in [0, 1]^{N_x N_y + 1}$  implique que  $W^n \in [0, 1]^{N_x N_y + 1}$  et par suite  $[U^{n+1}]^{(k+1)} = D^{-1} \left( [U^{n+1}]^{(k)} \right) W^n \in [0, 1]^{N_x N_y + 1}$ , ainsi on a toutes les solutions des systèmes (3.14) satisfont le principe du maximum discret (3.12).

Maintenant, on revient à l'existence et l'unicité de la solution du schéma semi-implicite (3.7). On a la suite  $\left( [U^{n+1}]^{(k)} \right)_{k \in \mathbb{N}}$  est bornée, donc on peut extraire une sous suite convergente, notée aussi  $\left( [U^{n+1}]^{(k)} \right)_{k \in \mathbb{N}}$ , telle que  $U^{n+1} := \lim_{k \rightarrow \infty} [U^{n+1}]^{(k)} \in ([0, 1])^{N_x N_y + 1}$ , et d'après la continuité de l'application  $V \mapsto D(V)[V]$ , la limite  $U^{n+1}$  est une solution de  $D(V)[V] = W^n$ , ce qui est équivalent à (3.7). La démonstration de l'unicité est analogue à celle du chapitre 2 (cf. proposition 2.8). Ceci termine la démonstration de la proposition 3.7. ■

### 3.4.2 Estimation $BV$

Pour avoir une estimation  $BV$  forte et par suite une convergence forte dans  $L^1(Q_\tau)$ , comme dans le cas mono-dimensionnel, on a besoin des hypothèses supplémentaires suivantes :

**(H12)**  $\Phi(x, y)$  est constante p.p. dans  $\Omega$ , pour simplifier on pose  $\Phi \equiv 1$ .

**(H13)**  $q_x(x, y) = q^1(x)$  et  $q_y(x, y) = q^2(y)$ , avec  $\frac{\partial q^1}{\partial x}, \frac{\partial q^2}{\partial y} \in L^\infty(\Omega)$ .

**(H14)**  $K(x, y)$  est un tenseur de la forme  $K(x, y) = \begin{pmatrix} K^1(x) & 0 \\ 0 & K^2(y) \end{pmatrix}$ .

On retrouve ces hypothèses dans **Saad & Zhang** [SAZ97] pour une équation elliptique discrétisée par une méthode volume fini avec un maillage carré adaptatif. Pour un cas plus général, on peut avoir une estimation  $BV$  faible et par suite une convergence forte dans  $L^2(Q_\tau)$ , qui sera l'objet du chapitre 4 (voir aussi [AFI99]).

**Proposition 3.8** *Sous les hypothèses (H0)-(H14), et la condition CFL (3.8) [resp. (3.9)], pour le schéma explicite (3.4)-(3.5) [resp, semi-implicite (3.7)-(3.5)], on a l'estimation BV suivante*

$$\|u^n\|_{BV(\Omega)} := \sum_{i,j} \Delta y_j |u_{i+1j}^n - u_{ij}^n| + \sum_{i,j} \Delta x_i |u_{ij+1}^n - u_{ij}^n| \leq C \quad (3.15)$$

où  $C \left( \tau, \sup(b'), \left\| \frac{\partial q^1}{\partial x} \right\|_\infty, \left\| \frac{\partial q^2}{\partial y} \right\|_\infty, \|u^0\|_{BV(\Omega)} \right)$  est une constante indépendante de  $h$  et  $\Delta t$ . Le même résultat est valable pour le schéma implicite (3.6)-(3.5) sans aucune condition CFL.

**Démonstration.** On se restreint au schéma semi-implicite (3.7), (la démonstration est analogue pour le schéma explicite (3.4) et implicite (3.6)). De (3.7) on a :

pour  $i = 1, \dots, N_x - 1, j = 1, \dots, N_y - 1$

$$\begin{aligned} & (u_{i+1j}^{n+1} - u_{ij}^{n+1}) \left( 1 + \frac{\Delta t_n K_{i+\frac{1}{2}}^1 a_{i+\frac{1}{2}j}^{n+1}}{\Delta x_i \Delta x_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{\Delta t_n K_{i+\frac{1}{2}}^1 a_{i+\frac{1}{2}j}^{n+1}}{\Delta x_{i+1} \Delta x_{i+\frac{1}{2}}} \right) \\ & - (u_{ij}^{n+1} - u_{i-1j}^{n+1}) \frac{\Delta t_n K_{i-\frac{1}{2}}^1 a_{i-\frac{1}{2}j}^{n+1}}{\Delta x_i \Delta x_{i-\frac{1}{2}}} - (u_{i+2j}^{n+1} - u_{i+1j}^{n+1}) \frac{\Delta t_n K_{i+\frac{3}{2}}^1 a_{i+\frac{3}{2}j}^n}{\Delta x_{i+1} \Delta x_{i+\frac{3}{2}}} \\ & - (\alpha(u_{ij}^{n+1}) - \alpha(u_{ij+1}^{n+1})) \frac{\Delta t_n K_{j+\frac{1}{2}}^2}{\Delta y_j \Delta y_{j+\frac{1}{2}}} - (\alpha(u_{ij}^{n+1}) - \alpha(u_{ij-1}^{n+1})) \frac{\Delta t_n K_{j-\frac{1}{2}}^2}{\Delta y_j \Delta y_{j-\frac{1}{2}}} \\ & + (\alpha(u_{i+1j}^{n+1}) - \alpha(u_{i+1j+1}^{n+1})) \frac{\Delta t_n K_{j+\frac{1}{2}}^2}{\Delta y_j \Delta y_{j+\frac{1}{2}}} + (\alpha(u_{i+1j}^{n+1}) - \alpha(u_{i+1j-1}^{n+1})) \frac{\Delta t_n K_{j-\frac{1}{2}}^2}{\Delta y_j \Delta y_{j-\frac{1}{2}}} \\ & = (u_{i+1j}^n - u_{ij}^n) \left( 1 - \frac{\Delta t_n b_{i+\frac{1}{2}j}^n (-q_{i+\frac{1}{2}}^1)^+}{\Delta x_i} - \frac{\Delta t_n b_{i+\frac{1}{2}j}^n (q_{i+\frac{1}{2}}^1)^+}{\Delta x_{i+1}} \right) \\ & + (u_{ij}^n - u_{i-1j}^n) \frac{\Delta t_n b_{i-\frac{1}{2}j}^n (q_{i-\frac{1}{2}}^1)^+}{\Delta x_i} + (u_{i+2j}^n - u_{i+1j}^n) \frac{\Delta t_n b_{i+\frac{3}{2}j}^n (-q_{i+\frac{3}{2}}^1)^+}{\Delta x_{i+1}} \\ & + (b(u_{ij}^n) - b(u_{ij+1}^n)) \frac{\Delta t_n (-q_{j+\frac{1}{2}}^2)^+}{\Delta y_j} + (b(u_{ij}^n) - b(u_{ij-1}^n)) \frac{\Delta t_n (q_{j-\frac{1}{2}}^2)^+}{\Delta y_j} \\ & + (b(u_{i+1j+1}^n) - b(u_{i+1j}^n)) \frac{\Delta t_n (-q_{j+\frac{1}{2}}^2)^+}{\Delta y_j} + (b(u_{i+1j-1}^n) - b(u_{i+1j}^n)) \frac{\Delta t_n (q_{j-\frac{1}{2}}^2)^+}{\Delta y_j} \end{aligned}$$

soit encore

$$(u_{i+1j}^{n+1} - u_{ij}^{n+1}) \left( 1 + \Delta t_n \left( \frac{K_{i+\frac{1}{2}}^1 a_{i+\frac{1}{2}j}^{n+1}}{\Delta x_{i+1} \Delta x_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{K_{i+\frac{1}{2}}^1 a_{i+\frac{1}{2}j}^{n+1}}{\Delta x_i \Delta x_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{K_{j+\frac{1}{2}}^2 a_{i+\frac{1}{2}j}^{n+1}}{\Delta y_j \Delta y_{j+\frac{1}{2}}} + \frac{K_{j-\frac{1}{2}}^2 a_{i+\frac{1}{2}j}^{n+1}}{\Delta y_j \Delta y_{j-\frac{1}{2}}} \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \Delta t_n \left( (u_{ij}^{n+1} - u_{i-1j}^{n+1}) \frac{K^1 a^{n+1}}{\Delta x_i \Delta x_{i-\frac{1}{2}}} + (u_{i+2j}^{n+1} - u_{i+1j}^{n+1}) \frac{K^1 a^{n+1}}{\Delta x_{i+1} \Delta x_{i+\frac{3}{2}}} \right. \\
&\quad \left. + (u_{i+1j+1}^{n+1} - u_{ij+1}^{n+1}) \frac{K^2 a^{n+1}}{\Delta y_j \Delta y_{j+\frac{1}{2}}} + (u_{i+1j-1}^{n+1} - u_{ij-1}^{n+1}) \frac{K^2 a^{n+1}}{\Delta y_j \Delta y_{j-\frac{1}{2}}} \right) \\
&+ (u_{i+1j}^n - u_{ij}^n) \left( 1 - \Delta t_n b_{i+\frac{1}{2}j}^n \left( \frac{(-q_{i+\frac{1}{2}}^1)^+}{\Delta x_i} + \frac{(q_{i+\frac{1}{2}}^1)^+}{\Delta x_{i+1}} + \frac{(-q_{j+\frac{1}{2}}^2)^+}{\Delta y_j} + \frac{(q_{j-\frac{1}{2}}^2)^+}{\Delta y_j} \right) \right) \\
&+ \Delta t_n \left( (u_{i+2j}^n - u_{i+1j}^n) \frac{b_{i+\frac{3}{2}j}^n (-q_{i+\frac{3}{2}}^1)^+}{\Delta x_{i+1}} + (u_{ij}^n - u_{i-1j}^n) \frac{b_{i-\frac{1}{2}j}^n (q_{i-\frac{1}{2}}^1)^+}{\Delta x_i} \right. \\
&\quad \left. + (u_{i+1j+1}^n - u_{ij+1}^n) \frac{b_{i+\frac{1}{2}j+1}^n (-q_{j+\frac{1}{2}}^2)^+}{\Delta y_j} + (u_{i+1j-1}^n - u_{ij-1}^n) \frac{b_{i+\frac{1}{2}j-1}^n (q_{j-\frac{1}{2}}^2)^+}{\Delta y_j} \right)
\end{aligned}$$

En utilisant la condition CFL (3.9) on a :

$$\begin{aligned}
&|u_{i+1j}^{n+1} - u_{ij}^{n+1}| \left( 1 + \Delta t_n \left( \frac{K^1 a^{n+1}}{\Delta x_{i+1} \Delta x_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{K^1 a^{n+1}}{\Delta x_i \Delta x_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{K^2 a^{n+1}}{\Delta y_j \Delta y_{j+\frac{1}{2}}} + \frac{K^2 a^{n+1}}{\Delta y_j \Delta y_{j-\frac{1}{2}}} \right) \right) \\
&\leq \Delta t_n \left( |u_{ij}^{n+1} - u_{i-1j}^{n+1}| \frac{K^1 a^{n+1}}{\Delta x_i \Delta x_{i-\frac{1}{2}}} + |u_{i+2j}^{n+1} - u_{i+1j}^{n+1}| \frac{K^1 a^{n+1}}{\Delta x_{i+1} \Delta x_{i+\frac{3}{2}}} \right. \\
&\quad \left. + |u_{i+1j+1}^{n+1} - u_{ij+1}^{n+1}| \frac{K^2 a^{n+1}}{\Delta y_j \Delta y_{j+\frac{1}{2}}} + |u_{i+1j-1}^{n+1} - u_{ij-1}^{n+1}| \frac{K^2 a^{n+1}}{\Delta y_j \Delta y_{j-\frac{1}{2}}} \right) \\
&+ |u_{i+1j}^n - u_{ij}^n| \left( 1 - \Delta t_n b_{i+\frac{1}{2}j}^n \left( \frac{(-q_{i+\frac{1}{2}}^1)^+}{\Delta x_i} + \frac{(q_{i+\frac{1}{2}}^1)^+}{\Delta x_{i+1}} + \frac{(-q_{j+\frac{1}{2}}^2)^+}{\Delta y_j} + \frac{(q_{j-\frac{1}{2}}^2)^+}{\Delta y_j} \right) \right) \\
&+ \Delta t_n \left( |u_{i+2j}^n - u_{i+1j}^n| \frac{b_{i+\frac{3}{2}j}^n (-q_{i+\frac{3}{2}}^1)^+}{\Delta x_{i+1}} + |u_{ij}^n - u_{i-1j}^n| \frac{b_{i-\frac{1}{2}j}^n (q_{i-\frac{1}{2}}^1)^+}{\Delta x_i} \right. \\
&\quad \left. + |u_{i+1j+1}^n - u_{ij+1}^n| \frac{b_{i+\frac{1}{2}j+1}^n (-q_{j+\frac{1}{2}}^2)^+}{\Delta y_j} + |u_{i+1j-1}^n - u_{ij-1}^n| \frac{b_{i+\frac{1}{2}j-1}^n (q_{j-\frac{1}{2}}^2)^+}{\Delta y_j} \right)
\end{aligned}$$

et par prolongement de  $u_{ij}^n$  par 0 à l'extérieur de  $\bar{\Omega}$ , on obtient en sommant sur  $i$  et  $j$  :

$$\sum_{ij \in \mathbb{Z}} |u_{i+1j}^{n+1} - u_{ij}^{n+1}| \Delta y_j \left( 1 + \Delta t_n \left( \frac{K^1 a^{n+1}}{\Delta x_{i+1} \Delta x_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{K^1 a^{n+1}}{\Delta x_i \Delta x_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{K^2 a^{n+1}}{\Delta y_j \Delta y_{j+\frac{1}{2}}} + \frac{K^2 a^{n+1}}{\Delta y_j \Delta y_{j-\frac{1}{2}}} \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \Delta t_n \left( \sum_{ij \in \mathbb{Z}} |u_{i+1j}^{n+1} - u_{ij}^{n+1}| \Delta y_j \frac{K^1 a_{i+\frac{1}{2}j}^{n+1}}{\Delta x_{i+1} \Delta x_{i+\frac{1}{2}}} + \sum_{ij \in \mathbb{Z}} |u_{i+1j}^{n+1} - u_{ij}^{n+1}| \Delta y_j \frac{K^1 a_{i+\frac{1}{2}j}^{n+1}}{\Delta x_i \Delta x_{i+\frac{1}{2}}} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{ij \in \mathbb{Z}} |u_{i+1j}^{n+1} - u_{ij}^{n+1}| \frac{K^2 a_{i+\frac{1}{2}j}^{n+1}}{\Delta y_{j-\frac{1}{2}}} + \sum_{ij \in \mathbb{Z}} |u_{i+1j}^{n+1} - u_{ij}^{n+1}| \frac{K^2 a_{i+\frac{1}{2}j}^{n+1}}{\Delta y_{j+\frac{1}{2}}} \right) \\
&+ \sum_{ij \in \mathbb{Z}} |u_{i+1j}^n - u_{ij}^n| \Delta y_j \left( 1 - \Delta t_n b_{i+\frac{1}{2}j}^n \left( \frac{(-q_{i+\frac{1}{2}}^1)^+}{\Delta x_i} + \frac{(q_{i+\frac{1}{2}}^1)^+}{\Delta x_{i+1}} + \frac{(-q_{j+\frac{1}{2}}^2)^+}{\Delta y_j} + \frac{(q_{j-\frac{1}{2}}^2)^+}{\Delta y_j} \right) \right) \\
&+ \Delta t_n \left( \sum_{ij \in \mathbb{Z}} |u_{i+1j}^n - u_{ij}^n| \Delta y_j \frac{b_{i+\frac{1}{2}j}^n (-q_{i+\frac{1}{2}}^1)^+}{\Delta x_i} + \sum_{ij \in \mathbb{Z}} |u_{i+1j}^n - u_{ij}^n| \Delta y_j \frac{b_{i+\frac{1}{2}j}^n (q_{i+\frac{1}{2}}^1)^+}{\Delta x_{i+1}} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{ij \in \mathbb{Z}} |u_{i+1j}^n - u_{ij}^n| b_{i+\frac{1}{2}j}^n (-q_{j-\frac{1}{2}}^2)^+ + \sum_{ij \in \mathbb{Z}} |u_{i+1j}^n - u_{ij}^n| b_{i+\frac{1}{2}j}^n (q_{j+\frac{1}{2}}^2)^+ \right)
\end{aligned}$$

ainsi on a l'estimation suivante :

$$\sum_{ij \in \mathbb{Z}} |u_{i+1j}^{n+1} - u_{ij}^{n+1}| \Delta y_j \leq \sum_{ij \in \mathbb{Z}} \left( 1 + \Delta t_n \sup(b') \frac{|q_{j+\frac{1}{2}}^2 - q_{j-\frac{1}{2}}^2|}{\Delta y_j} \right) |u_{i+1j}^n - u_{ij}^n| \Delta y_j$$

on établira de même que

$$\sum_{ij \in \mathbb{Z}} |u_{ij+1}^{n+1} - u_{ij}^{n+1}| \Delta x_i \leq \sum_{ij \in \mathbb{Z}} \left( 1 + \Delta t_n \sup(b') \frac{|q_{i+\frac{1}{2}}^1 - q_{i-\frac{1}{2}}^1|}{\Delta x_i} \right) |u_{ij+1}^n - u_{ij}^n| \Delta x_i$$

et par suite

$$\begin{aligned}
\|u^{n+1}\|_{BV(\Omega)} &:= \sum_{ij} |u_{ij+1}^{n+1} - u_{ij}^{n+1}| \Delta x_i + \sum_{ij} |u_{i+1j}^{n+1} - u_{ij}^{n+1}| \Delta y_j \\
&\leq \|u^n\|_{BV(\Omega)} (1 + c\Delta t) \leq \|u^0\|_{BV(\Omega)} \exp(c\tau)
\end{aligned}$$

où

$$c := \sup(b') \max \left( \left\| \frac{\partial q^1}{\partial x} \right\|_{\infty}, \left\| \frac{\partial q^2}{\partial y} \right\|_{\infty} \right) < \infty$$

Ceci termine la démonstration de la proposition 3.8. ■

### 3.5 Résultat de convergence

**Lemme 3.9** *Sous les hypothèses (H0)-(H11), et la condition CFL (3.8) [resp. (3.9)] pour le schéma explicite (3.4)-(3.5) [resp. semi-implicite (3.7)-(3.5)], on a l'estimation suivante :*

$$\|u^{n+1} - u^n\|_{L^1(\Omega)} := \sum_{i,j} \Delta x_i \Delta y_j |u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n| \leq C \Delta t \quad (3.16)$$

où  $C \left( \frac{1}{\Phi_-}, \sup(b'), \|\bar{q}\|_\infty, \|u^0\|_{BV(\Omega)}, \|K \nabla \alpha(u^0)\|_{\mathcal{B}(I \times J)} \right)$  est une constante indépendante de  $h$  et  $\Delta t$ , le même résultat est valable pour le schéma implicite (3.6)-(3.5) sans aucune condition CFL.

**Démonstration.** Pour simplifier, on présentera simplement la démonstration pour le schéma explicite. Les mêmes résultats restent valables pour les schémas implicite et semi-implicite.

Du schéma (3.4) on a, pour  $i = 1, \dots, N_x, j = 1, \dots, N_y$

$$\Phi_{ij} \frac{(u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^n)}{\Delta t_n} = \frac{v_{ij}^n}{\Delta x_i} + \frac{w_{ij}^n}{\Delta y_j} + r_{ij}^n \quad (3.17)$$

où  $v_{ij}^n, w_{ij}^n$  et  $r_{ij}^n$  sont définies par

$$\begin{aligned} v_{ij}^n &:= \left[ \frac{K_{i+\frac{1}{2}j}^1}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} (\alpha(u_{i+1j}^n) - \alpha(u_{ij}^n)) - \frac{K_{i-\frac{1}{2}j}^1}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} (\alpha(u_{ij}^n) - \alpha(u_{i-1j}^n)) \right] \\ w_{ij}^n &:= \left[ \frac{K_{ij+\frac{1}{2}}^2}{\Delta y_{j+\frac{1}{2}}} (\alpha(u_{ij+1}^n) - \alpha(u_{ij}^n)) - \frac{K_{ij-\frac{1}{2}}^2}{\Delta y_{j-\frac{1}{2}}} (\alpha(u_{ij}^n) - \alpha(u_{ij-1}^n)) \right] \\ r_{ij}^n &:= \frac{1}{\Delta x_i} \left[ (b(u_{i+1j}^n) - b(u_{ij}^n))(-qx_{i+\frac{1}{2}j})^+ - (b(u_{ij}^n) - b(u_{i-1j}^n))(qx_{i-\frac{1}{2}j})^+ \right] \\ &\quad + \frac{1}{\Delta y_j} \left[ (b(u_{ij+1}^n) - b(u_{ij}^n))(-qy_{ij+\frac{1}{2}})^+ - (b(u_{ij}^n) - b(u_{ij-1}^n))(qy_{ij-\frac{1}{2}})^+ \right] \end{aligned}$$

ainsi on a

$$\begin{aligned} v_{ij}^{n+1} - v_{ij}^n &= + \frac{K_{i+\frac{1}{2}j}^1 a_{i+1j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} (u_{i+1j}^{n+1} - u_{i+1j}^n) - \frac{K_{i-\frac{1}{2}j}^1 a_{ij}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} (u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^n) \\ &\quad - \frac{K_{i+\frac{1}{2}j}^1 a_{ij}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} (u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^n) + \frac{K_{i-\frac{1}{2}j}^1 a_{i-1j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} (u_{i-1j}^{n+1} - u_{i-1j}^n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_{ij}^{n+1} - w_{ij}^n &= + \frac{K_{ij+\frac{1}{2}}^2 a_{ij+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y_{j+\frac{1}{2}}} (u_{ij+1}^{n+1} - u_{ij+1}^n) - \frac{K_{ij-\frac{1}{2}}^2 a_{ij-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y_{j-\frac{1}{2}}} (u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^n) \\
&\quad - \frac{K_{ij+\frac{1}{2}}^2 a_{ij}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y_{j+\frac{1}{2}}} (u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^n) - \frac{K_{ij-\frac{1}{2}}^2 a_{ij-1}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y_{j-\frac{1}{2}}} (u_{ij-1}^{n+1} - u_{ij-1}^n)
\end{aligned}$$

où  $a_{ij}^{n+\frac{1}{2}} := \frac{\alpha(u_{ij}^{n+1}) - \alpha(u_{ij}^n)}{u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^n}$  si  $u_{ij}^{n+1} \neq u_{ij}^n$  et  $a_{ij}^{n+\frac{1}{2}} := \alpha'(u_{ij}^n)$  si  $u_{ij}^{n+1} = u_{ij}^n$ , et en utilisant (3.17) on a

$$\begin{aligned}
\Delta y_j v_{ij}^{n+1} &= \Delta y_j v_{ij}^n \left( 1 - \frac{\Delta t_n K_{i+\frac{1}{2}j}^1 a_{ij}^{n+\frac{1}{2}}}{\Phi_{ij} \Delta x_{i+\frac{1}{2}} \Delta x_i} - \frac{\Delta t_n K_{i-\frac{1}{2}j}^1 a_{ij}^{n+\frac{1}{2}}}{\Phi_{ij} \Delta x_{i-\frac{1}{2}} \Delta x_i} \right) \\
&\quad - \left( \frac{\Delta t_n K_{i+\frac{1}{2}j}^1 a_{ij}^{n+\frac{1}{2}}}{\Phi_{ij} \Delta x_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{\Delta t_n K_{i-\frac{1}{2}j}^1 a_{ij}^{n+\frac{1}{2}}}{\Phi_{ij} \Delta x_{i-\frac{1}{2}}} \right) (w_{ij}^n + \Delta y_j r_{ij}^n) \\
&\quad + \frac{\Delta t_n K_{i+\frac{1}{2}j}^1 a_{i+1j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Phi_{i+1j} \Delta x_{i+\frac{1}{2}}} \left( \frac{\Delta y_j v_{i+1j}^n}{\Delta x_{i+1}} + w_{i+1j}^n + \Delta y_j r_{i+1j}^n \right) \\
&\quad + \frac{\Delta t_n K_{i-\frac{1}{2}j}^1 a_{i-1j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Phi_{i-1j} \Delta x_{i-\frac{1}{2}}} \left( \frac{\Delta y_j v_{i-1j}^n}{\Delta x_{i-1}} + w_{i-1j}^n + \Delta y_j r_{i-1j}^n \right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\Delta x_i w_{ij}^{n+1} &= \Delta x_i w_{ij}^n \left( 1 - \frac{\Delta t_n K_{ij+\frac{1}{2}}^2 a_{ij}^{n+\frac{1}{2}}}{\Phi_{ij} \Delta y_{j+\frac{1}{2}} \Delta y_j} - \frac{\Delta t_n K_{ij-\frac{1}{2}}^2 a_{ij}^{n+\frac{1}{2}}}{\Phi_{ij} \Delta y_{j-\frac{1}{2}} \Delta y_j} \right) \\
&\quad - \left( \frac{\Delta t_n K_{ij+\frac{1}{2}}^2 a_{ij}^{n+\frac{1}{2}}}{\Phi_{ij} \Delta y_{j+\frac{1}{2}}} + \frac{\Delta t_n K_{ij-\frac{1}{2}}^2 a_{ij}^{n+\frac{1}{2}}}{\Phi_{ij} \Delta y_{j-\frac{1}{2}}} \right) (v_{ij}^n + \Delta x_i r_{ij}^n) \\
&\quad + \frac{\Delta t_n K_{ij+\frac{1}{2}}^2 a_{ij+1}^{n+\frac{1}{2}}}{\Phi_{ij+1} \Delta y_{j+\frac{1}{2}}} \left( v_{ij+1}^n + \frac{\Delta x_i w_{ij+1}^n}{\Delta y_{j+1}} + \Delta x_i r_{ij+1}^n \right) \\
&\quad + \frac{\Delta t_n K_{ij-\frac{1}{2}}^2 a_{ij-1}^{n+\frac{1}{2}}}{\Phi_{ij-1} \Delta y_{j-\frac{1}{2}}} \left( v_{ij-1}^n + \frac{\Delta x_i w_{ij-1}^n}{\Delta y_{j-1}} + \Delta x_i r_{ij-1}^n \right)
\end{aligned}$$

de même pour les  $r_{ij}^n$  on a

$$\begin{aligned}
r_{ij}^{n+1} = & r_{ij}^n \left( 1 - \frac{\Delta t_n b_{ij}^{n+\frac{1}{2}} (qx_{i-\frac{1}{2}j})^+}{\Phi_{ij} \Delta x_i} - \frac{\Delta t_n b_{ij}^{n+\frac{1}{2}} (qy_{ij-\frac{1}{2}})^+}{\Phi_{ij} \Delta y_j} - \frac{\Delta t_n b_{ij}^{n+\frac{1}{2}} (-qx_{i+\frac{1}{2}j})^+}{\Phi_{ij} \Delta x_i} - \frac{\Delta t_n b_{ij}^{n+\frac{1}{2}} (-qy_{ij+\frac{1}{2}})^+}{\Phi_{ij} \Delta y_j} \right) \\
& + \frac{\Delta t_n b_{i+1j}^{n+\frac{1}{2}} (-qx_{i+\frac{1}{2}j})^+}{\Phi_{i+1j} \Delta x_i} \left( \frac{v_{i+1j}^n}{\Delta x_{i+1}} + \frac{w_{i+1j}^n}{\Delta y_j} + r_{i+1j}^n \right) + \frac{\Delta t_n b_{i-1j}^{n+\frac{1}{2}} (qx_{i-\frac{1}{2}j})^+}{\Phi_{i-1j} \Delta x_i} \left( \frac{v_{i-1j}^n}{\Delta x_{i-1}} + \frac{w_{i-1j}^n}{\Delta y_j} + r_{i-1j}^n \right) \\
& + \frac{\Delta t_n b_{ij+1}^{n+\frac{1}{2}} (-qy_{ij+\frac{1}{2}})^+}{\Phi_{ij+1} \Delta y_j} \left( \frac{v_{ij+1}^n}{\Delta x_i} + \frac{w_{ij+1}^n}{\Delta y_{j+1}} + r_{ij+1}^n \right) + \frac{\Delta t_n b_{ij-1}^{n+\frac{1}{2}} (qy_{ij-\frac{1}{2}})^+}{\Phi_{ij-1} \Delta y_j} \left( \frac{v_{ij-1}^n}{\Delta x_i} + \frac{w_{ij-1}^n}{\Delta y_{j-1}} + r_{ij-1}^n \right) \\
& - \left( \frac{\Delta t_n b_{ij}^{n+\frac{1}{2}} (qx_{i-\frac{1}{2}j})^+}{\Phi_{ij} \Delta x_i} + \frac{\Delta t_n b_{ij}^{n+\frac{1}{2}} (qy_{ij-\frac{1}{2}})^+}{\Phi_{ij} \Delta y_j} + \frac{\Delta t_n b_{ij}^{n+\frac{1}{2}} (-qx_{i+\frac{1}{2}j})^+}{\Phi_{ij} \Delta x_i} + \frac{\Delta t_n b_{ij}^{n+\frac{1}{2}} (-qy_{ij+\frac{1}{2}})^+}{\Phi_{ij} \Delta y_j} \right) \left( \frac{v_{ij}^n}{\Delta x_i} + \frac{w_{ij}^n}{\Delta y_j} \right)
\end{aligned}$$

où  $b_{ij}^{n+\frac{1}{2}} := \frac{b(u_{ij}^{n+1}) - b(u_{ij}^n)}{u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^n}$  si  $u_{ij}^{n+1} \neq u_{ij}^n$  et  $b_{ij}^{n+\frac{1}{2}} := b'(u_{ij}^n)$  si  $u_{ij}^{n+1} = u_{ij}^n$ . Soit donc

$$\begin{aligned}
& (\Delta y_j v_{ij}^{n+1} + \Delta x_i w_{ij}^{n+1} + \Delta x_i \Delta y_j r_{ij}^{n+1}) = (\Delta y_j v_{ij}^n + \Delta x_i w_{ij}^n + \Delta x_i \Delta y_j r_{ij}^n) \times \\
& \left( 1 - \frac{\Delta t_n b_{ij}^{n+\frac{1}{2}} (qx_{i-\frac{1}{2}j})^+}{\Phi_{ij} \Delta x_i} - \frac{\Delta t_n b_{ij}^{n+\frac{1}{2}} (qy_{ij-\frac{1}{2}})^+}{\Phi_{ij} \Delta y_j} - \frac{\Delta t_n b_{ij}^{n+\frac{1}{2}} (-qx_{i+\frac{1}{2}j})^+}{\Phi_{ij} \Delta x_i} - \frac{\Delta t_n b_{ij}^{n+\frac{1}{2}} (-qy_{ij+\frac{1}{2}})^+}{\Phi_{ij} \Delta y_j} \right. \\
& \quad \left. - \frac{\Delta t_n K_{i+\frac{1}{2}j}^1 a_{ij}^{n+\frac{1}{2}}}{\Phi_{ij} \Delta x_{i+\frac{1}{2}} \Delta x_i} - \frac{\Delta t_n K_{i-\frac{1}{2}j}^1 a_{ij}^{n+\frac{1}{2}}}{\Phi_{ij} \Delta x_{i-\frac{1}{2}} \Delta x_i} - \frac{\Delta t_n K_{ij+\frac{1}{2}}^2 a_{ij}^{n+\frac{1}{2}}}{\Phi_{ij} \Delta y_{j+\frac{1}{2}} \Delta y_j} - \frac{\Delta t_n K_{ij-\frac{1}{2}}^2 a_{ij}^{n+\frac{1}{2}}}{\Phi_{ij} \Delta y_{j-\frac{1}{2}} \Delta y_j} \right) \\
& + \left( \frac{\Delta t_n K_{i+\frac{1}{2}j}^1 a_{i+1j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Phi_{i+1j} \Delta x_{i+\frac{1}{2}} \Delta x_{i+1}} + \frac{\Delta t_n b_{i+1j}^{n+\frac{1}{2}} (-qx_{i+\frac{1}{2}j})^+}{\Phi_{i+1j} \Delta x_{i+1}} \right) (\Delta y_j v_{i+1j}^n + \Delta x_{i+1} w_{i+1j}^n + \Delta x_{i+1} \Delta y_j r_{i+1j}^n) \\
& + \left( \frac{\Delta t_n K_{i-\frac{1}{2}j}^1 a_{i-1j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Phi_{i-1j} \Delta x_{i-\frac{1}{2}} \Delta x_{i-1}} + \frac{\Delta t_n b_{i-1j}^{n+\frac{1}{2}} (qx_{i-\frac{1}{2}j})^+}{\Phi_{i-1j} \Delta x_{i-1}} \right) (\Delta y_j v_{i-1j}^n + \Delta x_{i-1} w_{i-1j}^n + \Delta x_{i-1} \Delta y_j r_{i-1j}^n) \\
& + \left( \frac{\Delta t_n K_{ij+\frac{1}{2}}^2 a_{ij+1}^{n+\frac{1}{2}}}{\Phi_{ij+1} \Delta y_{j+\frac{1}{2}} \Delta y_{j+1}} + \frac{\Delta t_n b_{ij+1}^{n+\frac{1}{2}} (-qy_{ij+\frac{1}{2}})^+}{\Phi_{ij+1} \Delta y_{j+1}} \right) (\Delta y_{j+1} v_{ij+1}^n + \Delta x_i w_{ij+1}^n + \Delta x_i \Delta y_{j+1} r_{ij+1}^n) \\
& + \left( \frac{\Delta t_n K_{ij-\frac{1}{2}}^2 a_{ij-1}^{n+\frac{1}{2}}}{\Phi_{ij-1} \Delta y_{j-\frac{1}{2}} \Delta y_{j-1}} + \frac{\Delta t_n b_{ij-1}^{n+\frac{1}{2}} (qy_{ij-\frac{1}{2}})^+}{\Phi_{ij-1} \Delta y_{j-1}} \right) (\Delta y_{j-1} v_{ij-1}^n + \Delta x_i w_{ij-1}^n + \Delta x_i \Delta y_{j-1} r_{ij-1}^n)
\end{aligned}$$

d'où en utilisant la condition CFL (3.8) on en déduit que

$$\sum_{i,j} \Phi_{ij} \frac{\Delta x_i \Delta y_j}{\Delta t_n} |u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n| = \sum_{i,j} |\Delta y_j v_{ij}^n + \Delta x_i w_{ij}^n + \Delta x_i \Delta y_j r_{ij}^n|$$

est décroissante, et finalement on a

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j} \Phi_{ij} \frac{\Delta x_i \Delta y_j}{\Delta t_n} |u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n| \\ & \leq \sum_{ij} |\Delta y_j v_{ij}^0 + \Delta x_i w_{ij}^0| + \sum_{ij} \Delta x_i \Delta y_j |r_{ij}^0| \\ & \leq \|K \nabla \alpha (u^0)\|_{\mathcal{B}(I \times J)} + 2 \sup(b') \|\bar{q}\|_{\infty} \|u^0\|_{BV(\Omega)} \end{aligned}$$

soit

$$\sum_{i,j} \frac{\Delta x_i \Delta y_j}{\Delta t_n} |u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n| \leq C$$

où

$$C := \frac{1}{\Phi_-} \left( \|K \nabla \alpha (u^0)\|_{\mathcal{B}(I \times J)} + 2 \sup(b') \|\bar{q}\|_{\infty} \|u^0\|_{BV(\Omega)} \right)$$

ceci complète la démonstration du lemme 3.9. ■

**Remarque 3.10** *Le lemme 3.9 exprime la  $L^1$  continuité en temps de la solution approchée.*

**Corollaire 3.11** *Si de plus on a les hypothèses (H12)-(H14) alors on a pour la semi-norme discrète suivante :*

$$\|div (K \nabla \alpha (u^n))\|_{L^1(\Omega)}^* := \sum_{ij} \Delta x_i \Delta y_j \left| \frac{v_{ij}^n}{\Delta x_i} + \frac{w_{ij}^n}{\Delta y_j} \right| \leq C \quad (3.18)$$

**Démonstration.** En effet on a :

$$\begin{aligned}
& \sum_{ij} \Delta x_i \Delta y_j \left| \frac{v_{ij}^n}{\Delta x_i} + \frac{w_{ij}^n}{\Delta y_j} \right| \\
& \leq \sum_{i,j} \frac{\Delta x_i \Delta y_j}{\Delta t_n} |u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n| + \sum_{ij} \Delta x_i \Delta y_j |r_{ij}^n| \\
& \leq \frac{1}{\Phi_-} \left( \|K \nabla \alpha(u^0)\|_{\mathcal{B}(I \times J)} + 2 \sup(b') \|\vec{q}\|_\infty \|u^0\|_{BV(\Omega)} \right) \\
& \quad + 2 \sup(b') \|\vec{q}\|_\infty \exp(c\tau) \|u^0\|_{BV(\Omega)}
\end{aligned}$$

soit donc

$$\sum_{ij} \Delta x_i \Delta y_j \left| \frac{v_{ij}^n}{\Delta x_i} + \frac{w_{ij}^n}{\Delta y_j} \right| \leq C$$

où

$$C := \frac{1}{\Phi_-} \|K \nabla \alpha(u^0)\|_{\mathcal{B}(I \times J)} + 2 \left( \frac{1}{\Phi_-} + \exp(c\tau) \right) \sup(b') \|\vec{q}\|_\infty \|u^0\|_{BV(\Omega)}$$

Ceci termine la démonstration du corollaire 3.11. ■

Introduisons maintenant la **solution faible**  $u$  pour le problème homogène associé à  $(P_2)$ , pour  $u|_{\Gamma_1} = 0$ , soit :

$$\left\{ \begin{array}{ll}
u : ]0, \tau[ \longrightarrow W_0; 0 \leq u(x, y, t) \leq 1 \text{ p.p. dans } Q_\tau & (i) \\
u_t \in L^2(0, \tau; W') \text{ et } \alpha(u) \in L^2(0, \tau; W) & (ii) \\
\iint\iint_{Q_\tau} [\Phi u v_t + (b(u)\vec{q} - K \nabla \alpha(u)) \cdot \nabla v] dx dy dt \\
+ \iint_\Omega \Phi u^0 v(x, y, 0) dx dy = 0 \quad \forall v \in V & (iii)
\end{array} \right. \quad (3.19)$$

où les espaces fonctionnels  $W$ ,  $W_0$  et  $V$  sont définis par :

$$\begin{aligned}
W &= \{w \in H^1(\Omega); w = 0 \text{ sur } \Gamma_3\} \\
W_0 &= \{u \in L^2(\Omega); \alpha(u) \in W; \alpha(u) = 0 \text{ sur } \Gamma_1\} \\
V &= \{v \in C^1(0, \tau; C^2(\bar{\Omega})); v(\cdot, \tau) \equiv 0 \text{ et } v|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_3} = 0\}
\end{aligned}$$

Le problème non homogène sera étudié dans la Remarque 3.13.

Les données du problème sont supposées assez régulières pour garantir l'existence et l'unicité de la solution faible du problème. Pour plus de détails, on se réfère à [CHJ86, GAM96, JIN90]. On définit l'approximation  $u_h$  par  $u_h(x, y, t) := u_{ij}^n$  pour tout  $(x, y, t) \in M_{ij} \times [t_n, t_{n+1}[$ , nous avons ainsi le résultat suivant :

**Théorème 3.12** *Sous les hypothèses (H0)-(H14), et la condition CFL (3.8) [resp. (3.9)], l'approximation  $u_h$  donnée par le schéma explicite (3.4)-(3.5) [resp. semi-implicite (3.7)-(3.5)], converge vers  $u$  dans  $L^1(Q_\tau)$  quand  $h$  et  $\Delta t$  tendent vers zéro. Le même résultat est valable pour le schéma implicite (3.6)-(3.5) sans aucune condition CFL.*

**Démonstration.** Des propositions 3.6, 3.7, 3.8 et du lemme 3.9 ( $u_h$ ) est bornée dans  $L^\infty(Q_\tau) \cap BV(Q_\tau) \subsetneq L^1(Q_\tau)$  avec **injection compacte** . On peut ainsi extraire une sous-suite encore notée ( $u_h$ ), telle que

$$u_h \longrightarrow u^* \quad \text{dans } L^1(Q_\tau) \quad (3.20)$$

quand  $h$  et  $\Delta t$  tendent vers 0, où la limite  $u^* \in L^\infty(Q_\tau) \cap BV(Q_\tau)$  (voir **Evans & Gariepy** [EVG92] p. 176).

On pose  $\tilde{u}_h := u_h$  dans  $Q_\tau$  et  $\tilde{u}_h := 0$  dans  $(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+) \setminus Q_\tau$ , on peut aussi extraire une sous-suite, encore notée  $\tilde{u}_h$ , telle que

$$\begin{aligned} \tilde{u}_h &\longrightarrow \tilde{u}^* \quad \text{dans } L^1_{loc}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+) \\ \text{et } u^* &= \tilde{u}^*|_{Q_\tau} \in L^1(0, \tau; H^1_{\Gamma_1 \cup \Gamma_3}(\Omega)) \end{aligned}$$

où  $H^1_{\Gamma_1 \cup \Gamma_3}(\Omega) = \{w \in H^1(\Omega); w = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_3\}$ , d'où

$$u_h \longrightarrow u^* \quad \text{sur } L^1(Q_\tau) \quad \text{et } u^* \in L^1(0, \tau; W_0)$$

A ce stade, on conclut que  $u^*$  vérifie (3.19)-(i), (ii). Il reste à montrer que  $u^*$  satisfait (3.19)-(iii). Pour cela, soit  $v \in V$  une fonction test et notons par

$v_M^n = v(x_i, y_j, t_n)$ . En multipliant par  $\frac{|M|}{\Delta t_n} v_M^n \Phi_M$  le schéma (3.4), et en sommant sur  $i, j$  et  $n$ , on obtient :

$$\begin{aligned} & \sum_{n,M} \Delta t_n |M| v_M^n \Phi_M \frac{u_M^{n+1} - u_M^n}{\Delta t_n} + \sum_{n,M} \Delta t v_M^n \sum_{l \in \partial M} b(u)_l^n (\vec{q}_l \cdot \vec{n}_{M,l}) |l| \\ &= \sum_{n,M} \Delta t v_M^n \sum_{l \in \partial M \setminus \Gamma} (\alpha(u_{M_l}^n) - \alpha(u_M^n)) \frac{K_l}{\delta_{M,l}} \end{aligned} \quad (3.21)$$

On transforme cette sommation (3.21) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} & - \sum_M |M| v_M^0 \Phi_M u_M^0 + \sum_{n,M} \Delta t_n |M| \Phi_M u_M^{n+1} \frac{v_M^n - v_M^{n+1}}{\Delta t_n} \\ & + \sum_{n,M} \Delta t v_M^n \sum_{l \in \partial M} b(u)_l^n (\vec{q}_l \cdot \vec{n}_{M,l}) |l| \\ &= \sum_{n,M} \Delta t v_M^n \sum_{l \in \partial M \setminus \Gamma} (\alpha(u_{M_l}^n) - \alpha(u_M^n)) \frac{K_l}{\delta_{M,l}} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Prenons en considération les hypothèses sur les données et utilisons le théorème Lebesgue, quand  $h$  et  $\Delta t$  tendent vers 0, il suit que

$$\begin{aligned} & - \sum_M |M| v_M^0 \Phi_M u_M^0 \longrightarrow - \iint_{\Omega} \Phi u^0 v dx dy \\ & \sum_{n,M} \Delta t_n |M| \Phi_M u_M^{n+1} \frac{v_M^n - v_M^{n+1}}{\Delta t_n} \longrightarrow - \iiint_{\Omega_\tau} \Phi u^* v_t dt dx dy \end{aligned}$$

de même

$$\begin{aligned} & \sum_{n,M} \Delta t v_M^n \sum_{l \in \partial M} b(u)_l^n (\vec{q}_l \cdot \vec{n}_{M,l}) |l| = \sum_{n,M} \Delta t v_M^n \sum_{l \in \partial M} (b(u)_l^n - b(u_M^n)) (\vec{q}_l \cdot \vec{n}_{M,l}) |l| \\ &= \sum_{n,M} \Delta t_n \sum_{l \in \partial M} [(b(u)_l^n - b(u_M^n)) (\vec{q}_l \cdot \vec{n}_{M,l}) |l| (v_M^n - v_l^n) - v_l^n b(u_M^n) (\vec{q}_l \cdot \vec{n}_{M,l}) |l|] \\ &= R - \sum_{n,M} \Delta t b(u_M^n) \sum_{l \in \partial M} \int_l v_l^n (\vec{q}_l \cdot \vec{n}_{M,l}) ds \end{aligned}$$

où

$$|R| \leq \sum_{n,M} \Delta t_n \sum_{l \in \partial M} |b(u_l^n) - b(u_M^n)| |\vec{q}_l \cdot \vec{n}_{M,l}| |l| |v_M^n - v_l^n|$$

et par suite, d'après la proposition 3.8 on a

$$\begin{aligned} |R| &\leq c(v)h \sum_n \Delta t_n \sum_l |b(u_{M_l}^n) - b(u_M^n)| |\vec{q}_l \cdot \vec{n}_{M,l}| |l| \\ &\leq c(v)h \sup(b') \|\vec{q}\|_\infty C\tau \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

de plus on a

$$\begin{aligned} - \sum_{n,M} \Delta t b(u_M^n) \sum_{l \in \partial M} \int_l v_l^n (\vec{q}_l \cdot \vec{n}_{M,l}) ds &= - \sum_{n,M} \Delta t_n \int_M b(u_M^n) \operatorname{div}(v^n \vec{q}_l) dx dy \\ &= - \sum_{n,M} \Delta t_n \int_M b(u_M^n) (\vec{q}_l \cdot \nabla v^n) dx dy \\ &\longrightarrow - \iiint_{\Omega_\tau} b(u^*) (\vec{q} \cdot \nabla v) dt dx dy \end{aligned}$$

ainsi

$$\sum_{n,M} \Delta t v_M^n \sum_{l \in \partial M} b(u_l^n) \vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l} |l| \longrightarrow - \iiint_{\Omega_\tau} b(u^*) \vec{q} \cdot \nabla v dt dx dy$$

il reste le dernier terme de (3.22) qui peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} &- \sum_{n,M} \Delta t \alpha(u_M^n) \sum_{l \in \partial M \setminus \Gamma} K_l \frac{(v_{M_l}^n - v_M^n)}{\delta(M, M_l)} \\ &= - \sum_{n,M} \Delta t \alpha(u_M^n) \sum_{l \in \partial M \setminus \Gamma} K_l \nabla v_l^n \cdot \vec{n}_{M,l} |l| \end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned}
& - \sum_{n,M} \Delta t \alpha(u_M^n) \sum_{l \in \partial M \setminus \Gamma} K_l \nabla v_l^n \cdot \vec{n}_{M,l} |l| \\
& = \sum_{n,M} \Delta t \alpha(u_M^n) \sum_{l \in \partial M \cap \Gamma} K_l \nabla v_l^n \cdot \vec{n}_{M,l} |l| - \sum_{n,M} \Delta t \alpha(u_M^n) \sum_{l \in \partial M} K_l \nabla v_l^n \cdot \vec{n}_{M,l} |l| \\
& \longrightarrow \int_0^\tau \int_\Gamma \alpha(u^*) (K(x) \nabla v) \cdot \vec{n} ds dt - \iiint_{\Omega_\tau} \alpha(u^*) \operatorname{div} (K(x) \nabla v) dt dx dy \\
& = \iiint_{\Omega_\tau} K(x) \nabla \alpha(u^*) \cdot \nabla v dt dx dy
\end{aligned}$$

Finalement, passons à la limite dans (3.22) il vient que

$$\iiint_{\Omega_\tau} [\Phi u^* v_t + (b(u^*) \vec{q} - K \nabla \alpha(u^*)) \cdot \nabla v] dt dx dy + \iint_\Omega \Phi u^0 v(x, 0) dx dy = 0$$

D'où  $u^*$  est la solution faible du problème (3.19) lequel admet une unique solution  $u$ . Donc la suite  $(u_h)$  converge vers  $u$ . ■

**Remarque 3.13** (*Problème non homogène*). Soit  $\tilde{U}$  la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \tilde{U} \in H^1(\Omega) \\ -\operatorname{div} (K(x) \nabla \tilde{U}) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \tilde{U}|_{\Gamma_1} = \alpha(u_0), K \nabla \tilde{U} \cdot \vec{n}|_{\Gamma_2} = 0 \text{ et } \tilde{U}|_{\Gamma_3} = 0 \end{cases}$$

et

$$\tilde{U}_h = \begin{cases} \tilde{U}_M := \frac{1}{|M|} \int_M \tilde{U}(x) dx & \text{dans } M \in \Sigma_h \\ \tilde{U}_l := \frac{1}{|l|} \int_l \tilde{U}(s) ds & \text{sur } l \in \Gamma \end{cases}$$

D'après le lemme 2 de **Eymard & al.** [EGH99] basé sur l'**inégalité de trace**, on a l'estimation suivante :

$$\sum_{l \in \mathcal{L}_h} (\tilde{U}_{M_l} - \tilde{U}_M)^2 + \sum_{l \in \Gamma} (\tilde{U}_{M_l} - \tilde{U}_l)^2 \leq C \|\tilde{U}\|_{H^1(\Omega)}^2$$

Et par suite pour le problème non homogène  $(P_2)$ , on pose  $\tilde{u}_h := u_h - \alpha^{-1}(\tilde{U}_h)$  dans  $Q_\tau$  et  $\tilde{u}_h := 0$  dans  $(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+) \setminus Q_\tau$ , ainsi la démonstration du théorème 3.12 précédent reste valable pour  $\tilde{u}_h$ .

## 3.6 Conclusion

Le but de ce chapitre était de développer des schémas volumes finis avec des maillages rectangulaires, pour une équation non linéaire bi-dimensionnelle de convection-diffusion dégénérée. Nous avons traité et analysé trois familles de tels schémas. Après avoir établi que les schémas sont  $L^\infty, BV$  stables, sous les conditions CFL appropriées et satisfont le principe du maximum discret, nous avons obtenu des résultats de convergence vers la solution faible du problème.

Pour avoir une estimation  $BV$  forte, et par suite une convergence forte dans  $L^1(Q_\tau)$ , comme dans le cas mono-dimensionnel, on est amené à faire des hypothèses supplémentaires sur les données. Les techniques de démonstration introduite ici s'étendent aux problèmes à domaine non bornés, vu que les estimations obtenus ne dépendent pas de la mesure de  $\Omega$ .

L'extension de la présente technique au problème tri-dimensionnel avec un maillage formé de parallélépipède est immédiate.



# Chapitre 4

## Convergence pour des maillages non-structurés dans le cas multi-dimensionnel

### 4.1 Introduction

On s'intéresse dans ce chapitre, aux schémas volumes finis pour des maillages non structurés, associés au problème de convection-diffusion non-linéaire dégénéré, vu au chapitre 1, de la forme :

$$(P_d) \begin{cases} 0 \leq u(x, t) \leq 1 & \text{dans } Q_\tau \\ \Phi(x) \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(b(u)\vec{q}) - \operatorname{div}(K(x) \nabla \alpha(u)) = 0 & \text{dans } Q_\tau \\ u|_{\Gamma_1} = u_0, K \nabla \alpha(u) \cdot \vec{n}|_{\Gamma_2} = 0 \text{ et } u|_{\Gamma_3} = 0 & \text{sur } [0, \tau[ \\ u(x, 0) = u^0(x) & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (4.1)$$

où  $u(x, t)$  est la saturation de l'eau,  $\vec{q}(x, t)$  la vitesse totale,  $\Phi(x)$  la porosité du milieu poreux et  $K(x)$  le tenseur des perméabilités absolues du réservoir  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ( $d = 2, 3$ ) supposé de frontière  $\Gamma$  polyédrique et formée de trois parties, telle que  $\Gamma = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2 \cup \bar{\Gamma}_3$ , avec  $|\Gamma_i| > 0$  et  $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$  pour  $i \neq j$ ;  $\Gamma_1$  est la partie du bord où l'eau est injectée,  $\Gamma_2$  la partie imperméable et  $\Gamma_3$  la partie de production. Soit  $[0, \tau[$  l'intervalle de temps d'étude, on note  $Q_\tau := \Omega \times [0, \tau[$ .  $\alpha(u)$  et  $b(u)$  sont des fonctions non linéaires qui dépendent de la mobilité et

de la pression capillaire (voir chapitre 1), avec le coefficient de diffusion  $a := \alpha'$  vérifiant :  $a(0) = a(1) = 0$  (dégénérescence du terme de diffusion).  $u_0 \in \{0, 1\}$ . Pour d'autres applications, l'effet de gravité et des conditions aux limites peuvent être spécifiés. La technique développée ici reste applicable pour de tels problèmes. Pour plus de détails sur l'analyse mathématique de ces problèmes voir [AKM90, CHJ86, FAS95, GAM96].

Ce chapitre est organisé comme suit : Dans la section 4.2, on introduit les hypothèses sur les données du problème  $(P_d)$ , sous lesquelles le problème sera étudié par la suite. Dans la section 4.3, nous présentons la discrétisation par volumes finis du problème  $(P_d)$  en utilisant un maillage non-structuré. Dans la section 4.4, nous présentons des résultats de stabilité  $L^\infty$  et des estimations  $BV$  faibles sous des conditions CFL appropriées. Un résultat de convergence sera donné dans la section 4.6. Les résultats de ce chapitre ont fait l'objet des publications [AFA99, AFA00]. Ces résultats sont obtenus grâce à des techniques développées par **Eymard, Gallouët & Herbin** [EGH00] et l'introduction d'une nouvelle approche du gradient pour le flux de diffusion non linéaire et anisotrope.

## 4.2 Hypothèses sur les données

Dans la suite, nous supposons que les données du problème vérifient les hypothèses suivantes, qui assurent l'existence et l'unicité d'une solution faible du problème (voir proposition 1.3) :

**(H0)**  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$ , de frontière polyédrique  $\Gamma = \partial\Omega$ .

**(H1)**  $\Phi \in L^\infty(\Omega)$  telle que  $0 < \Phi_- \leq \Phi(x) \leq \Phi^+ \leq 1$ , p.p. dans  $\Omega$ .

**(H2)**  $K$  est un tenseur symétrique défini positif, uniformément borné dans  $\Omega$  (c.à.d.  $\forall \xi \neq 0, 0 < K_- |\xi|^2 \leq \xi^t K(x) \xi \leq K^+ |\xi|^2 < \infty$  p.p. dans  $\Omega$ ).

**(H3)**  $\alpha \in \mathcal{C}^1([0, 1])$  tel que pour  $a := \alpha'$ ,  $a(0) = a(1) = 0$  et  $a(s) > 0 \forall s \in ]0, 1[$ .

**(H4)**  $b \in \mathcal{C}^1([0, 1])$  est une fonction monotone telle que  $b'(s) > 0 \forall s \in ]0, 1[$ .

- (H5)  $u^0 \in L^\infty(\Omega)$  tel que  $0 \leq u^0(x) \leq 1$  p.p. dans  $\Omega$ .
- (H6)  $\vec{q} \in L^2(0, \tau; H(\operatorname{div}, \Omega))$ , telle que  $\operatorname{div}(\vec{q}) = 0$ ,  $\vec{q} \cdot \vec{n}|_{\Gamma_1} = -q_d < 0$ ,  $\vec{q} \cdot \vec{n}|_{\Gamma_2} = 0$  et  $\vec{q} \cdot \vec{n}|_{\Gamma_3} > 0$ .
- (H7)  $\vec{q} \in (L^\infty(Q_\tau))^d$ .
- (H8)  $\alpha^{-1}$  est une fonction continue hölderienne d'exposant  $\theta \in ]0, 1[$  et  $b \circ \alpha^{-1}$  une fonction continue hölderienne d'exposant  $\frac{1+\theta}{2}$ .

Une **solution faible**  $u$  pour le problème  $(P_d)$  est définie par :

$$(P_d^*) \begin{cases} u : ]0, \tau[ \longrightarrow W_0; 0 \leq u(x, t) \leq 1 \text{ p.p. dans } Q_\tau & (i) \\ u_t \in L^2(0, \tau; W') \text{ et } \alpha(u) \in L^2(0, \tau; W) & (ii) \\ \int \int_{Q_\tau} (\Phi u v_t + [b(u)\vec{q} - K \nabla \alpha(u)] \cdot \nabla v) dt dx \\ + \int_\Omega \Phi u^0 v(x, 0) dx = 0 \quad \forall v \in V & (iii) \end{cases} \quad (4.2)$$

où les espaces fonctionnels  $W$ ,  $W_0$  et  $V$  sont définis par :

$$\begin{aligned} W &:= \{w \in H^1(\Omega); w = 0 \text{ sur } \Gamma_3\} \\ W_0 &:= \{u \in L^2(\Omega); \alpha(u) \in W; \alpha(u) = \alpha(u_0) \text{ sur } \Gamma_1\} \\ V &:= \{v \in C^1(0, \tau; C^2(\bar{\Omega})); v(\cdot, \tau) \equiv 0 \text{ et } v = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_3\} \end{aligned}$$

## 4.3 Discrétisation par volumes finis

Avant de présenter la discrétisation par volumes finis pour le problème  $(P_d)$ , on donne quelques notations :

### 4.3.1 Notations

- $(t_n)_{n=0, \dots, N_\tau}$  une partition de  $[0, \tau]$  en des intervalles de pas de temps  $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ , avec  $\Delta t := \max_n \Delta t_n$ .
- $\Lambda_h := (T_i)_{i=1, \dots, N_e}$  une triangulation de  $\bar{\Omega}$ , par des triangles pour  $(d = 2)$  ou des tétraèdres pour  $(d = 3)$ .

- $\Sigma_h := (M_i)_{i=1, \dots, N_s}$  le **maillage dual** centré sur les noeuds de la triangulation  $\Lambda_h$  (voir Figure 4.1), appelé aussi **volume de contrôle**.
- On note par  $x_M := \bigcap_{T \cap M \neq \emptyset} \partial T \in M$ , les noeuds de la triangulation.
- $x_T := \bigcap_{M \cap T \neq \emptyset} \partial M \in T$  le barycentre de  $T \in \Lambda_h$ , cas du **maillage de Donald** [FRO98, MIC96].
- $l := \partial M_i \cap \partial M_j \cap T$  le segment (si  $d=2$ ) [resp. la face (si  $d=3$ )] joignant le point  $x_T$  et le milieu de  $(x_{M_i}, x_{M_j})$  [resp. le point  $x_T$ , le milieu de  $(x_{M_i}, x_{M_j})$  et les barycentres des faces  $L \in \partial T$  tel que  $L \cap [x_{M_i}, x_{M_j}] \neq \emptyset$  (si  $d=3$ )] (voir Figure 4.1).
- $\delta_{M,l} := \delta(x_M, x_{M_l})$  est la distance euclidienne entre  $x_M$  et  $x_{M_l}$ .
- $\mathcal{L}_h := \{l \in \partial M \setminus \Gamma, \text{ pour } M \in \Sigma_h\}$ , et on note  $x_l$  le centre de  $l \in \mathcal{L}_h$ .
- $N_M^0 := \text{card} \{l \in \partial M\}$ .
- $h := \min \left\{ (|l|)^{\frac{1}{d-1}} ; l \in \partial M, M \in \Sigma_h \right\}$ .
- $H := \sup \left\{ (|L|)^{\frac{1}{d-1}} ; L \in \partial T, T \in \Lambda_h \right\}$ .
- Pour  $\Phi \in L^\infty(\Omega)$ , on pose  $\Phi_M := \frac{1}{|M|} \int_M \Phi(x) dx$ .
- Pour des raisons de simplicité, on suppose la fonction  $K$  constante par maille et on pose  $K_T := K|_T$ .
- Pour  $u^0 \in L^\infty(\Omega)$ , on pose  $u_M^0 := \frac{1}{|M|} \int_M u^0(x) dx$ .
- Soit  $u_M^n$  [resp.  $u_l^n$ ] une approximation de  $u$  au point  $(x_M, t_n)$  supposée constante sur la maille  $M$  [resp. au point  $(x_l, t_n)$  supposée constante sur  $l \in \partial M$ ].

Ces approximations seront définies par les schémas numériques qui suivent. On aura besoin aussi de l'hypothèse suivante, sur la **régularité du maillage** :

(H9)  $\sup_h \left( \max_M N_M^0 \right) = N^0 < \infty$ , et  $\exists \beta > \gamma > 0$  indépendantes de  $h$ , tel que :

$$\gamma H \leq |M|^{\frac{1}{d}} \leq \beta h \quad (4.3)$$

On notera ici que :

$$\left( \frac{\gamma}{\beta} \right) H \leq h \leq |T|^{\frac{1}{d}} \leq H \leq \left( \frac{\beta}{\gamma} \right) h \quad (4.4)$$

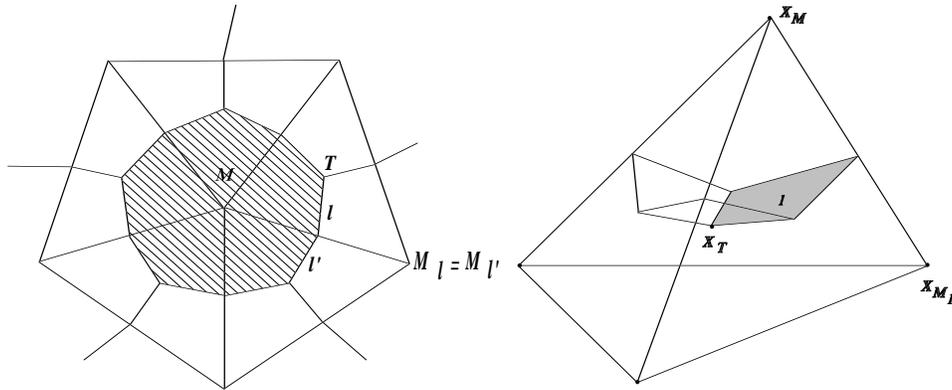


Fig. 4.1: Maillage dual dans  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$

### 4.3.2 Définition

En intégrant (4.1) dans  $M \times [t_n, t_{n+1}]$  où  $M \in \Sigma_h$ , on obtient le schéma suivant

$$\begin{aligned} \Phi_M (u_M^{n+1} - u_M^n) |M| &= \sum_{l \in \partial M} \int_{t_n}^{t_{n+1}} b(u)_l (-\vec{q}_l \cdot \vec{n}_{M,l}) |l| dt \\ &+ \sum_{l \in \partial M} \int_{t_n}^{t_{n+1}} K_l \nabla \alpha(u)_l \cdot \vec{n}_{M,l} |l| dt \end{aligned} \quad (4.5)$$

où  $\vec{n}_{M,l}$  est la normale extérieure à  $l \in \partial M$ . Ce schéma peut s'écrire sous la forme suivante:

$$u_M^{n+1} = u_M^n + \frac{\Delta t_n}{\Phi_M |M|} \sum_{l \in \partial M} (F_{M,l}) + \frac{\Delta t_n}{\Phi_M |M|} \sum_{l \in \partial M} (G_{M,l}) \quad (4.6)$$

où  $F_{M,l}$  et  $G_{M,l}$  sont respectivement le **flux de convection** et le **flux de diffusion**, entrant à travers l'arête  $l \in \partial M$ , définis par

$$F_{M,l} := \frac{|l|}{\Delta t_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} b(u)_l (-\vec{q}_l \cdot \vec{n}_{M,l}) dt \quad (4.7)$$

et

$$G_{M,l} := \frac{|l|}{\Delta t_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} K_l \nabla \alpha(u)_l \cdot \vec{n}_{M,l} dt \quad (4.8)$$

Soient  $F_{M,l}^*$  et  $G_{M,l}^*$  des approximations respectivement de  $F_{M,l}$  et  $G_{M,l}$ , appelés aussi **flux numériques**.

La conservation des flux numériques est caractérisée par l'égalité entre le flux entrant et le flux sortant à travers une interface  $l \in \partial M$  [EGH00, KRO97].

La consistance du flux numérique est tel que l'ordre de l'approximation numérique choisi pour le flux doit être supérieure ou égale 1. [EGH00, KRO97]

Ainsi d'après ces définitions de la conservation et de la consistance, pour les flux numériques des termes de convection et de diffusion, cités séparément dans [EGH00, KRO97] on peut les généraliser par :

**Définition 4.1 (Conservativité)** *On dira que les flux approchés  $F_{M,l}^*$  et  $G_{M,l}^*$  sont conservatifs au sens des volumes finis, si on a une conservation locale*

$$F_{M,l}^* + F_{M_l,l}^* = 0 \text{ et } G_{M,l}^* + G_{M_l,l}^* = 0 \text{ pour tout } l \in \mathcal{L}_h \quad (4.9)$$

*plus une conservation globale*

$$\sum_{l \in \partial M \cap \Gamma} F_{M,l}^* = \int_{\Gamma} b(u) (-\vec{q} \cdot \vec{n}) ds \text{ et } \sum_{l \in \partial M \cap \Gamma} G_{M,l}^* = \int_{\Gamma} K \nabla \alpha(u) \cdot \vec{n} ds \quad (4.10)$$

Pour une approximation  $F_{M,l}^*$  à deux points  $(M, M_l)$  et  $G_{M,l}^*$  une approximation à  $p$  points  $(M_i)_{i=1}^p$ , on a la définition suivante :

**Définition 4.2 (Consistance)** On dira que les flux approchés  $F_{M,l}^*$  et  $G_{M,l}^*$  sont consistants au sens des volumes finis, si on a :

$$\begin{aligned} F_{M,l}^*(v, v) &= b(v)(-\vec{q}_l \cdot \vec{n}_{M,l}) |l| && \text{pour tout } v \in [0, 1], \text{ et} \\ G_{M,l}^*((u_{M_i})_{i=1}^p) &= K_l \nabla \alpha(u)_l \cdot \vec{n}_{M,l} |l| + \theta(h) && \text{pour tout } u \text{ assez régulière} \end{aligned} \quad (4.11)$$

où  $|\theta(h)| \leq Ch$ , ( $C \in \mathbb{R}_+$  qui ne dépend que de  $u$ ).

**Définition 4.3 (Volumes Finis)** On dira qu'un schéma numérique pour le problème  $(P_d)$  est de type volumes finis, si les flux numériques approchés sont conservatifs et consistants au sens des définitions 4.1 et 4.2.

De (4.5) on déduit trois familles de schémas de type volumes finis; l'un est explicite les deux autres sont implicite et semi-implicite.

### 4.3.3 Schéma explicite

En utilisant une approximation explicite dans (4.5), on a :

pour tout  $M \in \Sigma_h$

$$\begin{aligned} \Phi_M (u_M^{n+1} - u_M^n) |M| + \Delta t_n \sum_{l \in \partial M} b(u)_l^n \vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l} dl \\ = \Delta t_n \sum_{l \in \partial M \setminus \Gamma} K_l \nabla \alpha(u)_l^n \cdot \vec{n}_{M,l} dl \end{aligned} \quad (4.12)$$

qui peut s'écrire sous la forme suivante

$$\begin{aligned} u_M^{n+1} &= u_M^n + \frac{\Delta t_n}{\Phi_M |M|} \sum_{l \in \partial M} b(u)_l^n (-\vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l}) |l| \\ &+ \frac{\Delta t_n}{\Phi_M |M|} \sum_{T \cap M \neq \emptyset} \sum_{l \in \partial M \cap T \setminus \Gamma} \nabla \alpha(u)_T^n \cdot K_T \vec{n}_{M,l} |l| \end{aligned} \quad (4.13)$$

où

$$b(u)_l^n := \begin{cases} b(u_M^n) & \text{si } \vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l} \geq 0 \\ b(u_{M_l}^n) & \text{si } \vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l} < 0 \end{cases} \quad (4.14)$$

où  $M_l$  est la maille voisine à  $M$  suivant le côté  $l$  (c. à. d. tel que  $l \in M_l \cap M$ ) si  $l \in \mathcal{L}_h$  et si  $l \in \Gamma$  on a  $u_{M_l}^n = u_0$  pour  $l \in \Gamma_1$  et  $\vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l} \geq 0$  pour  $l \in \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ . Le terme de convection est approché par un schéma de Godunov décentré amont (voir **Godunov** [GOD76]).

Maintenant pour  $T \cap M \neq \emptyset$  on a :

$$\begin{aligned} \sum_{l \in \partial M \cap T \setminus \Gamma} \nabla \alpha(u)_T^n \cdot K_T \vec{n}_{M,l} |l| &= \nabla \alpha(u)_T^n \cdot K_T \sum_{l \in \partial M \cap T \setminus \Gamma} \vec{n}_{M,l} |l| \\ &= -\nabla \alpha(u)_T^n \cdot K_T \sum_{l \in \partial T \cap M} \vec{n}_{T,l} |l| \\ &= \frac{1}{d} \nabla \alpha(u)_T^n \cdot K_T \vec{n}_{T,L} |L| \end{aligned} \quad (4.15)$$

où  $L \in \partial T$  est tel que  $L \cap M = \emptyset$ .

On considère les éléments de base des fonctions standards éléments finis  $\mathcal{P}_1$  satisfaisant  $\phi_{M_i}(x_{M_j}) = \delta_{ij}$ . Pour  $M \cap T \neq \emptyset$  on a

$$\nabla \phi_{M,T} := \nabla \phi_M|_T = -\frac{|L|}{d|T|} \vec{n}_{T,L} \quad (4.16)$$

où  $L \in \partial T$  est tel que  $L \cap M = \emptyset$ . Ainsi, une approximation  $\mathcal{P}_1$  conforme dans  $(\Lambda_h)$  de  $\nabla \alpha$  est donnée par

$$\begin{aligned} \nabla \alpha(u)_T^n &= \sum_{M' \cap T \neq \emptyset} \alpha(u_{M'}^n) \nabla \phi_{M',T} = \sum_{M' \cap T \neq \emptyset, M' \neq M} (\alpha(u_{M'}^n) - \alpha(u_M^n)) \nabla \phi_{M',T} \\ &= \sum_{l \in \partial M \cap T \setminus \Gamma} (\alpha(u_{M_l}^n) - \alpha(u_M^n)) \nabla \phi_{M_l,T} \end{aligned} \quad (4.17)$$

d'où, de (4.15) on a

$$\begin{aligned} \sum_{l \in \partial M \cap T \setminus \Gamma} \nabla \alpha(u)_T^n \cdot K_T \vec{n}_{M,l} |l| \\ = \sum_{l \in \partial M \cap T \setminus \Gamma} (\alpha(u_M^n) - \alpha(u_{M_l}^n)) |T| \nabla \phi_{M_l,T} \cdot K_T \nabla \phi_{M,T} \end{aligned} \quad (4.18)$$

et par suite on a le schéma suivant

$$\begin{aligned}
u_M^{n+1} &= u_M^n + \frac{\Delta t_n}{\Phi_M |M|} \sum_{l \in \partial M} b(u)_l^n (-\vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l}) |l| \\
&+ \frac{\Delta t_n}{\Phi_M |M|} \sum_{l \in \partial M \setminus \Gamma} (\alpha(u_{M_l}^n) - \alpha(u_M^n)) \frac{D_{M,l}}{\delta(x_M, x_{M_l})} |l|
\end{aligned} \tag{4.19}$$

où pour tout  $l \in \partial M \setminus \Gamma$

$$D_{M,l} := -\frac{|T|}{|l|} \delta_{M,l} \nabla \phi_{M_l,T} \cdot K_T \nabla \phi_{M,T} \tag{4.20}$$

avec  $\delta_{M,l} := \delta(x_M, x_{M_l})$  est la distance euclidienne entre  $x_M$  et  $x_{M_l}$ .

Finalement en utilisant  $\sum_{l \in \partial M} \vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l} |l| = 0$  c.à.d.  $\operatorname{div}(\vec{q}) = 0$ , on a le schéma explicite suivant :

pour tout  $M \in \Sigma_h$  et  $n = 0, \dots, N_\tau - 1$

$$\begin{aligned}
u_M^{n+1} &= u_M^n + \frac{\Delta t_n}{\Phi_M |M|} \sum_{l \in \partial M} (b(u_{M_l}^n) - b(u_M^n)) (-\vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l})^+ |l| \\
&+ \frac{\Delta t_n}{\Phi_M |M|} \sum_{l \in \partial M \setminus \Gamma} (\alpha(u_{M_l}^n) - \alpha(u_M^n)) \frac{D_{M,l}}{\delta_{M,l}} |l|
\end{aligned} \tag{4.21}$$

avec les conditions au bord suivantes :

pour tout  $M \in \Sigma_h$ ,  $l \in \partial M$  et  $n = 0, \dots, N_\tau$

$$b(u_{M_l}^n) := \begin{cases} b(u_0) & \text{si } l \in \partial M \cap \Gamma_1 \\ b(u_M^n) & \text{si non} \end{cases} \tag{4.22}$$

Ici les **flux numériques** sont donnés par :

pour tout  $M \in \Sigma_h$ ,  $l \in \partial M \cap T$  et  $n = 0, \dots, N_\tau - 1$

$$F_{M,l}^*(u_M^n, u_{M_l}^n) := b(u_{M_l}^n) (-\vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l})^+ |l| - b(u_M^n) (-\vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l})^- |l|$$

et

$$G_{M,l}^*((u_{M'}^n)_{M' \cap T \neq \emptyset}) := \sum_{l' \in \partial M \cap T} (\alpha(u_{M_{l'}}^n) - \alpha(u_M^n)) \nabla \phi_{M_{l'},T} \cdot K_T \vec{n}_{M,l} |l|$$

ici le flux approché de diffusion est à  $(d+1)$  points, vérifiant

$$\sum_{l \in \partial M \cap T} G_{M,l}^*((u_{M'}^n)_{M' \cap T \neq \emptyset}) = \sum_{l \in \partial M \cap T} (\alpha(u_{M_l}^n) - \alpha(u_M^n)) \frac{D_{M,l}}{\delta_{M,l}} |l|$$

ce qui assure la conservation des flux, la consistance est due au fait que les approximations choisies sont d'ordre 1, en effet, le schéma de Godunov pris pour le terme de convection est d'ordre 1, et l'approximation  $\mathcal{P}_1$  prise pour  $\nabla\alpha$  dans le terme de diffusion est aussi d'ordre 1, et par suite le schéma explicite (4.21) est de type volumes finis au sens de la définition 4.3.

### 4.3.4 Schéma implicite

De même, en utilisant une approximation implicite dans (4.5) sauf pour la vitesse totale  $\vec{q}$ , on obtient

pour tout  $M \in \Sigma_h$  et  $n = 0, \dots, N_\tau - 1$

$$\begin{aligned} u_M^{n+1} &= u_M^n - \frac{\Delta t_n}{\Phi_M |M|} \sum_{l \in \partial M} b(u)_l^{n+1} \vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l} |l| \\ &+ \frac{\Delta t_n}{\Phi_M |M|} \sum_{l \in \partial M \setminus \Gamma} (\alpha(u_{M_l}^{n+1}) - \alpha(u_M^{n+1})) \frac{D_{M,l}}{\delta_{M,l}} |l| \end{aligned} \quad (4.23)$$

avec

$$b(u)_l^{n+1} := \begin{cases} b(u_M^{n+1}) & \text{si } \vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l} \geq 0 \\ b(u_{M_l}^{n+1}) & \text{si } \vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l} < 0 \end{cases} \quad (4.24)$$

où  $M_l$  est la maille voisine à  $M$  suivant le côté  $l$  (c. à. d. tel que  $l \in M_l \cap M$ ) si  $l \in \mathcal{L}_h$  et si  $l \in \Gamma$  on a  $u_{M_l}^{n+1} = u_0$  pour  $l \in \Gamma_1$  et  $\vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l} \geq 0$  pour  $l \in \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ .

Ainsi on a le schéma implicite suivant :

pour tout  $M \in \Sigma_h$  et  $n = 0, \dots, N_\tau - 1$

$$\begin{aligned} u_M^{n+1} &= u_M^n + \frac{\Delta t_n}{\Phi_M |M|} \sum_{l \in \partial M} (b(u_{M_l}^{n+1}) - b(u_M^{n+1})) (-\vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l})^+ |l| \\ &+ \frac{\Delta t_n}{\Phi_M |M|} \sum_{l \in \partial M \setminus \Gamma} (\alpha(u_{M_l}^{n+1}) - \alpha(u_M^{n+1})) \frac{D_{M,l}}{\delta_{M,l}} |l| \end{aligned} \quad (4.25)$$

avec les mêmes conditions au bord (4.22).

Notons qu'on a utilisé ici une approximation implicite pour les termes de convection et de diffusion. Là aussi les **flux numériques** sont donnés par :

pour tout  $M \in \Sigma_h$ ,  $l \in \partial M \cap T$  et  $n = 0, \dots, N_\tau - 1$

$$F_{M,l}^*(u_M^{n+1}, u_{M_l}^{n+1}) := b(u_{M_l}^{n+1}) (-\vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l})^+ |l| - b(u_M^{n+1}) (-\vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l})^- |l|$$

et

$$G_{M,l}^* \left( (u_{M'}^{n+1})_{M' \cap T \neq \emptyset} \right) := \sum_{l' \in \partial M \cap T} \left( \alpha(u_{M'}^{n+1}) - \alpha(u_M^{n+1}) \right) \nabla \phi_{M',T} \cdot K_T \vec{n}_{M,l} |l|$$

là aussi le flux approché de diffusion est à  $(d+1)$  points, vérifiant

$$\sum_{l \in \partial M \cap T} G_{M,l}^* \left( (u_{M'}^{n+1})_{M' \cap T \neq \emptyset} \right) = \sum_{l \in \partial M \cap T} \left( \alpha(u_{M_l}^{n+1}) - \alpha(u_M^{n+1}) \right) \frac{D_{M,l}}{\delta_{M,l}} |l|$$

ce qui montre la conservation et la consistance des flux, au sens des définitions 4.1 et 4.2, et par suite le schéma implicite (4.25) est de type volumes finis au sens de la définition 4.3.

### 4.3.5 Schéma semi-implicite

En utilisant dans (4.5) une approximation explicite pour le terme de convection et une approximation implicite pour le terme de diffusion, on a :

pour tout  $M \in \Sigma_h$  et  $n = 0, \dots, N_\tau - 1$

$$\begin{aligned} u_M^{n+1} &= u_M^n + \frac{\Delta t_n}{\Phi_M |M|} \sum_{l \in \partial M} \left( b(u_{M_l}^n) - b(u_M^n) \right) (-\vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l})^+ |l| \\ &+ \frac{\Delta t_n}{\Phi_M |M|} \sum_{l \in \partial M \setminus \Gamma} \left( \alpha(u_{M_l}^{n+1}) - \alpha(u_M^{n+1}) \right) \frac{D_{M,l}}{\delta_{M,l}} |l| \end{aligned} \quad (4.26)$$

avec les mêmes conditions au bord (4.22).

Là aussi les **flux numériques** sont donnés par :

pour tout  $M \in \Sigma_h$ ,  $l \in \partial M \cap T$  et  $n = 0, \dots, N_\tau - 1$

$$F_{M,l}^* (u_M^n, u_{M_l}^n) := b(u_{M_l}^n) (-\vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l})^+ |l| - b(u_M^n) (-\vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l})^- |l|$$

et

$$G_{M,l}^* \left( (u_{M'}^{n+1})_{M' \cap T \neq \emptyset} \right) := \sum_{l' \in \partial M \cap T} \left( \alpha(u_{M'}^{n+1}) - \alpha(u_M^{n+1}) \right) \nabla \phi_{M',T} \cdot K_T \vec{n}_{M,l} |l|$$

le flux approché de diffusion est à  $(d+1)$  points, vérifiant

$$\sum_{l \in \partial M \cap T} G_{M,l}^* \left( (u_{M'}^{n+1})_{M' \cap T \neq \emptyset} \right) = \sum_{l \in \partial M \cap T} \left( \alpha(u_{M_l}^{n+1}) - \alpha(u_M^{n+1}) \right) \frac{D_{M,l}}{\delta_{M,l}} |l|$$

ce qui montre la conservation et la consistance des flux, au sens des définitions 4.1 et 4.2 et par suite le schéma semi-implicite (4.26) est de type volumes finis au sens de la définition 4.3.

L'existence et l'unicité pour les systèmes non linéaires (4.25) et (4.26), seront étudiées dans la section 4.4.

### 4.3.6 Propriétés et remarque

Notons qu'on utilise ici un tenseur de perméabilité absolue  $K$  plein et les approximations obtenues dans cette section sont telles que les coefficients  $D_{M,l}$  définis par (4.20), vérifient les propriétés suivantes :

**Propriété 4.4** *Sous les hypothèses (H2) et (H9) les coefficients  $D_{M,l}$  définis par (4.20), vérifient la majoration suivante : Pour tout  $M \in \Sigma_h$  et pour tout  $l \in \partial M \setminus \Gamma$ , on a :*

$$|D_{M,l}| \leq D^+ < \infty \quad (4.27)$$

**Démonstration.** En effet, pour  $M \in \Sigma_h$  et  $l \in \partial M \setminus \Gamma$ , d'après (4.16) le coefficient  $D_{M,l}$  défini par (4.20), peut s'écrire sous la forme :

$$D_{M,l} = -\frac{\delta(x_M, x_{M_l})}{d^2 |T| |l|} |L'| \vec{n}_{T,L'} \cdot K_T |L| \vec{n}_{T,L} \quad (4.28)$$

où  $L$  et  $L' \in \partial T$  telles que  $L \cap M = \emptyset$  et  $L' \cap M_l = \emptyset$ , donc d'après (H2) et (H9) on a

$$\begin{aligned} \sup |D_{M,l}| &\leq \sup \frac{\delta(x_M, x_{M_l})}{d^2 |T| |l|} |L| |L'| K^+ \\ &\leq \frac{H (H^{d-1})^2}{d^2 h^d h^{d-1}} K^+ \leq \frac{K^+}{d^2} \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{2d-1} \end{aligned}$$

d'où

$$|D_{M,l}| \leq D^+ := \frac{K^+}{d^2} \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{2d-1} < \infty \quad (4.29)$$

Ce qui termine la démonstration de la propriété 4.4. ■

De plus dans le cas bi-dimensionnel, on a :

**Propriété 4.5** *Sous les hypothèses (H2) et (H9), pour (d = 2) et pour un maillage admissible, au sens de (4.34), les coefficients  $D_{M,l}$  définis par (4.20), vérifient la minoration suivante :*

$$0 < D_- \leq D_{M,l} \quad (4.30)$$

pour tout  $M \in \Sigma_h$  et pour tout  $l \in \partial M \setminus \Gamma$ .

**Démonstration.** En effet, pour  $M \in \Sigma_h$  et  $l \in \partial M \setminus \Gamma$ , les coefficients  $D_{M,l}$  pour (d = 2), peuvent s'écrire sous la forme :

$$D_{M,l} = \frac{\delta(x_M, x_{M_l})}{4|T||l|} \overrightarrow{x'x_M} \cdot \mathbf{adj}[K_T] \overrightarrow{x'x_{M_l}} \quad (4.31)$$

où  $x' = L \cap L'$  et  $\mathbf{adj}[K_T]$  est la transposée de co-matrice de  $K_T$ . Maintenant  $\mathbf{adj}[K_T]$  est aussi symétrique défini positif, donc il admet une unique factorisation

$$\mathbf{adj}[K_T] = [U_T]^t [U_T] \quad (4.32)$$

où  $U_T$  est une matrice triangulaire supérieure dont la diagonale est positive. Nous avons donc

$$\begin{aligned} \overrightarrow{x'x_M} \cdot \mathbf{adj}[K_T] \overrightarrow{x'x_{M_l}} &= [U_T] \overrightarrow{x'x_M} \cdot [U_T] \overrightarrow{x'x_{M_l}} \\ &= \overrightarrow{U_T(x')U_T(x_M)} \cdot \overrightarrow{U_T(x')U_T(x_{M_l})} \end{aligned}$$

ainsi du fait que l'image d'un triangle par l'application  $U_T$  est aussi un triangle, en gardant le même sens des sommets, on déduit que :

- Pour  $K(x) = k(x)K_0$  dans  $\Omega$ , où  $k(x) > 0$  avec  $K_0$  est une matrice constante symétrique définie positive, on a :  $\mathbf{adj}[K_0] = [U_0]^t [U_0]$ , et on peut mailler  $\Omega_{K_0} := [U_0](\Omega)$  (la transformation du domaine  $\Omega$  par la matrice  $U_0$ ), par un **maillage admissible** telle que :

$$\text{pour } \theta_{M,l} := \text{Angle} \left( \overrightarrow{U_0(x')U_0(x_M)}; \overrightarrow{U_0(x')U_0(x_{M_l})} \right) \quad (4.33)$$

on a la **condition de Delaunay** suivante :

(H10)

$$0 < \eta \leq \theta_{M,l} \leq \frac{\pi}{2} - \eta \quad (4.34)$$

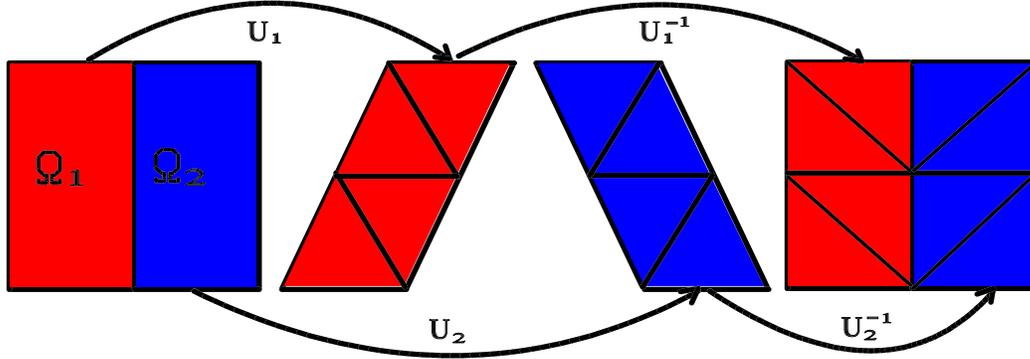
où  $\eta$  est un petit paramètre indépendant de  $h$ , et par suite, d'après (H2) et (H9) on a :

$$\begin{aligned} \inf D_{M,l} &\geq \cos \left( \frac{\pi}{2} - \eta \right) \inf \frac{\delta(x_M, x_{M_l})}{4|T||l|} \left| [U_T] \overrightarrow{x'x_M} \right| \left| [U_T] \overrightarrow{x'x_{M_l}} \right| \\ &\geq \sin(\eta) \inf \frac{\delta(x_M, x_{M_l}) |L| |L'| K_-}{2|l| |L| |L'| \sin \left( \frac{\pi}{2} - \eta \right)} \geq \tan(\eta) \frac{hK_-}{2H} \geq \tan(\eta) \frac{\gamma K_-}{2\beta} \end{aligned}$$

donc

$$0 < D_- := \tan(\eta) \frac{\gamma K_-}{2\beta} \leq D_{M,l} \quad (4.35)$$

- Pour le cas où  $\Omega = \bigcup_{p=1}^{N_p} \Omega_p$  telle que  $K(x)|_{\Omega_p} = k_p(x)K_p$ , avec  $k_p(x) > 0$  et  $K_p$  est une matrice constante symétrique définie positive, pour tout  $p = 1, \dots, N_p$ , on définit  $\Omega_{K_p} := [U_p](\Omega_p)$  pour  $p = 1, \dots, N_p$ , où les  $[U_p]$  sont tel que  $\mathbf{adj}[K_p] = [U_p]^t [U_p]$ , puis on considère un maillage des  $(\Omega_{K_p})$  par une triangulation admissible vérifiant (4.34), en gardant une même répartition des arrêtes sur les interfaces  $\Omega_p \cap \Omega_q$ , ainsi par des transformations inverses  $[U_p]^{-1}$  on obtient un maillage sur  $\Omega$  qui respecte la propriété voulue, voir une illustration dans la Figure 4.2. Ce qui termine la démonstration de la propriété 4.5. ■

Fig. 4.2: Maillage de  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ 

Dans le cas ( $d = 3$ ) l'hypothèse **(H10)** sera remplacée par l'hypothèse suivante :

**(H10)** Pour tout  $M \in \Sigma_h$  et pour tout  $l \in \partial M \setminus \Gamma$

$$0 < D_- \leq D_{M,l} \quad (4.36)$$

**Remarque 4.6** Les deux relations (4.27) et (4.30), sont des propriétés importantes pour l'analyse des schémas volumes finis introduits ici, et qui dépendent seulement du maillage triangulaire choisi et de la matrice  $K(x)$  (voir des remarques analogues dans [FRO98, EGH00]).

## 4.4 Résultats de stabilité $L^\infty$

Dans cette section, on présente des résultats de stabilité  $L^\infty$  pour les schémas volumes finis introduits dans la section 4.3.

#### 4.4.1 Définition et propriété

**Définition 4.7** (*Stabilité  $L^\infty$* ) On dira que la solution approchée  $(u_M^n)$  est  $L^\infty$  stable sur  $\Omega$ , si on a :

$$\|u^n\|_\infty := \sup_M |u_M^n| \leq C \text{ pour tout } n = 1, \dots, N_\tau \quad (4.37)$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $h$  et  $\Delta t$ .

Soient  $C_{q,h}$  et  $C_{K,h}$  définies par :

$$C_{K,h} := \sup_M \sum_{l \in \partial M \setminus \Gamma} \frac{h^2 |l| D_{M,l}}{|M| \delta_{M,l} \Phi_M} \text{ et } C_{q,h} := \sup_{n,M} \sum_{l \in \partial M} \frac{h |l| (-\vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l})^+}{\Phi_M |M|} \quad (4.38)$$

alors on a les majorations suivantes :

**Propriété 4.8** Sous les hypothèses **(H0)**-**(H2)**, **(H6)**-**(H7)** et **(H9)**-**(H10)** les coefficients  $C_{K,h}$  et  $C_{q,h}$  sont uniformément bornées par rapport à  $h$  et  $\Delta t$ , c.à.d. on a :

$$0 < C_K^- \leq C_{K,h} \leq C_K^+ < \infty \quad (4.39)$$

$$0 < C_q^- \leq C_{q,h} \leq C_q^+ < \infty \quad (4.40)$$

où les constantes  $C_K^-, C_K^+, C_q^-$  et  $C_q^+$ , sont indépendantes de  $h$  et  $\Delta t$ .

**Démonstration.** En effet, sous les hypothèses **(H0)**-**(H2)** et **(H9)**-**(H10)** on a :

$$\begin{aligned} C_{K,h} &:= \sup_M \sum_{l \in \partial M \setminus \Gamma} \frac{h^2 |l| D_{M,l}}{|M| \delta_{M,l} \Phi_M} \\ &\leq \frac{h^2 H^{d-1} D^+}{(\gamma H)^d h \Phi_-} \sup_M N_M^0 \leq C_K^+ := \frac{N^0 D^+}{\gamma^d \Phi_-} < \infty \end{aligned} \quad (4.41)$$

et

$$\begin{aligned} C_{K,h} &:= \sup_M \sum_{l \in \partial M \setminus \Gamma} \frac{h^2 |l| D_{M,l}}{|M| \delta_{M,l} \Phi_M} \\ &\geq \frac{h^2 h^{d-1} D_-}{(\beta h)^d H \Phi^+} \sup_M N_M^0 \geq C_K^- := \frac{4D_-}{\beta^d \Phi^+} > 0 \end{aligned} \quad (4.42)$$

sous les hypothèses (H0)-(H1), (H6)-(H7) et (H9) on a :

$$\begin{aligned} C_{q,h} &:= \sup_{n,M} \sum_{l \in \partial M} \frac{h |l| (-\vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l})^+}{\Phi_M |M|} \\ &\leq \frac{h H^{d-1} \|\vec{q}\|_\infty}{(\gamma H)^d \Phi_-} \sup_M N_M^0 \leq C_q^+ := \frac{N^0 \|\vec{q}\|_\infty}{\gamma^d \Phi_-} < \infty \end{aligned} \quad (4.43)$$

et

$$\begin{aligned} C_{q,h} &:= \sup_{n,M} \sum_{l \in \partial M} \frac{h |l| (-\vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l})^+}{\Phi_M |M|} \geq \frac{q_d}{\Phi_-} \sup_M \sum_{l \in \partial M \cap \Gamma_1} \frac{h |l|}{|M|} \\ &\geq \frac{h h^{d-1} q_d}{(\beta h)^d \Phi_-} \geq C_q^- := \frac{q_d}{\beta^d \Phi^+} > 0 \end{aligned} \quad (4.44)$$

Ce qui termine la démonstration de la propriété 4.8. ■

#### 4.4.2 Stabilité du schéma explicite

**Proposition 4.9** *Sous les hypothèses (H0)-(H10), et la condition CFL*

$$CFL_1 := \frac{\Delta t}{h} C_{q,h} \sup_{0 \leq s \leq 1} b'(s) + \frac{\Delta t}{h^2} C_{K,h} \sup_{0 \leq s \leq 1} \alpha'(s) \leq 1 \quad (4.45)$$

le schéma explicite (4.21)-(4.22) est  $L^\infty$  stable. De plus, la solution approchée  $(u_M^n)$  définie par (4.21) satisfait le **principe du maximum discret** suivant :

$$0 \leq u_M^n \leq 1 \quad \text{pour tout } M \in \Sigma_h \quad \text{et } n = 1, \dots, N_\tau \quad (4.46)$$

**Démonstration.** Le schéma (4.21) peut s'écrire sous la forme :

pour tout  $M \in \Sigma_h$  et  $n = 0, \dots, N_\tau - 1$

$$\begin{aligned} u_M^{n+1} &= u_M^n + \frac{\Delta t_n}{\Phi_M |M|} \sum_{l \in \partial M} (u_{M_l}^n - u_M^n) b_l^n (-\vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l})^+ |l| \\ &\quad + \frac{\Delta t_n}{\Phi_M |M|} \sum_{l \in \partial M \setminus \Gamma} (u_{M_l}^n - u_M^n) \alpha_l^n \frac{D_{M,l}}{\delta_{M,l}} |l| \end{aligned} \quad (4.47)$$

où

$$b(u_{M_l}^n) - b(u_M^n) = b_l^n(u_{M_l}^n - u_M^n), \text{ avec } b_l^n = b'(u_M^n) \text{ si } u_{M_l}^n = u_M^n$$

et

$$\alpha(u_{M_l}^n) - \alpha(u_M^n) = \alpha_l^n(u_{M_l}^n - u_M^n), \text{ avec } \alpha_l^n = \alpha'(u_M^n) \text{ si } u_{M_l}^n = u_M^n$$

on pose ici par convention  $D_{M,l} = 0$  si  $l \in \Gamma$ , donc de (4.47) on a :

pour tout  $M \in \Sigma_h$  et  $n = 0, \dots, N_\tau - 1$

$$\begin{aligned} u_M^{n+1} &= u_M^n \left( 1 - \frac{\Delta t_n}{\Phi_M |M|} \sum_{l \in \partial M} \left( \alpha_l^n \frac{D_{M,l}}{\delta_{M,l}} + b_l^n (-\vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l})^+ \right) |l| \right) \\ &+ \frac{\Delta t_n}{\Phi_M |M|} \sum_{l \in \partial M} u_{M_l}^n \left( \alpha_l^n \frac{D_{M,l}}{\delta_{M,l}} + b_l^n (-\vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l})^+ \right) |l| \end{aligned} \quad (4.48)$$

Notons ici que d'après les hypothèses **(H3)**-**(H4)**,  $\alpha_l^n$  et  $b_l^n$  sont positives, et par suite en utilisant la condition CFL (4.45), on a :

pour tout  $M \in \Sigma_h$  et  $n = 0, \dots, N_\tau - 1$

$$\begin{aligned} |u_M^{n+1}| &\leq |u_M^n| \left( 1 - \frac{\Delta t_n}{\Phi_M |M|} \sum_{l \in \partial M} \left( \alpha_l^n \frac{D_{M,l}}{\delta_{M,l}} + b_l^n (-\vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l})^+ \right) |l| \right) \\ &+ \frac{\Delta t_n}{\Phi_M |M|} \sum_{l \in \partial M} |u_{M_l}^n| \left( \alpha_l^n \frac{D_{M,l}}{\delta_{M,l}} + b_l^n (-\vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l})^+ \right) |l| \quad (4.49) \\ &\leq \max(\sup |u_M^n|, \sup |u_{M_l}^n|) \leq \max(\|u^n\|_\infty, 1) \leq 1 \end{aligned}$$

d'où la stabilité  $L^\infty$ . Le principe du maximum discret, c.à.d. (4.46) est une conséquence de (4.48) et (4.49) par récurrence. Ceci termine la démonstration de la proposition 4.9. ■

### 4.4.3 Stabilité des schémas implicite et semi-implicite

Pour les schémas implicite et semi-implicite, on montrera d'abord l'existence est l'unicité de solution pour les systèmes non linéaire (4.25) et (4.26) en utilisant un algorithme de point fixe.

On introduit une maille fictive  $M_0$  avec  $u_{M_0}^n := u_0$  et  $|M_0| \neq 0$  telle que  $\partial M \cap \partial M_0 = \partial M \cap \Gamma_1$  pour tout  $M \in \Sigma_h$ , on pose  $[U^n] = [u_{M_0}^n, u_{M_1}^n, \dots, u_{M_{N_s}}^n]^t$  et  $[W^n] = [w_{M_0}^n, w_{M_1}^n, \dots, w_{M_{N_s}}^n]^t$  avec  
pour tout  $M \in \Sigma_h$  et  $n = 0, \dots, N_\tau - 1$

$$w_M^n = u_M^n + \frac{\Delta t_n}{\Phi_M |M|} \sum_{l \in \partial M} (b(u_{M_l}^n) - b(u_M^n)) (-\vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l})^+ |l| \quad (4.50)$$

Ainsi les schémas (4.25) et (4.26) peuvent s'écrire comme limites des solutions des systèmes d'équations linéarisés suivants :

$$D_2 \left( [U^{n+1}]^{(k)} \right) [U^{n+1}]^{(k+1)} = [U^n] \text{ avec } [U^{n+1}]^{(0)} = [U^n] \quad (4.51)$$

et

$$D_3 \left( [U^{n+1}]^{(k)} \right) [U^{n+1}]^{(k+1)} = [W^n] \text{ avec } [U^{n+1}]^{(0)} = [U^n] \quad (4.52)$$

où  $(D_s)_{s=2,3}$  est une matrice bande d'ordre  $N_s + 1$ , dont les éléments sont de la forme :

Pour tout  $i \neq j \in \{0, \dots, N_s\}$

$$\begin{aligned} [D_2]_{i,i} &= 1 + \frac{\Delta t_n}{\Phi_{M_i} |M_i|} \sum_{l \in \partial M_i} \left( (\alpha_l^{n+1})^{(k)} \frac{D_{M_i,l}}{\delta_{M_i,l}} + (b_l^{n+1})^{(k)} (-\vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M_i,l})^+ \right) |l| \\ [D_2]_{i,j} &= -\frac{\Delta t_n}{\Phi_{M_i} |M_i|} \sum_{l \in \partial M_i \cap \partial M_j} \left( (\alpha_l^{n+1})^{(k)} \frac{D_{M_i,l}}{\delta_{M_i,l}} + (b_l^{n+1})^{(k)} (-\vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M_i,l})^+ \right) |l| \end{aligned} \quad (4.53)$$

et

$$\begin{aligned} [D_3]_{i,i} &= 1 + \frac{\Delta t_n}{\Phi_{M_i} |M_i|} \sum_{l \in \partial M_i \setminus \Gamma} (\alpha_l^{n+1})^{(k)} \frac{D_{M_i,l}}{\delta_{M_i,l}} |l| \\ [D_3]_{i,j} &= -\frac{\Delta t_n}{\Phi_{M_i} |M_i|} \sum_{l \in \partial M_i \cap \partial M_j} (\alpha_l^{n+1})^{(k)} \frac{D_{M_i,l}}{\delta_{M_i,l}} |l| \end{aligned} \quad (4.54)$$

Notons qu'on a posé ici  $D_{M,l} := 0$  pour tout  $l \in \Gamma$ , comme dans (4.48).

**Lemme 4.10** *Sous les hypothèses (H0)-(H10), les solutions  $\left([U^{n+1}]^{(k)}\right)_{k \in \mathbb{N}}$  des systèmes (4.51) satisfont le **principe du maximum discret** suivant :*

$$0 \leq (u_{M_i}^n)^{(k)} \leq 1 \text{ pour } i = 1, \dots, N_s \text{ et } n = 1, \dots, N_\tau \quad (4.55)$$

*Le même résultat est valable pour les solutions des systèmes (4.52) sous la condition **CFL***

$$CFL_2 := \frac{\Delta t}{h} C_{q,h} \sup_{0 \leq s \leq 1} b'(s) \leq 1 \quad (4.56)$$

où  $C_{q,h}$  est donnée par (4.38).

**Démonstration.** D'après les hypothèses (H3)-(H4) et (H10),  $\alpha_l^{n+1}$ ,  $b_l^{n+1}$  et  $D_{M_i,l}$ , sont positives, Il est ainsi facile de voir que la matrice  $D_s$  est une matrice à **diagonale strictement dominante**, avec

$$(D_{i,i} - \sum_{i \neq j} |D_{i,j}|) \geq 1 \quad (4.57)$$

donc  $\|D_s^{-1}\|_\infty \leq 1$ , où  $\|\cdot\|_\infty$  est la norme matricielle  $l_\infty$ , de plus  $D_s$  est une **matrice monotone**, c.à.d.

$$D_{i,i} > 0 \text{ et } D_{i,j} \leq 0 \text{ pour } i \neq j \quad (4.58)$$

donc on a  $(D_s^{-1})_{i,j} \geq 0$ , et par suite

$$\forall V \in [0, 1]^{N_s+1}, D_s^{-1}V \in [0, 1]^{N_s+1} \quad (4.59)$$

Pour le schéma implicite (4.51) on a

$$\begin{aligned} [U^{n+1}]^{(k+1)} &= \left( D_2 \left( [U^{n+1}]^{(k)} \right) \right)^{-1} [U^n] \\ \text{et } \left( \mathbb{I} - [U^{n+1}]^{(k+1)} \right) &= \left( D_2 \left( [U^{n+1}]^{(k)} \right) \right)^{-1} (\mathbb{I} - [U^n]) \end{aligned} \quad (4.60)$$

où  $\mathbb{I} := [1, 1, \dots, 1]^t \in \mathbb{R}^{N_s+1}$ . Or  $U^0 \in [0, 1]^{N_s+1}$ , ce qui implique, par récurrence sur  $k$  puis sur  $n$ , que toutes les solutions des systèmes (4.51)  $[U^{n+1}]^{(k+1)} = D^{-1} \left( [U^{n+1}]^{(k)} \right) [U^n] \in [0, 1]^{N_s+1}$ , c.à.d. satisfont le principe du maximum discret.

Pour le schéma semi-implicite, en utilisant la condition CFL (4.56) on a pour tout  $M \in \Sigma_h$  et  $n = 0, \dots, N_\tau - 1$

$$\left( 1 - \frac{\Delta t_n}{\Phi_M |M|} \sum_{l \in \partial M} b_l^n (-\vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l})^+ |l| \right) \geq 0$$

et par récurrence sur  $n$ , on a :

$$0 \leq u_M^n \leq 1 \text{ et } 0 \leq u_{M_l}^n \leq 1$$

implique que

$$\begin{aligned} w_M^n &= u_M^n \left( 1 - \frac{\Delta t_n}{\Phi_M |M|} \sum_{l \in \partial M} b_l^n (-\vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l})^+ |l| \right) \\ &\quad + \left( \frac{\Delta t_n}{\Phi_M |M|} \sum_{l \in \partial M} u_{M_l}^n b_l^n (-\vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l})^+ |l| \right) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} w_M^n &= u_M^n \left( 1 - \frac{\Delta t_n}{\Phi_M |M|} \sum_{l \in \partial M} b_l^n (-\vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l})^+ |l| \right) \\ &\quad + \left( \frac{\Delta t_n}{\Phi_M |M|} \sum_{l \in \partial M} u_{M_l}^n b_l^n (-\vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l})^+ |l| \right) \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

c.à.d.  $W^n \in [0, 1]^{N_s+1}$ , ainsi toutes les solutions des systèmes (4.52)  $[U^{n+1}]^{(k+1)} = D_3^{-1} \left( [U^{n+1}]^{(k)} \right) [W^n] \in [0, 1]^{N_s+1}$ , c.à.d. satisfont le principe du maximum discret. Ceci termine la démonstration du lemme 4.10. ■

Maintenant, on revient à l'existence et l'unicité de solution pour les schémas implicite (4.25) et semi-implicite (4.26).

**Proposition 4.11** *Sous les hypothèses (H0)-(H10), il existe une et une seule solution  $(u_{M_i}^n)$  pour le schéma implicite (4.25), de plus cette solution satisfait le principe du maximum discret suivant :*

$$0 \leq u_{M_i}^n \leq 1 \text{ pour } i = 1, \dots, N_s \text{ et } n = 1, \dots, N_\tau \quad (4.61)$$

Les mêmes résultats sont valables pour le schéma semi-implicite (4.26) sous la condition **CFL** (4.56).

**Démonstration.** Pour le schéma semi-implicite (4.26), on a d'après le lemme 4.10 la suite  $\left([U^{n+1}]^{(k)}\right)_{k \in \mathbb{N}}$  est bornée, donc on peut extraire une sous suite convergente, notée aussi  $\left([U^{n+1}]^{(k)}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ , telle que

$$U^{n+1} := \lim_{k \rightarrow \infty} [U^{n+1}]^{(k)} \in ([0, 1])^{N_s+1} \quad (4.62)$$

et d'après la continuité de l'application  $V \mapsto D_3(V)[V]$ , la limite  $U^{n+1}$  est une solution du système non linéaire  $D_3(V)[V] = U^n$  qui est équivalent à (4.26). On conclut alors l'existence d'une solution pour le schéma semi-implicite (4.26).

Pour montrer l'unicité, on suppose  $U^{n+1}, V^{n+1}$  deux solutions du schéma implicite (4.26), c.à.d. qu'on a :

pour tout  $M \in \Sigma_h$  et  $n = 0, \dots, N_\tau - 1$

$$\begin{aligned} u_M^{n+1} &= u_M^n + \frac{\Delta t_n}{\Phi_M |M|} \sum_{l \in \partial M} (b(u_{M_l}^n) - b(u_M^n)) (-\vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l})^+ |l| \\ &+ \frac{\Delta t_n}{\Phi_M |M|} \sum_{l \in \partial M \setminus \Gamma} (\alpha(u_{M_l}^{n+1}) - \alpha(u_M^{n+1})) \frac{D_{M,l}}{\delta_{M,l}} |l| \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} v_M^{n+1} &= v_M^n + \frac{\Delta t_n}{\Phi_M |M|} \sum_{l \in \partial M} (b(v_{M_l}^n) - b(v_M^n)) (-\vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l})^+ |l| \\ &+ \frac{\Delta t_n}{\Phi_M |M|} \sum_{l \in \partial M \setminus \Gamma} (\alpha(v_{M_l}^{n+1}) - \alpha(v_M^{n+1})) \frac{D_{M,l}}{\delta_{M,l}} |l| \end{aligned}$$

par soustraction, on obtient

$$\begin{aligned} u_M^{n+1} - v_M^{n+1} &= \frac{\Delta t_n}{\Phi_M |M|} \sum_{l \in \partial M \setminus \Gamma} (\alpha(u_{M_l}^{n+1}) - \alpha(v_{M_l}^{n+1})) \frac{D_{M,l}}{\delta_{M,l}} |l| \\ &\quad - \frac{\Delta t_n}{\Phi_M |M|} \sum_{l \in \partial M \setminus \Gamma} (\alpha(v_{M_l}^{n+1}) - \alpha(u_{M_l}^{n+1})) \frac{D_{M,l}}{\delta_{M,l}} |l| \end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned} &(u_M^{n+1} - v_M^{n+1}) \left( 1 + \frac{\Delta t_n}{\Phi_M |M|} \sum_{l \in \partial M \setminus \Gamma} \alpha_{M_l}^{n+1} \frac{D_{M,l}}{\delta_{M,l}} |l| \right) \\ &- (u_{M_i}^{n+1} - v_{M_i}^{n+1}) \left( \frac{\Delta t_n}{\Phi_M |M|} \sum_{l \in \partial M \setminus \Gamma} \alpha_{M_i}^{n+1} \frac{D_{M,l}}{\delta_{M,l}} |l| \right) = 0 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \alpha_M^{n+1} &:= \frac{\alpha(u_M^{n+1}) - \alpha(v_M^{n+1})}{u_M^{n+1} - v_M^{n+1}} & \text{si } u_M^{n+1} \neq v_M^{n+1} \\ \alpha_M^{n+1} &:= a(u_M^{n+1}) & \text{si } u_M^{n+1} = v_M^{n+1} \end{aligned}$$

Ce système d'équations peut s'écrire sous la forme suivante :

$$D(U^{n+1}, V^{n+1}) [U^{n+1} - V^{n+1}] = 0 \quad (4.63)$$

où  $D$  est une matrice dont les éléments non nuls s'écrivent sous la forme suivante :

Pour  $i = 1, \dots, N_s$

$$\begin{aligned} [D(U^{n+1}, V^{n+1})]_{i,i} &:= \frac{\Phi_{M_i} |M_i|}{\Delta t_n} + \sum_{l \in \partial M_i \setminus \Gamma} \alpha_{M_i}^{n+1} \frac{D_{M_i,l}}{\delta_{M_i,l}} |l| \\ [D(U^{n+1}, V^{n+1})]_{i,j} &:= - \sum_{l \in \partial M_i \cap \partial M_j} \alpha_{M_i}^{n+1} \frac{D_{M_i,l}}{\delta_{M_i,l}} |l| \end{aligned} \quad (4.64)$$

D'après les hypothèses **(H3)** et **(H10)**,  $\alpha_{M_i}^{n+1}$  et  $D_{M_i,l}$ , sont positives, il est ainsi facile de voir que la transposée de la matrice  $D$  est une matrice à **diagonale strictement dominante**, donc inversible, et par suite on a l'unicité de la solution du schéma semi-implicite (4.26). L'existence et l'unicité de la solution du

schéma implicite (4.25) s'obtiennent de la même manière (voir aussi chapitre 2 proposition 2.8). Ceci termine la démonstration de la proposition 4.11. ■

## 4.5 Estimations $BV$ faibles

Dans cette section, on présente des estimations  $BV$  faibles pour les schémas volumes finis introduits dans la section 4.3, en suivant les grandes lignes des idées de [EGH00] et sa bibliographie.

On considère la fonction  $B : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , définie par :  $B(t) = \int_0^t sb'(s)ds$ , alors on a les propriétés suivantes :

**Lemme 4.12** *Sous les hypothèses **(H3)**-**(H4)** et **(H6)**, les fonctions non linéaires  $\alpha$  et  $B$  vérifient les propriétés suivantes :*

1. Pour tout  $u : \Sigma_h \rightarrow [0, 1]$ , on a :

$$\sum_M \sum_{l \in \partial M \setminus \Gamma} (\alpha(u_{M_l}) - \alpha(u_M)) \frac{D_{M,l}}{\delta_{M,l}} |l| = 0 \quad (4.65)$$

2. Pour tout  $u : \Sigma_h \rightarrow [0, 1]$ , on a :

$$0 \leq \sum_M \sum_{l \in \partial M} (B(u_{M_l}) - B(u_M)) (-\vec{q}_l \cdot \vec{n}_{M,l})^+ |l| \leq C_B \quad (4.66)$$

où  $C_B(q_d, |\Gamma_1|, \sup(b'))$  est une constante indépendante de  $h$  et  $\Delta t$ .

3. Pour tout  $u, v \in [0, 1]$ , on a : (Lemme 4.5 [EGH00])

$$[B(t)]_u^v + u(b(u) - b(v)) \geq \frac{(b(u) - b(v))^2}{2 \sup(b')} \quad (4.67)$$

**Démonstration.** En effet, du fait que  $D_{M,l} = D_{M_l,l}$  et  $\delta_{M,l} = \delta_{M_l,l}$ , on a

$$\begin{aligned} & \sum_M \sum_{l \in \partial M \setminus \Gamma} (\alpha(u_{M_l}) - \alpha(u_M)) \frac{D_{M,l}}{\delta_{M,l}} |l| \\ &= \sum_{l \in \mathcal{L}_h} \left[ (\alpha(u_{M_l}) - \alpha(u_M)) \frac{D_{M,l}}{\delta_{M,l}} |l| + (\alpha(u_M) - \alpha(u_{M_l})) \frac{D_{M_l,l}}{\delta_{M_l,l}} |l| \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

D'autre part, du fait que  $\sum_{l \in \partial M} (\vec{q}_l \cdot \vec{n}_{M,l}) |l| = 0$ , on a

$$\begin{aligned} \bar{B} &:= \sum_M \sum_{l \in \partial M} (B(u_{M_l}) - B(u_M)) (-\vec{q}_l \cdot \vec{n}_{M,l})^+ |l| \\ &= \sum_M \left[ \sum_{l \in \partial M} B(u_{M_l}) (-\vec{q}_l \cdot \vec{n}_{M,l})^+ |l| - \sum_{l \in \partial M} B(u_M) (-\vec{q}_l \cdot \vec{n}_{M,l})^+ |l| \right] \\ &= \sum_M \left[ \sum_{l \in \partial M} B(u_{M_l}) (-\vec{q}_l \cdot \vec{n}_{M,l})^- |l| - \sum_{l \in \partial M} B(u_M) (-\vec{q}_l \cdot \vec{n}_{M,l})^+ |l| \right] \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} \bar{B} &= \sum_M \sum_{l \in \partial M} B(u_M) [(-\vec{q}_l \cdot \vec{n}_{M,l})^- - (-\vec{q}_l \cdot \vec{n}_{M,l})^+] |l| \\ &\quad + \sum_{M \cap \Gamma \neq \emptyset} \sum_{l \in \partial M \cap \Gamma} (B(u_{M_l}) - B(u_M)) (-\vec{q}_l \cdot \vec{n}_{M,l})^+ |l| \\ &= \sum_M B(u_M) \sum_{l \in \partial M} (\vec{q}_l \cdot \vec{n}_{M,l}) |l| + \sum_{l \in \Gamma_1} (B(u_{M_l}) - B(u_M)) (-\vec{q}_l \cdot \vec{n}_{M,l})^+ |l| \\ &= q_d \sum_{M \cap \Gamma_1 \neq \emptyset} (B(u_0) - B(u_M)) |\partial M \cap \Gamma_1| \in [0, C_B] \end{aligned}$$

où  $C_B := q_d |\Gamma_1| \sup(b') \geq 0$ . La fonction  $B$  est croissante.

Pour la troisième propriété on a (comme pour le lemme 4.5 dans [EGH00]) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (b(u) - b(v))^2 &= \int_v^u b'(t) (b(t) - b(v)) dt \\ &\leq \sup(b') \int_v^u (b(t) - b(v)) dt \\ &= \sup(b') \left( [(b(t) - b(v)) t]_v^u - \int_v^u tb(t) dt \right) \\ &= \sup(b') (u(b(u) - b(v)) + [B(t)]_u^v) \end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration du lemme 4.12. ■

### 4.5.1 Analyse du schéma explicite

Pour le schéma explicite (4.21), on a le résultat suivant :

**Proposition 4.13** *Sous les hypothèses sur les données **(H0)**-**(H10)** et la condition CFL (4.45) avec  $[CFL_1 \leq 1 - \varepsilon]$ , on a, pour le schéma explicite (4.21)-(4.22), les estimations suivantes :*

$$\begin{aligned} \sum_{n,l} \Delta t_n (b(u_{M_l}^n) - b(u_M^n))^2 |\vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l}| |l| &\leq C \frac{\sup(b')}{\varepsilon} \\ \text{et } \sum_{n,l} \Delta t_n (\alpha(u_{M_l}^n) - \alpha(u_M^n))^2 D_{M,l} |l| &\leq C \frac{\sup(\alpha')\beta}{2\varepsilon\gamma} h \end{aligned} \quad (4.68)$$

où

$$C := \Phi^+ |\Omega| \|u^0\|_\infty^2 + 2\tau q_d |\Gamma_1| \sup(b')$$

et  $\varepsilon$  est un petit paramètre indépendant de  $h$  et  $\Delta t$ .

**Démonstration.** Pour tout  $M \in \Sigma_h$  et  $n = 0, \dots, N_\tau - 1$ , multiplions (4.21) par  $u_M^n$ , on a

$$\begin{aligned} u_M^n (u_M^{n+1} - u_M^n) &= \frac{\Delta t_n}{\Phi_M |M|} \sum_{l \in \partial M} u_M^n (b(u_{M_l}^n) - b(u_M^n)) (-\vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l})^+ |l| \\ &\quad + \frac{\Delta t_n}{\Phi_M |M|} \sum_{l \in \partial M \setminus \Gamma} u_M^n (\alpha(u_{M_l}^n) - \alpha(u_M^n)) \frac{D_{M,l}}{\delta_{M,l}} |l| \end{aligned}$$

et utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$\begin{aligned} &(u_M^{n+1} - u_M^n)^2 \\ &\leq \left( \frac{\Delta t_n}{\Phi_M |M|} \right)^2 \left( \sum_{l \in \partial M} (-\vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l})^+ |l| \sup(b') + \sum_{l \in \partial M \setminus \Gamma} \frac{D_{M,l}}{\delta_{M,l}} |l| \sup(\alpha') \right) \\ &\quad \left( \sum_{l \in \partial M} (b(u_{M_l}^n) - b(u_M^n))^2 \frac{(-\vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l})^+ |l|}{\sup(b')} + \sum_{l \in \partial M \setminus \Gamma} (\alpha(u_{M_l}^n) - \alpha(u_M^n))^2 \frac{D_{M,l} |l|}{\sup(\alpha') \delta_{M,l}} \right) \end{aligned}$$

ainsi de la condition CFL (4.45) avec  $[CFL_1 \leq 1 - \varepsilon]$ , on peut écrire

$$\begin{aligned}
& (u_M^{n+1} - u_M^n)^2 \\
& \leq \frac{\Delta t_n (1 - \varepsilon)}{\Phi_M |M| \sup(b')} \sum_{l \in \partial M} (b(u_{M_l}^n) - b(u_M^n))^2 (-\vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l})^+ |l| \\
& + \frac{\Delta t_n (1 - \varepsilon)}{\Phi_M |M| \sup(\alpha')} \sum_{l \in \partial M \setminus \Gamma} (\alpha(u_{M_l}^n) - \alpha(u_M^n))^2 \frac{D_{M,l}}{\delta_{M,l}} |l|
\end{aligned}$$

et du fait que

$$\begin{aligned}
& \sum_M \frac{\Phi_M |M|}{2} \left( (u_M^{n+1})^2 - (u_M^n)^2 \right) \\
& = \sum_M \Phi_M |M| \left( u_M^n (u_M^{n+1} - u_M^n) + \frac{1}{2} (u_M^{n+1} - u_M^n)^2 \right)
\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}
& \sum_M \frac{\Phi_M |M|}{2} \left( (u_M^{n+1})^2 - (u_M^n)^2 \right) \\
& \leq \Delta t_n \sum_M \sum_{l \in \partial M} u_M^n (b(u_{M_l}^n) - b(u_M^n)) (-\vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l})^+ |l| \\
& + \Delta t_n \sum_M \sum_{l \in \partial M \setminus \Gamma} u_M^n (\alpha(u_{M_l}^n) - \alpha(u_M^n)) \frac{D_{M,l}}{\delta_{M,l}} |l| \\
& + \frac{\Delta t_n (1 - \varepsilon)}{2 \sup(b')} \sum_M \sum_{l \in \partial M} (b(u_{M_l}^n) - b(u_M^n))^2 (-\vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l})^+ |l| \\
& + \frac{\Delta t_n (1 - \varepsilon)}{2 \sup(\alpha')} \sum_M \sum_{l \in \partial M \setminus \Gamma} (\alpha(u_{M_l}^n) - \alpha(u_M^n))^2 \frac{D_{M,l}}{\delta_{M,l}} |l|
\end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned}
& \Delta t_n \sum_M \sum_{l \in \partial M} u_M^n (b(u_M^n) - b(u_{M_l}^n)) (-\vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l})^+ |l| \\
& + \Delta t_n \sum_{l \in \mathcal{E}_h} (u_M^n - u_{M_l}^n) (\alpha(u_M^n) - \alpha(u_{M_l}^n)) \frac{D_{M,l}}{\delta_{M,l}} |l|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{2} \left[ \sum_M \Phi_M |M| (u_M^n)^2 - \sum_M \Phi_M |M| (u_M^{n+1})^2 \right] \\
&+ \frac{\Delta t_n (1 - \varepsilon)}{2 \sup(b')} \sum_M \sum_{l \in \partial M} (b(u_{M_l}^n) - b(u_M^n))^2 (-\vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l})^+ |l| \\
&+ \frac{\Delta t_n (1 - \varepsilon)}{2 \sup(\alpha')} \sum_M \sum_{l \in \partial M \setminus \Gamma} (\alpha(u_{M_l}^n) - \alpha(u_M^n))^2 \frac{D_{M,l}}{\delta_{M,l}} |l|.
\end{aligned}$$

maintenant d'après (4.67) on a :

$$u_M^n (b(u_M^n) - b(u_{M_l}^n)) \geq \frac{1}{2 \sup(b')} (b(u_M^n) - b(u_{M_l}^n))^2 - [B(t)]_{u_M^n}^{u_{M_l}^n}$$

de même

$$(u_M^n - u_{M_l}^n) (\alpha(u_M^n) - \alpha(u_{M_l}^n)) \geq \frac{1}{\sup(\alpha')} (\alpha(u_M^n) - \alpha(u_{M_l}^n))^2$$

et de (4.66) on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{\Delta t_n \varepsilon}{2 \sup(b')} \sum_M \sum_{l \in \partial M} (b(u_{M_l}^n) - b(u_M^n))^2 (-\vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l})^+ |l| \\
&+ \frac{\Delta t_n \varepsilon}{\sup(\alpha')} \sum_{l \in \mathcal{L}_h} (\alpha(u_{M_l}^n) - \alpha(u_M^n))^2 \frac{D_{M,l}}{\delta_{M,l}} |l| \\
&\leq \frac{1}{2} \left[ \sum_M \Phi_M |M| (u_M^n)^2 - \sum_M \Phi_M |M| (u_M^{n+1})^2 \right] + \Delta t_n C_B \tag{4.69}
\end{aligned}$$

donc par sommation sur  $n = 0, \dots, N_\tau$ , on a

$$\begin{aligned}
&\frac{\varepsilon}{2 \sup(b')} \sum_{n,M} \Delta t_n \sum_{l \in \partial M} (b(u_{M_l}^n) - b(u_M^n))^2 (-\vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l})^+ |l| \\
&+ \frac{\varepsilon}{\sup(\alpha')} \sum_{n,l \in \mathcal{L}_h} \Delta t_n (\alpha(u_{M_l}^n) - \alpha(u_M^n))^2 \frac{D_{M,l}}{\delta_{M,l}} |l| \\
&\leq \frac{1}{2} \left[ \sum_M \Phi_M |M| (u_M^0)^2 - \sum_M \Phi_M |M| (u_M^{N_\tau+1})^2 \right] + \tau C_B \\
&\leq \frac{1}{2} \Phi^+ |\Omega| \|u^0\|_\infty^2 + \tau C_B
\end{aligned}$$

et finalement on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n,l} \Delta t_n (b(u_{M_l}^n) - b(u_M^n))^2 |\vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l}| |l| &\leq \left( \Phi^+ |\Omega| \|u^0\|_\infty^2 + 2\tau C_B \right) \frac{\sup(b')}{\varepsilon} \\ \sum_{n,l} \Delta t_n (\alpha(u_{M_l}^n) - \alpha(u_M^n))^2 D_{M,l} |l| &\leq \left( \Phi^+ |\Omega| \|u^0\|_\infty^2 + 2\tau C_B \right) \frac{\sup(\alpha')\beta}{2\varepsilon\gamma} h \end{aligned}$$

Ceci complète la démonstration de la proposition 4.13. ■

### 4.5.2 Analyse du schéma implicite

**Proposition 4.14** *Sous les hypothèses (H0)-(H10), on a pour le schéma implicite (4.25)-(4.22), les estimations suivantes :*

$$\begin{aligned} \sum_{n,l} \Delta t_n (b(u_{M_l}^{n+1}) - b(u_M^{n+1}))^2 |\vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l}| |l| &\leq C \sup(b') \\ \text{et } \sum_{n,l} \Delta t_n (\alpha(u_{M_l}^{n+1}) - \alpha(u_M^{n+1}))^2 D_{M,l} |l| &\leq C \frac{\sup(\alpha')\beta}{2\gamma} h \end{aligned} \quad (4.70)$$

où

$$C := \Phi^+ |\Omega| \|u^0\|_\infty^2 + 2\tau q_d |\Gamma_1| \sup(b')$$

**Démonstration.** Pour tout  $M \in \Sigma_h$  et  $n = 0, \dots, N_\tau - 1$ , multiplions (4.25) par  $u_M^{n+1}$ , on a

$$\begin{aligned} u_M^{n+1} (u_M^{n+1} - u_M^n) &= \frac{\Delta t_n}{\Phi_M |M|} \sum_{l \in \partial M} u_M^{n+1} (b(u_{M_l}^{n+1}) - b(u_M^{n+1})) (-\vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l})^+ |l| \\ &\quad + \frac{\Delta t_n}{\Phi_M |M|} \sum_{l \in \partial M \setminus \Gamma} u_M^{n+1} (\alpha(u_{M_l}^{n+1}) - \alpha(u_M^{n+1})) \frac{D_{M,l}}{\delta_{M,l}} |l| \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} &\sum_M \frac{\Phi_M |M|}{2} \left( (u_M^{n+1})^2 - (u_M^n)^2 \right) \\ &= \sum_M \Phi_M |M| \left( u_M^{n+1} (u_M^{n+1} - u_M^n) - \frac{1}{2} (u_M^{n+1} - u_M^n)^2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \Delta t_n \sum_M \sum_{l \in \partial M} u_M^{n+1} (b(u_{M_l}^{n+1}) - b(u_M^{n+1})) (-\vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l})^+ |l| \\ &+ \Delta t_n \sum_M \sum_{l \in \partial M \setminus \Gamma} u_M^{n+1} (\alpha(u_{M_l}^{n+1}) - \alpha(u_M^{n+1})) \frac{D_{M,l}}{\delta_{M,l}} |l| \end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned} &\Delta t_n \sum_M \sum_{l \in \partial M} u_M^{n+1} (b(u_{M_l}^{n+1}) - b(u_M^{n+1})) (-\vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l})^+ |l| \\ &+ \Delta t_n \sum_{l \in \mathcal{L}_h} (u_M^{n+1} - u_{M_l}^{n+1}) (\alpha(u_M^{n+1}) - \alpha(u_{M_l}^{n+1})) \frac{D_{M,l}}{\delta_{M,l}} |l| \\ &\leq \frac{1}{2} \left[ \sum_M \Phi_M |M| (u_M^n)^2 - \sum_M \Phi_M |M| (u_M^{n+1})^2 \right] \end{aligned}$$

maintenant, du fait que

$$u_M^{n+1} (b(u_M^{n+1}) - b(u_{M_l}^{n+1})) \geq \frac{1}{2 \sup(b')} (b(u_M^{n+1}) - b(u_{M_l}^{n+1}))^2 - [B(t)]_{u_M^{n+1}}^{u_{M_l}^{n+1}}$$

et

$$(u_M^{n+1} - u_{M_l}^{n+1}) (\alpha(u_M^{n+1}) - \alpha(u_{M_l}^{n+1})) \geq \frac{1}{\sup(\alpha')} (\alpha(u_M^{n+1}) - \alpha(u_{M_l}^{n+1}))^2$$

on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{\Delta t_n}{2 \sup(b')} \sum_M \sum_{l \in \partial M} (b(u_{M_l}^{n+1}) - b(u_M^{n+1}))^2 (-\vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l})^+ |l| \\ &+ \frac{\Delta t_n}{\sup(\alpha')} \sum_{l \in \mathcal{L}_h} (\alpha(u_{M_l}^{n+1}) - \alpha(u_M^{n+1}))^2 \frac{D_{M,l}}{\delta_{M,l}} |l| \\ &\leq \frac{1}{2} \left[ \sum_M \Phi_M |M| (u_M^n)^2 - \sum_M \Phi_M |M| (u_M^{n+1})^2 \right] + \Delta t_n C_B \end{aligned} \quad (4.71)$$

donc par sommation sur  $n = 0, \dots, N_\tau$ , on a

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2 \sup(b')} \sum_{n,M} \Delta t_n \sum_{l \in \partial M} (b(u_{M_l}^{n+1}) - b(u_M^{n+1}))^2 (-\vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l})^+ |l| \\
& + \frac{1}{\sup(\alpha')} \sum_{n,l \in \mathcal{L}_h} \Delta t_n (\alpha(u_{M_l}^{n+1}) - \alpha(u_M^{n+1}))^2 \frac{D_{M,l}}{\delta_{M,l}} |l| \\
& \leq \frac{1}{2} \left[ \sum_M \Phi_M |M| (u_M^0)^2 - \sum_M \Phi_M |M| (u_M^{N_\tau+1})^2 \right] + \tau C_B \\
& \leq \frac{1}{2} \Phi^+ |\Omega| \|u^0\|_\infty^2 + \tau C_B
\end{aligned}$$

et finalement on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{n,l} \Delta t_n (b(u_{M_l}^{n+1}) - b(u_M^{n+1}))^2 |\vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l}| |l| & \leq \left( \Phi^+ |\Omega| \|u^0\|_\infty^2 + 2\tau C_B \right) \sup(b') \\
\sum_{n,l} \Delta t_n (\alpha(u_{M_l}^{n+1}) - \alpha(u_M^{n+1}))^2 D_{M,l} |l| & \leq \left( \Phi^+ |\Omega| \|u^0\|_\infty^2 + 2\tau C_B \right) \frac{\sup(\alpha')\beta}{2\gamma} h
\end{aligned}$$

Ceci complète la démonstration de la proposition 4.14. ■

### 4.5.3 Analyse du schéma semi-implicite

**Proposition 4.15** *Sous les hypothèses (H0)-(H10) et la condition CFL (4.56) avec  $[CFL_1 \leq 1 - \varepsilon]$ , on a, pour le schéma semi-implicite (4.26)-(4.22), les estimations suivantes:*

$$\begin{aligned}
\sum_{n,l} \Delta t_n (b(u_{M_l}^n) - b(u_M^n))^2 |\vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l}| |l| & \leq C \frac{\sup(b')}{\varepsilon} \\
\text{et } \sum_{n,l} \Delta t_n (\alpha(u_{M_l}^{n+1}) - \alpha(u_M^{n+1}))^2 D_{M,l} |l| & \leq C \frac{\sup(\alpha')\beta}{2\gamma} h
\end{aligned} \tag{4.72}$$

où

$$C := \Phi^+ |\Omega| \|u^0\|_\infty^2 + 2\tau q_d |\Gamma_1| \sup(b')$$

et  $\varepsilon$  est un petit paramètre indépendant de  $h$  et  $\Delta t$ .

**Démonstration.** De (4.26) on a

pour tout  $M \in \Sigma_h$  et  $n = 0, \dots, N_\tau - 1$

$$u_M^{n+1} = w_M^n + \frac{\Delta t_n}{\Phi_M |M|} \sum_{l \in \partial M} (\alpha(u_{M_l}^{n+1}) - \alpha(u_M^{n+1})) \frac{D_{M,l}}{\delta_{M,l}} |l|$$

où

$$w_M^n = u_M^n + \frac{\Delta t_n}{\Phi_M |M|} \sum_{l \in \partial M \setminus \Gamma} (b(u_{M_l}^n) - b(u_M^n)) (-\vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l})^+ |l| \quad (4.73)$$

et de (4.69), utilisons la condition CFL (4.56) avec  $[CFL_2 \leq 1 - \varepsilon]$ , on peut écrire

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta t_n \varepsilon}{2 \sup(b')} \sum_M \sum_{l \in \partial M} (b(u_{M_l}^n) - b(u_M^n))^2 (-\vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l})^+ |l| \\ & \leq \frac{1}{2} \left[ \sum_M \Phi_M |M| (u_M^n)^2 - \sum_M \Phi_M |M| (w_M^n)^2 \right] + \Delta t_n C_B \end{aligned}$$

et de

$$u_M^{n+1} (u_M^{n+1} - w_M^n) = \frac{\Delta t_n}{\Phi_M |M|} \sum_{l \in \partial M \setminus \Gamma} u_M^{n+1} (\alpha(u_{M_l}^{n+1}) - \alpha(u_M^{n+1})) \frac{D_{M,l}}{\delta_{M,l}} |l|$$

on a

$$\begin{aligned} & \sum_M \frac{\Phi_M |M|}{2} \left( (u_M^{n+1})^2 - (w_M^n)^2 \right) \\ & = \sum_M \Phi_M |M| \left( u_M^{n+1} (u_M^{n+1} - w_M^n) - \frac{1}{2} (u_M^{n+1} - w_M^n)^2 \right) \\ & \leq \Delta t_n \sum_M \sum_{l \in \partial M \setminus \Gamma} u_M^{n+1} (\alpha(u_{M_l}^{n+1}) - \alpha(u_M^{n+1})) \frac{D_{M,l}}{\delta_{M,l}} |l| \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta t_n}{\sup(\alpha')} \sum_{l \in \mathcal{L}_h} (\alpha(u_{M_l}^{n+1}) - \alpha(u_M^{n+1}))^2 \frac{D_{M,l}}{\delta_{M,l}} |l| \\ & \leq \frac{1}{2} \left[ \sum_M \Phi_M |M| (w_M^n)^2 - \sum_M \Phi_M |M| (u_M^{n+1})^2 \right] \end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned}
& \frac{\Delta t_n \varepsilon}{2 \sup(b')} \sum_M \sum_{l \in \partial M} (b(u_{M_l}^n) - b(u_M^n))^2 (-\vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l})^+ |l| \\
& + \frac{\Delta t_n}{\sup(\alpha')} \sum_{l \in \mathcal{L}_h} (\alpha(u_{M_l}^{n+1}) - \alpha(u_M^{n+1}))^2 \frac{D_{M,l}}{\delta_{M,l}} |l| \\
& \leq \frac{1}{2} \left[ \sum_M \Phi_M |M| (u_M^n)^2 - \sum_M \Phi_M |M| (u_M^{n+1})^2 \right] + \Delta t_n C_B \quad (4.74)
\end{aligned}$$

donc par sommation sur  $n = 0, \dots, N_\tau$ , on a

$$\begin{aligned}
& \frac{\varepsilon}{2 \sup(b')} \sum_{n,M} \Delta t_n \sum_{l \in \partial M} (b(u_{M_l}^n) - b(u_M^n))^2 (-\vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l})^+ |l| \\
& + \frac{1}{\sup(\alpha')} \sum_{n,l \in \mathcal{L}_h} \Delta t_n (\alpha(u_{M_l}^{n+1}) - \alpha(u_M^{n+1}))^2 \frac{D_{M,l}}{\delta_{M,l}} |l| \\
& \leq \frac{1}{2} \left[ \sum_M \Phi_M |M| (u_M^0)^2 - \sum_M \Phi_M |M| (u_M^{N_\tau+1})^2 \right] + \tau C_B \\
& \leq \frac{1}{2} \Phi^+ |\Omega| \|u^0\|_\infty^2 + \tau C_B
\end{aligned}$$

et finalement on obtient

$$\begin{aligned}
& \sum_{n,l} \Delta t_n (b(u_{M_l}^n) - b(u_M^n))^2 |\vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l}| |l| \leq \left( \Phi^+ |\Omega| \|u^0\|_\infty^2 + 2\tau C_B \right) \frac{\sup(b')}{\varepsilon} \\
& \sum_{n,l} \Delta t_n (\alpha(u_{M_l}^{n+1}) - \alpha(u_M^{n+1}))^2 D_{M,l} |l| \leq \left( \Phi^+ |\Omega| \|u^0\|_\infty^2 + 2\tau C_B \right) \frac{\sup(\alpha') \beta}{2\gamma} h
\end{aligned}$$

Ceci complète la démonstration de la proposition 4.15. ■

**Corollaire 4.16** *Sous les hypothèses (H0)-(H10), les estimations suivantes sont valides pour les schémas précédents (4.21), (4.25) et (4.26) sous les conditions CFL appropriées :*

$$\begin{aligned}
& \sum_{n,l} \Delta t_n |b(u_{M_l}^k) - b(u_M^k)| |\vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l}| |l| \leq C_1 h^{-\frac{1}{2}} \\
& \text{et } \sum_{n,l} \Delta t_n |\alpha(u_{M_l}^k) - \alpha(u_M^k)| D_{M,l} |l| \leq C_2 \quad (4.75)
\end{aligned}$$

pour  $k = n, n+1$ . Où  $C_1 \left( \tau, q_d, |\Gamma_1|, \Phi^+, \sup(b'), |\Omega|, \frac{1}{\varepsilon}, \|u^0\|_\infty^2, \|\vec{q}\|_\infty \right)$  et  $C_2 \left( \tau, q_d, |\Gamma_1|, \Phi^+, \beta, \frac{1}{\gamma}, D^+ \right)$  sont des constantes indépendantes de  $h$  et  $\Delta t$ , avec  $\varepsilon = 1$  si  $k = n+1$ .

**Démonstration.** En effet pour  $k = n, n+1$ , d'après les démonstrations des propositions 4.13, 4.14 et 4.15 on a :

$$\begin{aligned}
& \sum_{n,l} \Delta t_n |b(u_{M_l}^k) - b(u_M^k)| |\vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l}| |l| \\
& \leq \left( \sum_{n,l} \Delta t_n (b(u_{M_l}^k) - b(u_M^k))^2 |\vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l}| |l| \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{n,l} \Delta t_n |\vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l}| |l| \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \left( \Phi^+ |\Omega| \|u^0\|_\infty^2 + 2\tau C_B \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\sup(b')}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} (\|\vec{q}\|_\infty \tau)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{2} \sum_M |\partial M| \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \left( \Phi^+ |\Omega| \|u^0\|_\infty^2 + 2\tau C_B \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\sup(b')}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} (\|\vec{q}\|_\infty \tau)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{2h} \sum_M |M| \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \left( \Phi^+ |\Omega| \|u^0\|_\infty^2 + 2\tau C_B \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\sup(b')}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} (\|\vec{q}\|_\infty \tau)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{|\Omega|}{2} \right)^{\frac{1}{2}} h^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& \sum_{n,l} \Delta t_n |\alpha(u_{M_l}^k) - \alpha(u_M^k)| D_{M,l} |l| \\
& \leq \left( \sum_{n,l} \Delta t_n (\alpha(u_{M_l}^k) - \alpha(u_M^k))^2 D_{M,l} |l| \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{n,l} \Delta t_n D_{M,l} |l| \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \left( \Phi^+ |\Omega| \|u^0\|_\infty^2 + 2\tau C_B \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\sup(\alpha')\beta}{2\varepsilon\gamma} h \right)^{\frac{1}{2}} (D^+ \tau)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{2} \sum_M |\partial M| \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \left( \Phi^+ |\Omega| \|u^0\|_\infty^2 + 2\tau C_B \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\sup(\alpha')\beta}{2\varepsilon\gamma} \right)^{\frac{1}{2}} (D^+ \tau)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{|\Omega|}{2} \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration du corollaire 4.16. ■

## 4.6 Résultats de convergence

Dans cette section, on présente un résultat de convergence donné par le théorème 4.18. Pour cela, on a besoin du lemme suivant :

**Lemme 4.17** *Sous les hypothèses (H0)-(H10), pour tous les schémas considérés ici, sous les conditions CFL appropriées, on a l'estimation BV faible suivante [noté  $BV^*(Q_\tau)$ ]:*

$$\begin{aligned} & \sum_{n,M} \Delta t_n |M| (\alpha(u_M^{n+1}) - \alpha(u_M^n))^2 + \sum_{n,l} \Delta t_n |l| (\alpha(u_{M_l}^n) - \alpha(u_M^n))^2 \\ & \leq C [h + \Delta t] \end{aligned} \quad (4.76)$$

où  $C \left( q_d, |\Gamma_1|, \tau, \Phi^+, D^+, |\Omega|, \|u^0\|_\infty, \|\vec{q}\|_\infty, \sup(b), \sup(b'), \sup(\alpha'), [\alpha b](u_0), \frac{\beta}{\gamma}, \frac{1}{\Phi_-}, \frac{1}{D_-}, \frac{1}{\varepsilon} \right)$  est une constante indépendante de  $h$  et  $\Delta t$ , avec  $\varepsilon = 1$  pour les schémas implicites.

**Démonstration.** Par convention dans les notations, on pose  $k = n$  ou  $n + 1$  dans les schémas (4.21), (4.25) et (4.26).

On obtient ainsi, pour tout  $M \in \Sigma_h$  et  $n = 0, \dots, N_\tau - 1$

$$\begin{aligned} u_M^{n+1} &= u_M^n + \frac{\Delta t_n}{\Phi_M |M|} \sum_{l \in \partial M} (b(u_{M_l}^k) - b(u_M^k)) (-\vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l})^+ |l| \\ &+ \frac{\Delta t_n}{\Phi_M |M|} \sum_{l \in \partial M \setminus \Gamma} (\alpha(u_{M_l}^k) - \alpha(u_M^k)) \frac{D_{M,l}}{\delta_{M,l}} |l| \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} & \sum_M \Phi_M |M| (\alpha(u_M^{n+1}) - \alpha(u_M^n)) (u_M^{n+1} - u_M^n) \\ &= \Delta t_n \sum_M \sum_{l \in \partial M} (\alpha(u_M^{n+1}) - \alpha(u_M^n)) (b(u_{M_l}^k) - b(u_M^k)) (-\vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l})^+ |l| \\ &+ \Delta t_n \sum_M \sum_{l \in \partial M \setminus \Gamma} (\alpha(u_M^{n+1}) - \alpha(u_M^n)) (\alpha(u_{M_l}^k) - \alpha(u_M^k)) \frac{D_{M,l}}{\delta_{M,l}} |l| \\ &= B_k^{n+1} + A_k^{n+1} - B_k^n - A_k^n \end{aligned}$$

où  $s = n$  ou  $n + 1$  et

$$A_k^s = \Delta t_n \sum_M \sum_{l \in \partial M \setminus \Gamma} \alpha(u_M^s) (\alpha(u_{M_l}^k) - \alpha(u_M^k)) \frac{D_{M,l}}{\delta_{M,l}} |l|$$

$$B_k^s = \Delta t_n \sum_M \sum_{l \in \partial M} \alpha(u_M^s) (b(u_{M_l}^k) - b(u_M^k)) (-\vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l})^+ |l|.$$

Des propositions 4.13, 4.14 et 4.15, on a

$$\begin{aligned} \sum_n |A_k^s| &= \sum_n \left| \Delta t_n \sum_{l \in \mathcal{E}_h} (\alpha(u_M^s) - \alpha(u_{M_l}^s)) (\alpha(u_{M_l}^k) - \alpha(u_M^k)) \frac{D_{M,l}}{\delta_{M,l}} |l| \right| \\ &\leq \sum_{n,l} \frac{\Delta t_n}{2} \left[ (\alpha(u_M^s) - \alpha(u_{M_l}^s))^2 + (\alpha(u_{M_l}^k) - \alpha(u_M^k))^2 \right] \frac{D_{M,l}}{\delta_{M,l}} |l| \\ &\leq C_1 := \left( \Phi^+ |\Omega| \|u^0\|_\infty^2 + 2\tau C_B \right) \frac{\sup(\alpha')}{2\varepsilon} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sum_n |B_k^s| &\leq \alpha(u_0) b(u_0) q_d \tau |\Gamma_1| \\ &\quad + \sum_n \Delta t_n \sum_{l \in \mathcal{E}_h} |\alpha(u_M^s) - \alpha(u_{M_l}^s)| |b(u_l^k)| |\vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l}| |l| \\ &\leq \alpha b(u_0) q_d \tau |\Gamma_1| + \sum_{n,l} \frac{\Delta t_n}{2} \left[ (\alpha(u_M^s) - \alpha(u_{M_l}^s))^2 + (b(u_l^k))^2 |\vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l}|^2 |l|^2 \right] \\ &\leq \alpha b(u_0) q_d \tau |\Gamma_1| + \left( \Phi^+ |\Omega| \|u^0\|_\infty^2 + 2\tau C_B \right) \frac{\sup(\alpha') \beta D_-}{4\varepsilon \gamma} h \\ &\quad + \frac{1}{2} (\sup(b))^2 (\|\vec{q}\|_\infty \tau) \left( \frac{|\Omega|}{2h} \right) h^{d-1} \leq C_2 \end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned} &\sum_{n,M} \Phi_M |M| (\alpha(u_M^{n+1}) - \alpha(u_M^n))^2 \\ &\leq \sup(\alpha') \sum_{n,M} \Phi_M |M| (\alpha(u_M^{n+1}) - \alpha(u_M^n)) (u_M^{n+1} - u_M^n) \\ &\leq 2 \sup(\alpha') (C_1 + C_2) \end{aligned}$$

finaleme

$$\sum_{n,M} \Phi_- |M| (\alpha(u_M^{n+1}) - \alpha(u_M^n))^2 \leq 2 \sup(\alpha') (C_1 + C_2)$$

or d'après les propositions 4.13, 4.14 et 4.15 on a

$$\sum_{n,l} \Delta t_n (\alpha(u_{M_l}^n) - \alpha(u_M^n))^2 D_- |l| \leq C_3 h$$

et par suite

$$\begin{aligned} \sum_{n,M} \Delta t_n |M| (\alpha(u_M^{n+1}) - \alpha(u_M^n))^2 &\leq C \Delta t \\ \sum_{n,l} \Delta t_n |l| (\alpha(u_{M_l}^n) - \alpha(u_M^n))^2 &\leq Ch \end{aligned}$$

où  $C := \max\left(\frac{2 \sup(\alpha') (C_1 + C_2)}{\Phi_-}, \frac{C_3}{D_-}\right)$ . Ce qui donne l'estimation  $BV$  faible cherchée. ■

Introduisons maintenant la **solution faible**  $u$  pour le problème homogène associé à  $(P_d)$ , pour  $u|_{\Gamma_1} = 0$ , soit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u : ]0, \tau[ \longrightarrow W_0; 0 \leq u(x, t) \leq 1 \text{ p.p. dans } Q_\tau & (i) \\ u_t \in L^2(0, \tau; W') \text{ et } \alpha(u) \in L^2(0, \tau; W) & (ii) \\ \int \int_{Q_\tau} [\Phi u v_t + (b(u) \vec{q} - K \nabla \alpha(u)) \cdot \nabla v] dt dx & \\ + \int_\Omega \Phi u^0 v(x, 0) dx = 0 \quad \forall v \in V & (iii) \end{array} \right. \quad (4.77)$$

où les espaces fonctionnels  $W$ ,  $W_0$  et  $V$  sont définis par :

$$\begin{aligned} W &= \{w \in H^1(\Omega); w = 0 \text{ sur } \Gamma_3\} \\ W_0 &= \{u \in L^2(\Omega); \alpha(u) \in W; \alpha(u) = 0 \text{ sur } \Gamma_1\} \\ V &= \{v \in C^1(0, \tau; C^2(\bar{\Omega})); v(\cdot, \tau) \equiv 0 \text{ et } v = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_3\} \end{aligned}$$

Le problème non homogène sera étudié dans la Remarque 4.19.

On définit l'approximation  $u_h$  par  $u_h := u_h(x, t)$  pour tout  $(x, t) \in M \times [t_n, t_{n+1}[$ , nous avons ainsi le résultat suivant :

**Théorème 4.18** *Sous les hypothèses (H0)-(H10) la solution approchée  $u_h$  donnée par le schéma (4.21)-(4.22), ou par le schéma (4.26)-(4.22), avec les conditions CFL appropriées, ou par le schéma (4.25)-(4.22) sans aucune condition CFL, converge vers  $u$  dans  $L^2(Q_\tau)$  quand  $h$  et  $\Delta t$  tendent vers zéro.*

**Démonstration.** Pour montrer la convergence de  $u_h$  vers la solution faible définie par (4.77), nous passons à la limite dans les équations discrètes.

On pose  $\tilde{\alpha}_h := \alpha(u_h)$  dans  $Q_\tau$  et  $\tilde{\alpha}_h := 0$  dans  $(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+) \setminus Q_\tau$ , des propositions 4.9, 4.11 et du lemme 4.17,  $(\tilde{\alpha}_h)$  est bornée dans  $L^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+) \cap BV^*(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$ , donc  $(\tilde{\alpha}_h)$  est relativement compacte dans  $L^2(Q_\tau)$  (voir **Eymard & al.** [EGH00, EGN98]). On peut ainsi extraire une sous-suite, encore notée  $\tilde{\alpha}_h$ , telle que

$$\tilde{\alpha}_h \longrightarrow \alpha^* \quad \text{dans } L^2(Q_\tau) \quad \text{et} \quad \alpha^* \in L^2(0, \tau; H_{\Gamma_1 \cup \Gamma_3}^1(\Omega)) \quad (4.78)$$

où  $H_{\Gamma_1 \cup \Gamma_3}^1(\Omega) = \{w \in H^1(\Omega); w = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_3\}$ , d'où

$$u_h \longrightarrow u^* = \alpha^{-1}(\alpha^*) \quad \text{sur } L^2(Q_\tau) \quad \text{et} \quad u^* \in L^2(0, \tau; W_0) \quad (4.79)$$

A ce stade, on conclut que  $u^*$  vérifie (4.77)-(i), (ii). Il reste à montrer que  $u^*$  satisfait (4.77)-(iii). Pour cela, soit  $v \in V$  une fonction test et notons par  $v_M^n := v(x_M, t_n)$ . En multipliant les schémas (4.21), (4.25) ou (4.26) par  $\frac{|M| v_M^n \Phi_M}{\Delta t_n}$ , on obtient après sommation

$$\begin{aligned} & \sum_{n,M} \Delta t_n |M| v_M^n \Phi_M \frac{u_M^{n+1} - u_M^n}{\Delta t_n} + \sum_{n,M} \Delta t_n v_M^n \sum_{l \in \partial M} b(u)_l^k (\vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l}) |l| \\ & = \sum_{n,M} \Delta t_n v_M^n \sum_{l \in \partial M \setminus \Gamma} (\alpha(u_{M_l}^k) - \alpha(u_M^k)) \frac{D_{M,l}}{\delta_{M,l}} |l| \end{aligned} \quad (4.80)$$

où  $k = n$  ou  $n + 1$ . On transforme la première somme dans (4.80) sous la forme suivante

$$\begin{aligned}
& - \sum_M |M| v_M^0 \Phi_M u_M^0 + \sum_{n,M} \Delta t_n |M| \Phi_M u_M^{n+1} \frac{v_M^n - v_M^{n+1}}{\Delta t_n} \\
& + \sum_{n,M} \Delta t_n v_M^n \sum_{l \in \partial M} b(u)_l^k (\vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l}) |l| \\
& = \sum_{n,M} \Delta t_n v_M^n \sum_{l \in \partial M \setminus \Gamma} (\alpha(u_{M_l}^k) - \alpha(u_M^k)) \frac{D_{M,l}}{\delta_{M,l}} |l| \tag{4.81}
\end{aligned}$$

Prenons en considération les hypothèses sur les données et utilisons le théorème de Lebesgue, il vient quand  $h$  et  $\Delta t$  tendent vers 0

$$\begin{aligned}
& - \sum_M |M| v_M^0 \Phi_M u_M^0 \longrightarrow - \int_{\Omega} \Phi u^0 v(x, 0) dx \\
& \sum_{n,M} \Delta t_n |M| \Phi_M u_M^{n+1} \frac{v_M^n - v_M^{n+1}}{\Delta t_n} \longrightarrow - \int \int_{Q_\tau} \Phi u^* v_t dt dx
\end{aligned}$$

et de même on a

$$\begin{aligned}
& \sum_{n,M} \Delta t v_M^n \sum_{l \in \partial M} b(u)_l^k \vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l} |l| \\
& = \sum_{n,M} \Delta t_n v_M^n \sum_{l \in \partial M} (b(u)_l^k - b(u_M^k)) \vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l} |l| \\
& = \sum_{n,M} \Delta t_n \sum_{l \in \partial M} (b(u)_l^k - b(u_M^k)) \vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l} |l| (v_M^n - v_l^n) \\
& - \sum_{n,M} \Delta t_n \sum_{l \in \partial M} v_l^n b(u_M^k) \vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l} |l| \\
& = R - \sum_{n,M} \Delta t_n b(u_M^k) \sum_{l \in \partial M} \int_l v^n \vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l} ds
\end{aligned}$$

où

$$|R| \leq \sum_{n,M} \Delta t_n \sum_{l \in \partial M} |b(u)_l^k - b(u_M^k)| |\vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l}| |l| |v_M^n - v_l^n|$$

Ainsi en utilisant l'estimation donnée par la remarque 4.16, on obtient

$$|R| \leq c(v)h \sum_{n,l} \Delta t_n |b(u_{M_l}^k) - b(u_M^k)| |\vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l}| |l| \leq c(v)Ch^{\frac{1}{2}} \longrightarrow 0$$

et

$$\begin{aligned}
-\sum_{n,M} \Delta t_n b(u_M^k) \sum_{l \in \partial M} \int_l v^n \vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l} ds &= -\sum_{n,M} \Delta t_n \int_M b(u_M^k) \operatorname{div}(\vec{q}_l^n v^n) dx \\
&= -\sum_{n,M} \Delta t_n \int_M b(u_M^k) \vec{q}_l^n \cdot \nabla v^n dx \\
&\longrightarrow -\int \int_{Q_\tau} b(u^*) \vec{q} \cdot \nabla v dt dx
\end{aligned}$$

donc

$$\sum_{n,M} \Delta t_n v_M^n \sum_{l \in \partial M} b(u_M^k) \vec{q}_l^n \cdot \vec{n}_{M,l} |l| \longrightarrow -\int \int_{Q_\tau} b(u^*) \vec{q} \cdot \nabla v dt dx$$

Le dernier terme de (4.81) peut s'écrire sous la forme suivante

$$\begin{aligned}
&-\sum_{n,M} \Delta t_n \alpha(u_M^k) \sum_{l \in \partial M \setminus \Gamma} (v_{M_l}^n - v_M^n) \frac{D_{M,l}}{\delta_{M,l}} |l| \\
&= \sum_{n,M} \Delta t_n \alpha(u_M^k) \sum_{T \cap M \neq \emptyset} \sum_{l \in \partial M \cap T \setminus \Gamma} (v_{M_l}^n - v_M^n) |T| \nabla \phi_{M_l,T} \cdot K_T \nabla \phi_{M,T} \\
&= -\sum_{n,M} \Delta t_n \alpha(u_M^k) \sum_{T \cap M \neq \emptyset} \sum_{l \in \partial M \cap T \setminus \Gamma} (\nabla v_T^n \cdot K_T n_{M,l} |l|) \\
&= -\sum_{n,M} \Delta t_n \alpha(u_M^k) \sum_{l \in \partial M \setminus \Gamma} K_l \nabla v_l^n \cdot \vec{n}_{M,l} |l|
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&-\sum_{n,M} \Delta t_n \alpha(u_M^k) \sum_{l \in \partial M \setminus \Gamma} K_l \nabla v_l^n \cdot \vec{n}_{M,l} |l| \\
&= \sum_{n,M} \Delta t_n \alpha(u_M^k) \sum_{l \in \partial M \cap \Gamma} K_l \nabla v_l^n \cdot \vec{n}_{M,l} |l| - \sum_{n,M} \Delta t_n \alpha(u_M^k) \sum_{l \in \partial M} K_l \nabla v_l^n \cdot \vec{n}_{M,l} |l| \\
&\longrightarrow \int_0^\tau \int_\Gamma \alpha(u^*) (K(x) \nabla v) \cdot \vec{n} ds dt - \int \int_{Q_\tau} \alpha(u^*) \operatorname{div}(K(x) \nabla v) dt dx \\
&= \int \int_{Q_\tau} K(x) \nabla \alpha(u^*) \cdot \nabla v dt dx
\end{aligned}$$

Finalement, passons à la limite dans (4.81), il vient que

$$\int \int_{Q_\tau} [\Phi u^* v_t + (b(u^*) \vec{q} - K \nabla \alpha(u^*)) \cdot \nabla v] dt dx + \int_{\Omega} \Phi u^0 v(x, 0) dx = 0$$

Donc  $u^*$  est une solution faible pour le problème (1.41) qui admet une unique solution  $u$ . Ainsi la suite  $(u_h)$  converge vers  $u$ , ce qui termine la démonstration du théorème 4.18. ■

**Remarque 4.19** (*Problème non homogène*). Soit  $\tilde{U}$  la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \tilde{U} \in H^1(\Omega) \\ -\operatorname{div}(K(x) \nabla \tilde{U}) = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \tilde{U}|_{\Gamma_1} = \alpha(u_0), \quad K \nabla \tilde{U} \cdot \vec{n}|_{\Gamma_2} = 0 \quad \text{et } \tilde{U}|_{\Gamma_3} = 0 \end{cases}$$

et

$$\tilde{U}_h = \begin{cases} \tilde{U}_M := \frac{1}{|M|} \int_M \tilde{U}(x) dx & \text{dans } M \in \Sigma_h \\ \tilde{U}_l := \frac{1}{|l|} \int_l \tilde{U}(s) ds & \text{sur } l \in \Gamma \end{cases}$$

D'après le lemme 2 de **Eymard & al.** [EGH99] basé sur l'**inégalité de trace**, on a l'estimation suivante:

$$\sum_{l \in \mathcal{L}_h} (\tilde{U}_{M_l} - \tilde{U}_M)^2 + \sum_{l \in \Gamma} (\tilde{U}_{M_l} - \tilde{U}_l)^2 \leq C \|\tilde{U}\|_{H^1(\Omega)}^2$$

Et par suite pour le problème non homogène  $(P_d)$ , on pose  $\tilde{\alpha}_h := \alpha(u_h) - \tilde{U}_h$  dans  $Q_\tau$  et  $\tilde{\alpha}_h := 0$  dans  $(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+) \setminus Q_\tau$ , ainsi la démonstration du théorème 4.18 précédent reste valable pour  $\tilde{\alpha}_h$ .

## 4.7 Conclusion

Dans ce chapitre on a formulé et analysé des schémas volumes finis pour une équation non linéaire multi-dimensionnelle de convection-diffusion dégénérée. Nous avons analysé trois familles de tels schémas. Après avoir établi que les

schémas sont  $L^\infty$  stables et satisfont une estimation  $BV$  faible, sous les conditions CFL appropriées, nous avons obtenu un résultat de convergence vers la solution faible du problème. Ceci en introduisant un maillage adéquat permettant de préserver le principe du maximum discret sur un maillage déstructuré.

## Partie II

# Simulations numériques des écoulements diphasiques en milieu poreux



# Chapitre 5

## Simulations numériques dans le cas mono-dimensionnel

### 5.1 Introduction

**D**ans ce chapitre, on présente les résultats numériques obtenus en utilisant les schémas volumes finis décrits dans le chapitre 2, pour un fluide immiscible et incompressible en milieu poreux modélisé par le problème  $(P_1)$  (2.1). Les résultats numériques obtenus par les schémas (2.14) (2.20) et (2.17) du chapitre 2, seront comparés à un schéma explicite qui traite séparément le terme de convection par un schéma de Godunov décentré amont et le terme de diffusion par une méthode d'éléments finis mixte [ CHJ86, CHS82, DAW93].

Les systèmes non linéaires résultants des schémas implicite (2.17) et semi implicite (2.20), seront résolus par une méthode de prédiction-corrrection décrite dans (2.34) et (2.33).

Dans une première section, on présentera les données physiques du problème. Dans la deuxième section, on donnera des simulations numériques pour les schémas vus au chapitre 2, pour différentes valeurs de la condition CFL. La dernière section, consiste à donner une comparaison des temps CPU et l'erreur relative  $l^1$  pour ces différents schémas. Les résultats de ce chapitre sont publiés dans [ AFA97].

## 5.2 Données du problème

Nous traitons le déplacement d'huile ( $o$ ) par l'eau ( $w$ ) dans un échantillon de **carotte poreuse** horizontale. Nous étudions le processus pour une injection d'eau dans la limite gauche de la carotte poreuse et avant le **temps de percée**. Les expressions des fonctions non-linéaires  $a$  **diffusion capillaire**, et  $b$  **fraction du flux**, sont données par les quantités physiques suivantes :

$$a(u) = \frac{k_w(u)k_o(u)}{k_w(u) + k_o(u)}p'_c(u), \quad b(u) = \frac{k_w(u)}{k_w(u) + k_o(u)}$$

avec

$$k_w(u) = \frac{k_{rw}(u)}{\mu_w}, \quad k_o(u) = \frac{k_{ro}(u)}{\mu_o}$$

où  $k_{rs}$ ,  $s = w, o$ , sont les **perméabilités relatives**,  $\mu_s$  est la viscosité de la phase  $s$  et  $p_c$  est la **pression capillaire**. Pour plus de détails sur les données physiques on se réfère à [BEB91, MAR81].

Dans ces simulations, les perméabilités relatives utilisées sont de la forme (voir [YOU84]) :

$$k_{rw}(u) = \frac{1}{2}u^3, \quad k_{ro}(u) = (1 - u)^3$$

la pression capillaire

$$p_c(u) = -[(1 - u)/u]^{1/2}$$

et la condition initiale

$$u^0(0) = 1, \quad u^0(x) = 0 \text{ pour tout } x \in ]0, 1]$$

On prendra une valeur constante pour la porosité  $\Phi(x) = 0.2$ , et de même pour la perméabilité absolue  $K(x) = 0.2$ , la viscosité de l'eau  $\mu_w = 1$  et la viscosité de l'huile  $\mu_o = 3$ .

Les fonctions non linéaires :  $a$  (diffusion capillaire),  $b$  (fraction du flux),  $p_c$  (pression capillaire) et  $k_{rw}$ ,  $k_{ro}$  (perméabilités relatives), sont représentées dans les figures 5.1-5.2.

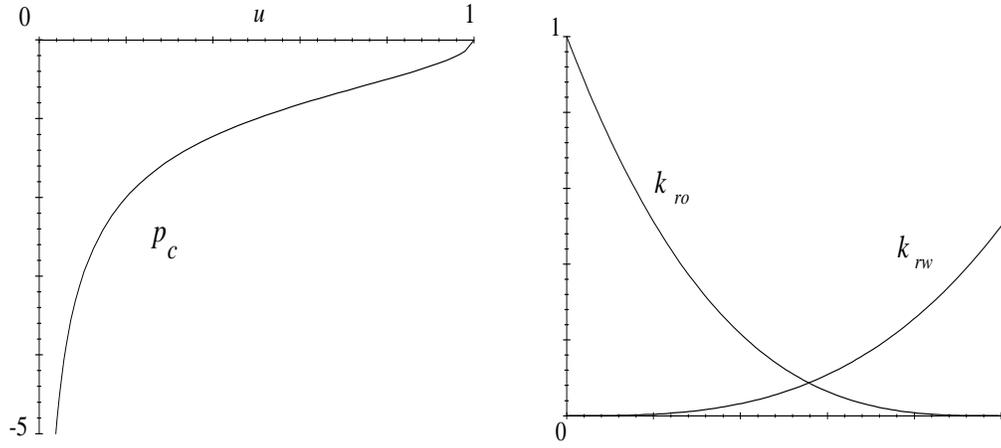


Fig. 5.1: Pression capillaire  $p_c$  et Perméabilités relatives  $k_{r,i}$

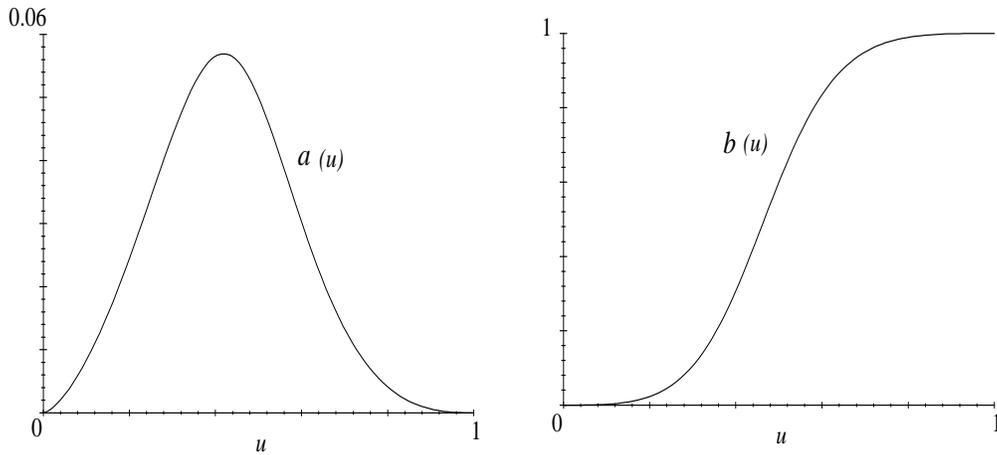


Fig. 5.2: Diffusion capillaire  $a(u)$  et fraction du flux  $b(u)$

## 5.3 Simulations numériques

Les résultats numériques utilisant les schémas volumes finis sont présentés et comparés avec une méthode standard [CHJ86, CHS82, DAW93] qui traite le

terme diffusion avec une méthode d'éléments finis mixte. Les méthodes volumes finis fournissent une meilleure approximation de la solution du problème ( $P_1$ ).

Ici nous présentons quelques simulations pour illustrer nos résultats de stabilité et de convergences. On note par : (E.F.V.) le schéma volumes finis explicite, (I.F.V.) le schéma volumes finis implicite, (S-I.F.V.) le schéma volumes finis semi-implicite et (M.F.E.) le schéma éléments finis mixte (voir **Chavent & Salzano** [CHS82]). La condition CFL pour le schéma (M.F.E.) est de la forme suivante :

$$CFL_3 := \frac{\Delta t}{h} C_1 \sup_{0 \leq s \leq 1} b'(s) + \frac{3}{2} \frac{\Delta t}{h^2} C_2 \sup_{0 \leq s \leq 1} a(s) > CFL_1 > CFL_2$$

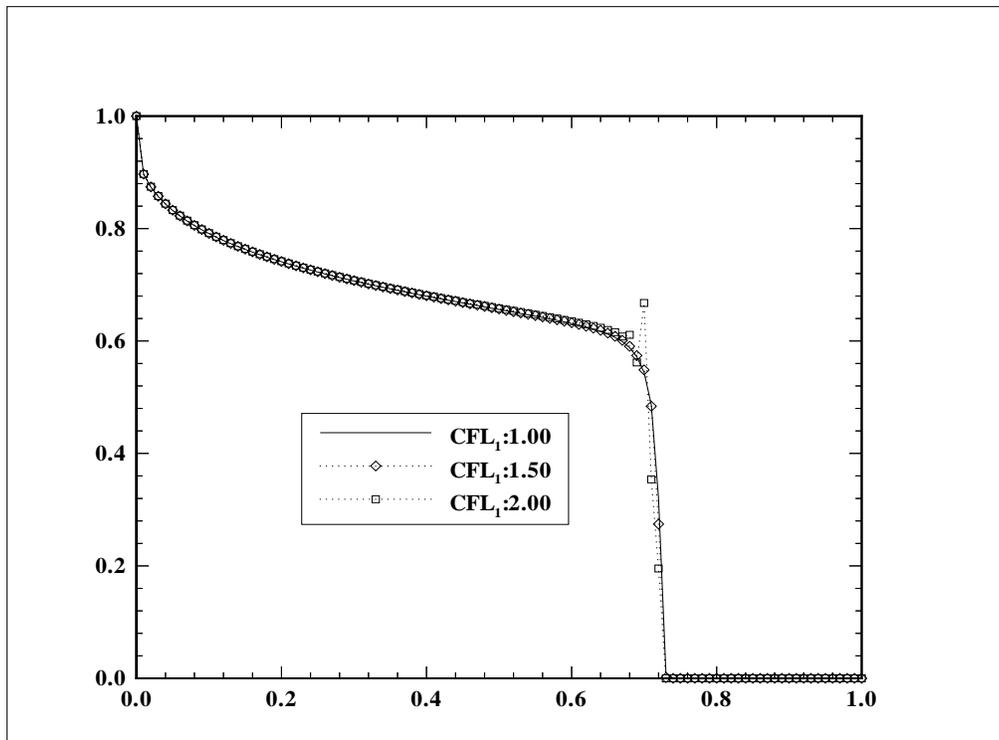
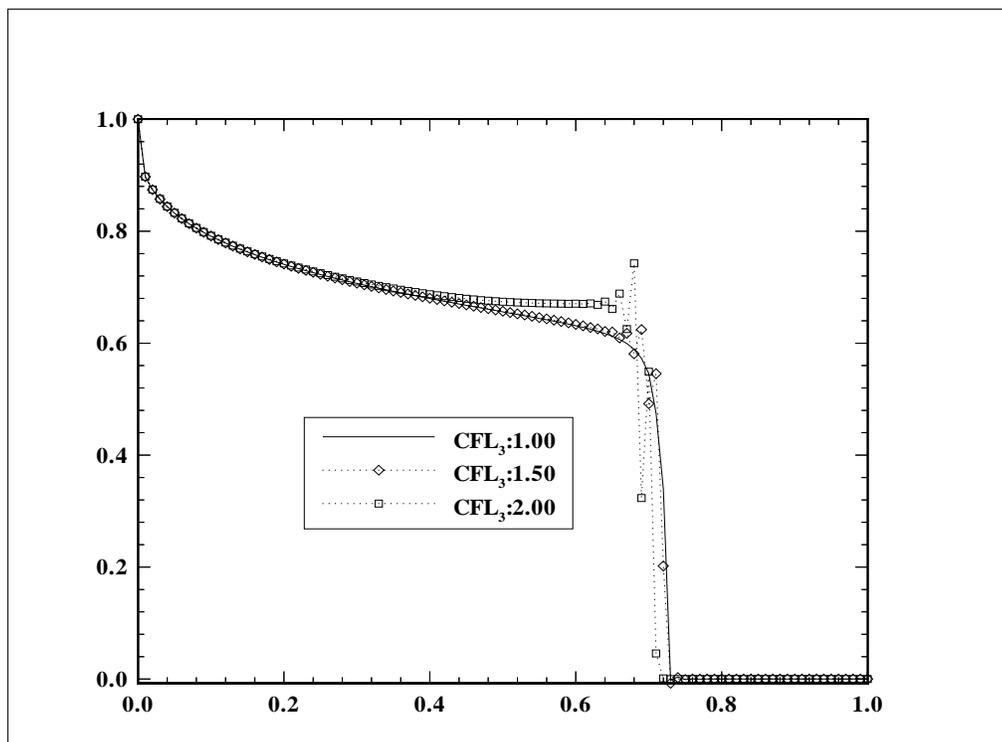
Les systèmes non linéaires décrits par les schémas (2.17) et (2.20) sont résolus par une méthode de prédiction-corrrection illustrée par les relations (2.33) et (2.34), puis par une décomposition  $LU$  pour les systèmes linéaires tridiagonaux associés (Pour la subroutine  $LU$  utilisé voir **Press & al.** [PTV92]).

### 5.3.1 Profil de la saturation en fonction de la CFL

La variation des profils de la saturation en fonction de la CFL pour les différents schémas est présentée dans les figures 5.3, 5.4, 5.5 et 5.6. On remarque que le schéma (E.F.V.) devient instable pour des valeurs de la  $CFL_1 \geq 2$ , le schéma (M.F.E.) pour des valeurs de la  $CFL_3 \geq 1.5$ , le schéma (S-I.F.V.) pour des valeurs de la  $CFL_2 \geq 2$  et le schéma (I.F.V.) reste stable pour différentes valeurs de la  $CFL_2$ , sauf qu'il y a une perte de précision.

### 5.3.2 Approximation autour du front raide

Les comparaisons entre les différents schémas, avec un zoom autour de la discontinuité dans le profil de saturation, sont présentées dans les figures 5.7 et 5.8. On remarque que les schémas explicites (E.F.V.) et (M.F.E.) donnent presque les mêmes résultats et pour les schémas implicites (I.F.V.) et (S-I.F.V.), c'est le schéma (S-I.F.V.) qui approche le mieux le **front raide**.

Fig. 5.3: Profil de saturation (E.F.V.) en fonction de la  $CFL_1$ Fig. 5.4: Profil de saturation (M.F.E.) en fonction de la  $CFL_3$

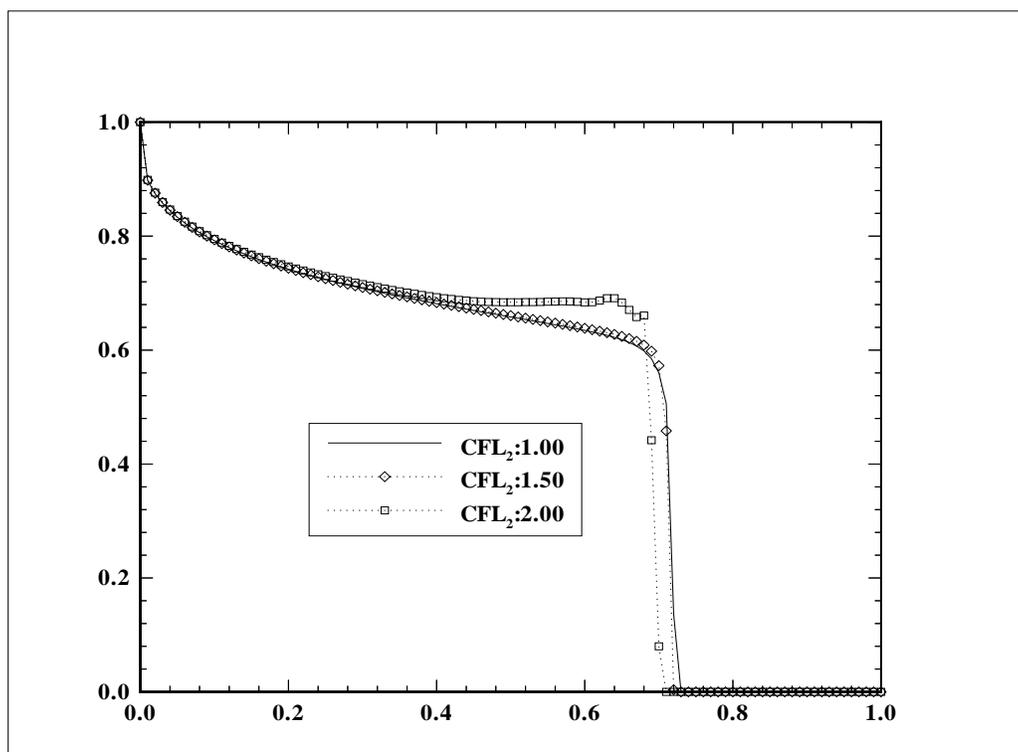


Fig. 5.5: Profil de saturation (S-I.F.V.) en fonction de la  $CFL_2$

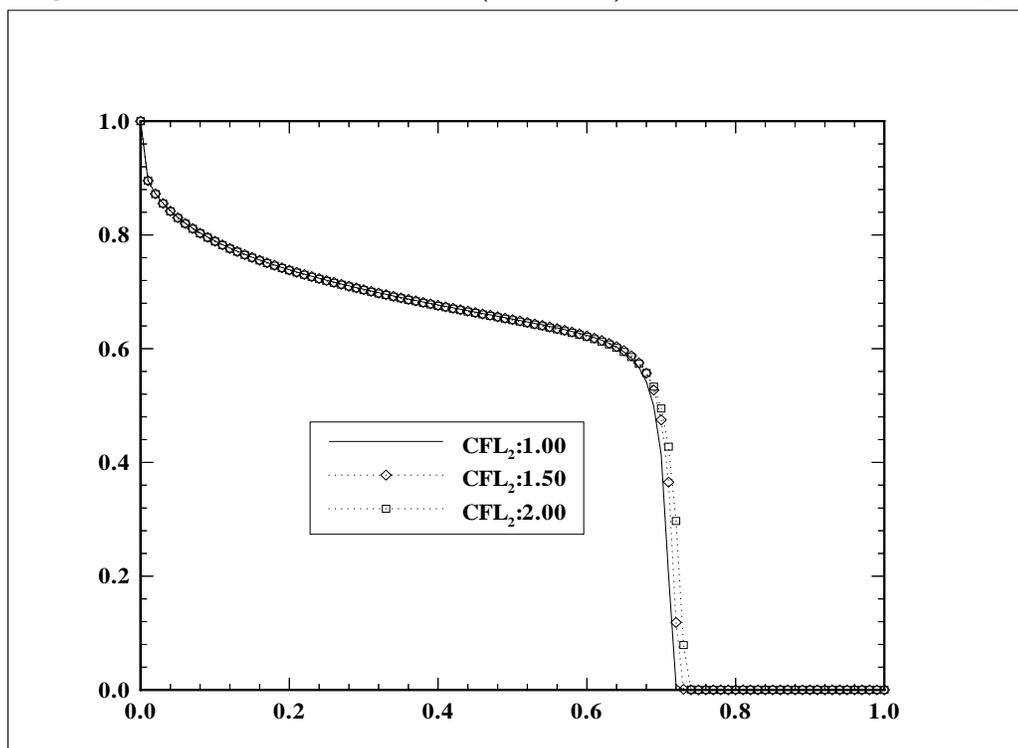


Fig. 5.6: Profil de saturation (I.F.V.) en fonction de la  $CFL_2$

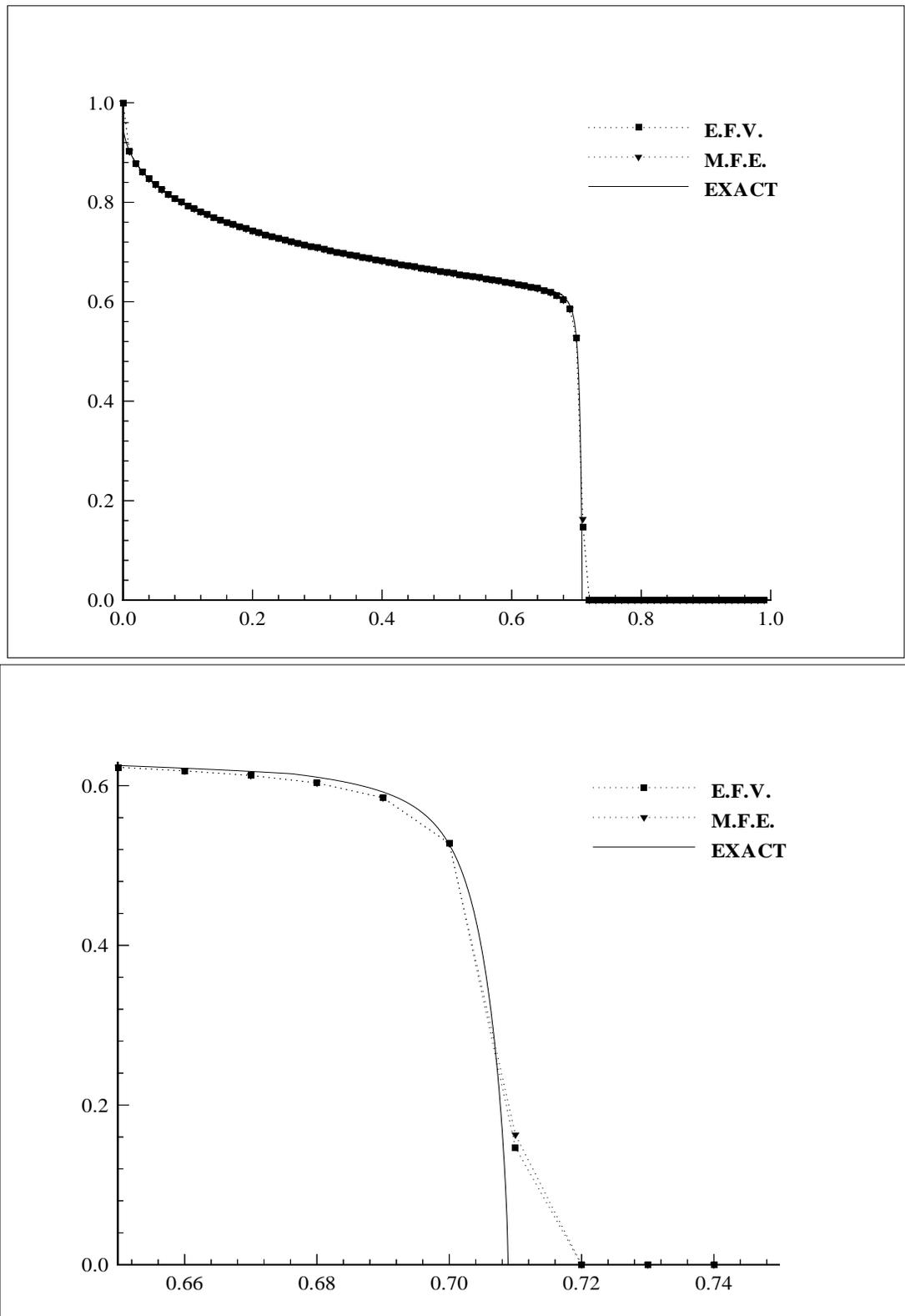


Fig. 5.7: Saturation pour  $h = 10^{-3}$ , Schémas E.F.V. et M.F.E.

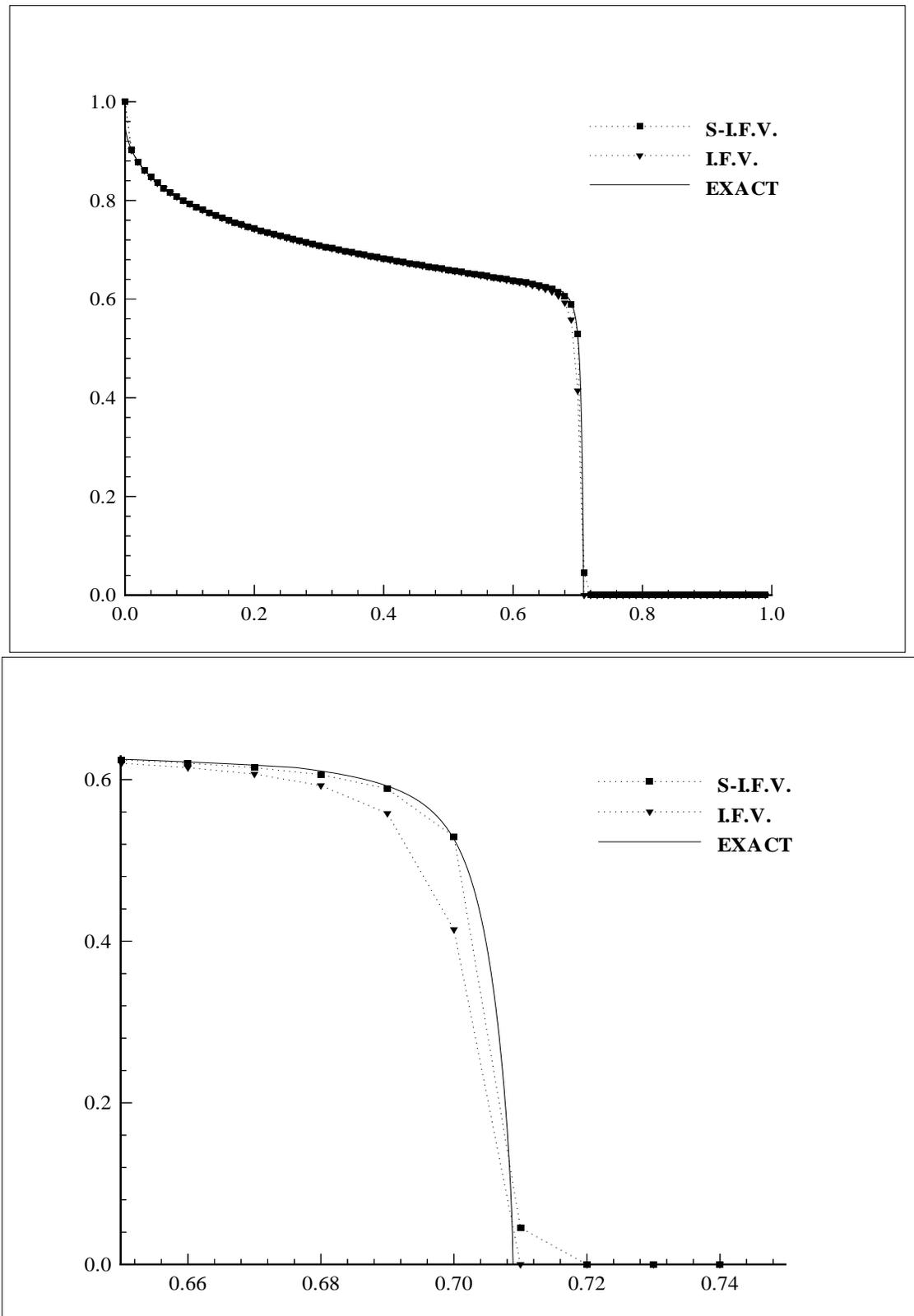


Fig. 5.8: Saturation pour  $h = 10^{-3}$ , Schémas S-I.F.V. et I.F.V.

### 5.3.3 Comparaisons du temps CPU et de l'erreur $l^1$

Comme il est difficile de construire un problème modèle avec une solution exacte, on utilise pour solution exacte, une solution numérique obtenue à l'aide d'une discrétisation "très fine". Dans le Tableau 5.1 on présente le **temps CPU** pour différentes valeurs du pas  $h$ . Dans le Tableau 5.2 on présente l'**erreur relative**  $l^1$  pour différentes valeurs du pas  $h$ .

La condition  $CFL_2 = 1.5$  est choisie pour le schéma (I.F.V.) pour avoir le même temps CPU que le schéma (S-I.F.V.) et pouvoir comparer l'erreur  $l^1$  entre ces deux schémas.

h	E.F.V. $CFL_1 = 1$	M.F.E. $CFL_3 = 1$	S-I.F.V. $CFL_2 = 1$	I.F.V. $CFL_2 = 1.5$
$5 \cdot 10^{-2}$	0.15 s	0.30 s	0.28 s	0.30 s
$1 \cdot 10^{-3}$	12.77 s	27.22 s	6.92 s	6.90 s
$5 \cdot 10^{-4}$	96.60 s	205.56 s	27.92 s	27.82 s

**Tab. 5.1: Temps C.P.U pour  $\tau = 0.1$**

h	E.F.V. $CFL_1 = 1$	M.F.E. $CFL_3 = 1$	S-I.F.V. $CFL_2 = 1$	I.F.V. $CFL_2 = 1.5$
$5 \cdot 10^{-2}$	$1.22 \cdot 10^{-2}$	$1.23 \cdot 10^{-2}$	$8 \cdot 10^{-3}$	$4.07 \cdot 10^{-2}$
$1 \cdot 10^{-3}$	$2.81 \cdot 10^{-3}$	$2.79 \cdot 10^{-3}$	$1.80 \cdot 10^{-3}$	$6.88 \cdot 10^{-3}$
$5 \cdot 10^{-4}$	$1.56 \cdot 10^{-3}$	$1.58 \cdot 10^{-3}$	$1.07 \cdot 10^{-3}$	$1.50 \cdot 10^{-3}$

**Tab. 5.2: Erreur relative  $L^1$**

On remarque que les schémas explicites (E.F.V.) et (M.F.E.) demandent en général un temps CPU très grand dû à la condition CFL. En outre, le schéma volumes finis semi-implicite donne une meilleure approximation avec un meilleur temps CPU par rapport aux autres schémas.

## 5.4 Conclusion

Les schémas numériques étudiés au chapitre 2, ont été testés pour le cas d'un écoulement diphasique immiscible et incompressible en milieu poreux mono-dimensionnel. La solution approchée qui utilise une approche volumes finis a été comparée à une solution numérique obtenue par une méthode standard qui traite le terme de la diffusion avec des éléments finis mixtes. Les résultats numériques indiquent que la méthode des volumes finis est bien adaptée à la discrétisation de ce problème. Les solutions approchées calculées satisfont le principe du maximum discret et sont monotones. De plus le front raide est approché d'une manière efficace. En outre, le schéma volumes finis semi-implicite donne un meilleur rapport qualité prix par rapport aux autres schémas.

# Chapitre 6

## Simulations numériques dans le cas bi-dimensionnel

### 6.1 Introduction

**D**ans ce chapitre, on présente des résultats numériques dans le cas bi-dimensionnel obtenus en utilisant les schémas volumes finis décrits dans les chapitres 3 et 4 pour un fluide immiscible et incompressible en milieu poreux modélisé par le problème (1.33). On donnera en premier une simulation numérique pour le cas d'un réservoir hétérogène avec un maillage régulier en utilisant le schéma semi-implicite (3.7) vu au chapitre 3. Les résultats numériques obtenus par les schémas (E.F.V.), (I.F.V.) et (S-I.F.V.) du chapitre 4 seront présentés et comparés entre eux pour différents exemples de réservoirs homogène, hétérogène, isotrope et anisotrope. On donnera aussi une comparaison des temps (C.P.U.) pour les différents schémas.

La résolution des systèmes non linéaires résultants des schémas implicite et semi-implicite, se fait par un procédé de prédiction-correction plus une méthode du Gradient Conjugué préconditionné ou double Gradient Conjugué préconditionné dans le cas de système non symétrique. Pour l'algorithme du DGCP on se réfère à **Joly & al.** [JOE90, JOV95]. Les résultats de ce chapitre sont publiés séparément dans [AFI99, AFA99, AFA00, AFA01].

## 6.2 Données du problème

Nous traitons le déplacement d'huile ( $o$ ) par l'eau ( $w$ ) dans un réservoir poreux carré bi-dimensionnel horizontal. Nous étudions le processus pour une injection d'eau à partir d'un puits situé au coin gauche inférieur de l'échantillon et un puits de production au coin droit supérieur, les puits sont représentés chacun par une partie de la frontière. Les expressions des fonctions non linéaires : de la **diffusion capillaire**  $a$ , de la **fraction du flux**  $b$ , de la **pression capillaire**  $p_c$  et des **perméabilités relatives**  $k_{rw}$ ,  $k_{ro}$  sont les mêmes que celles du chapitre 5 (cf.§ 5.2). La **mobilité totale**  $d$  (voir figure 6.1) est donnée par :  $d(u) := k_w(u) + k_o(u)$ ,

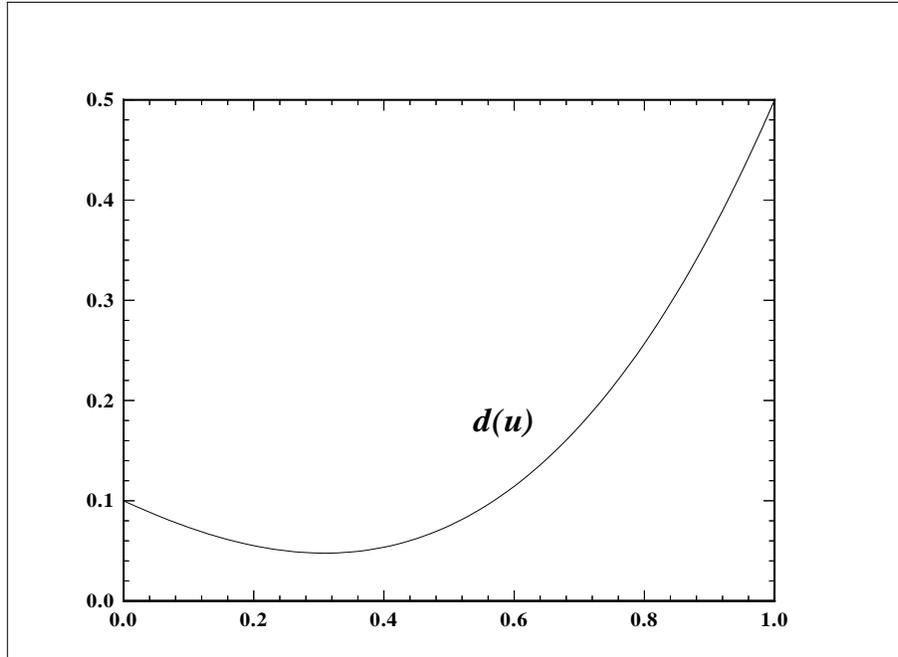


Fig. 6.1: Mobilité totale  $d(u)$

La pression globale  $P$  et la vitesse de filtration totale  $\vec{q}$  sont données par l'équation suivante (voir (1.34) chapitre 1) :

$$(E_d) \begin{cases} \vec{q} = -d(u)K(x)\nabla P; \operatorname{div}(\vec{q}) = 0 & \text{dans } Q_\tau \\ \vec{q} \cdot \vec{n}|_{\Gamma_1} = -q_d; \vec{q} \cdot \vec{n}|_{\Gamma_2} = 0; P|_{\Gamma_3} = P_0 & \text{sur } [0, \tau[ \end{cases}$$

Pour une approximation précise de la vitesse totale  $\vec{q}$  pour chaque pas de temps, on utilise une méthode d'éléments finis mixte duale hybride détaillée dans l'annexe A.

Dans les simulations qui suivent, les **perméabilités relatives** utilisées sont de la forme :

$$k_{rw}(u) = \frac{1}{2}u^{r1}, \quad k_{ro}(u) = (1 - u)^{r2} \quad (6.1)$$

où  $r1$  et  $r2$  sont à préciser pour chaque exemple, la **pression capillaire**

$$p_c(u) = - [(1 - u)/u]^{1/2}$$

et la condition initiale

$$u^0|_{\Gamma_1} = 1, \quad u^0(x) = 0 \text{ pour tout } x \in \Omega \setminus \Gamma_1$$

On prendra une valeur constante pour la porosité  $\Phi(x) = 0.2$  et la pression au puits de production  $P_0 = 0$ , le débit au puits d'injection  $q_d$  sera précisé pour chaque exemple.

## 6.3 Maillage rectangulaire

Dans cette section, nous présentons des résultats numériques en 2-D pour un maillage rectangulaire dans un **réservoir hétérogène isotrope**  $\Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[$ .

Le test a été effectué par le schéma semi-implicite (3.7) sur un **quart de five-spot** de  $30 \times 30$  mailles rectangulaires.

Les perméabilités absolues selon les zones sont:  $K = 10$  Darcy dans les blocs rouges,  $K = 1$  Darcy dans les blocs verts et  $K = 0.1$  Darcy dans les blocs bleus (voir Figure 6.2).

On prendra une valeur constante pour le débit au puits d'injection  $q_d = 1$ , la viscosité de l'eau  $\mu_w = 1$  et la viscosité de l'huile  $\mu_o = 3$ . Les puissances dans les formules des perméabilités relatives (6.1), sont  $r1 = 3$  et  $r2 = 3$ .

Les vitesses de filtration sont représentées dans la figure 6.3 et les contours de la saturation dans la figure 6.4.

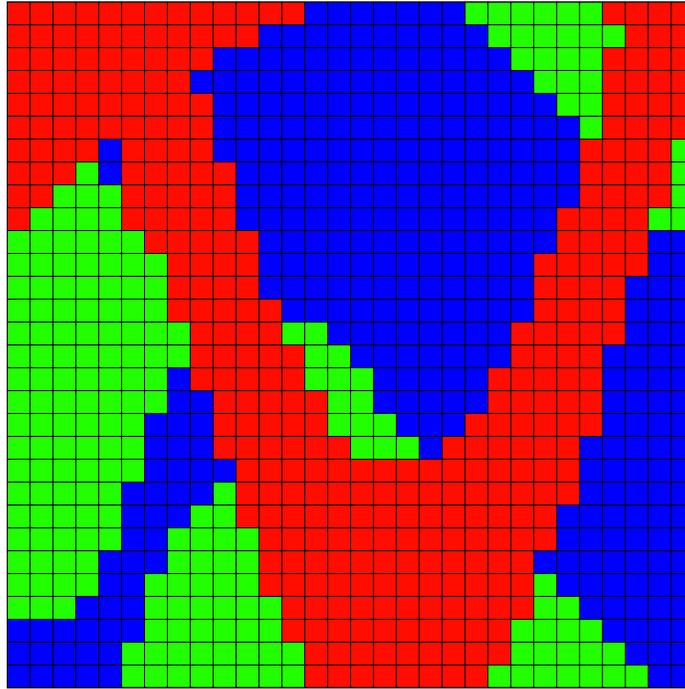
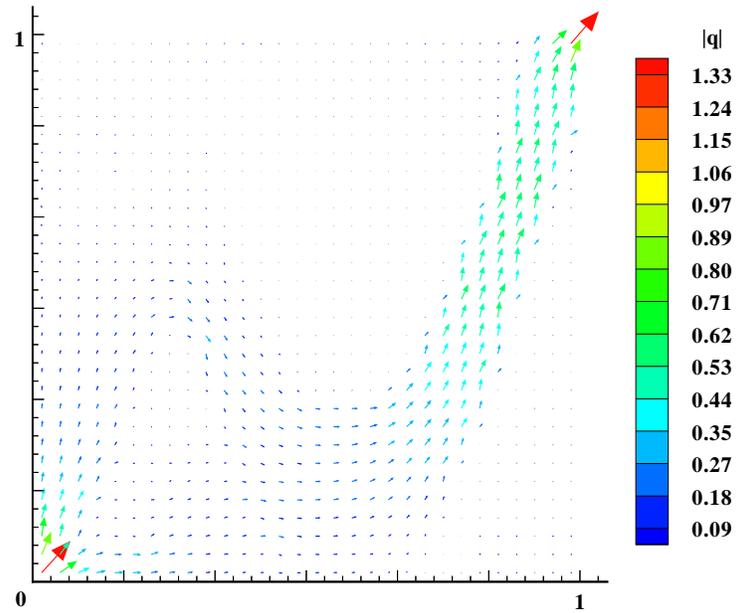
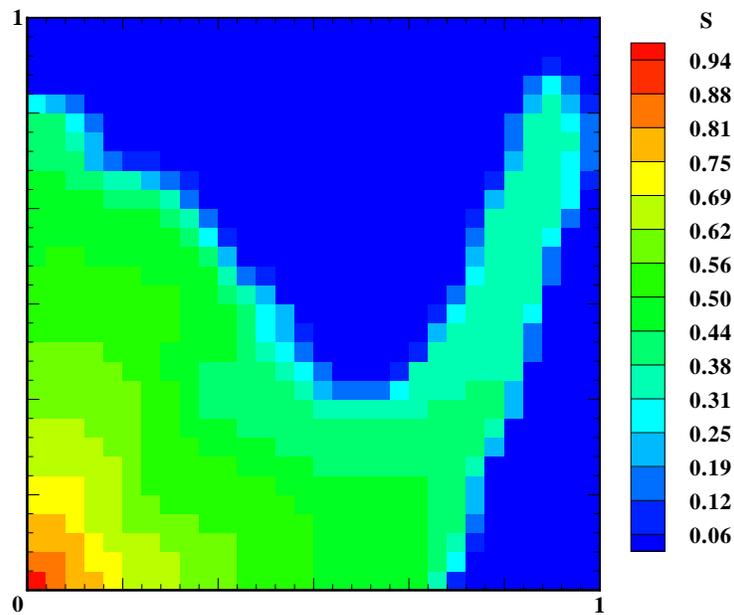


Fig. 6.2: Distribution des perméabilités absolues  $K(x, y)$

Pour une distribution donnée de la vitesse totale  $\vec{q}$  (voir Figure 6.3), on obtient une répartition de la saturation  $u$  (voir Figure 6.4) qui suit les fortes distributions des perméabilités, ce qui correspond au problème physique. Les résultats numériques ainsi obtenus prouvent l'efficacité de la méthode volumes finis utilisée ici pour ce problème d'écoulement diphasique en milieu poreux. Cependant, l'usage d'un maillage rectangulaire induit en général de la diffusion numérique.

Fig. 6.3: Vitesse totale  $\vec{q}$ Fig. 6.4: Profil de la saturation  $u$

## 6.4 Maillage non structuré

### 6.4.1 Test 1: domaine homogène et isotrope

Dans cet exemple, on présente les résultats numériques pour un **réservoir homogène et isotrope**  $\Omega = ]0, 0.1[ \times ]0, 0.1[$  (voir figure 6.5), avec une perméabilité absolue égale à 1 Darcy.

On prendra une valeur constante pour le débit au puits d'injection  $q_d = 1.4$ , la viscosité de l'eau  $\mu_w = 1$  et la viscosité de l'huile  $\mu_o = 3$ . Les puissances dans les formules des perméabilités relatives (6.1), sont  $r1 = 5$  et  $r2 = 3$ .

Les vitesses de filtration sont représentées dans la figure 6.6, les contours de la saturation dans la figure 6.7 et une coupe du profil de la saturation, entre le puits d'injection et le puits de production, dans la figure 6.8.

Le test de comparaison entre les différents schémas volumes finis a été effectué pour un maillage à  $Ne = 3690$  éléments avec un pas  $h = 1.8 \cdot 10^{-3}$ .

$Ne = 3690$	<b>E.F.V.</b> $CFL_1 = 1$	<b>S-I.F.V.</b> $CFL_2 = 1$	<b>I.F.V.</b> $CFL_2 = 10$
$h=1.8 \cdot 10^{-3}$	$dt=1.3 \cdot 10^{-5}$	$dt=2.4 \cdot 10^{-5}$	$dt=2.4 \cdot 10^{-4}$
C.P.U.	2mn25.47s	1mn42.13s	1mn00.44s

**Tab. 6.1: Temps C.P.U. Test 1**

On remarque que le schéma explicite (E.F.V.) demande plus de temps de calcul que les schémas implicites (I.F.V.) et (S-I.F.V.); de plus pour le schéma implicite (I.F.V.) on a pu prendre un  $\Delta t$  dix fois supérieur au  $\Delta t$  pris pour le schéma (S-I.F.V.), ce qui n'est pas toujours possible vu que ça peut engendrer une diffusion numérique importante (voir le cas d'un milieu anisotrope cf. § 6.4.3).

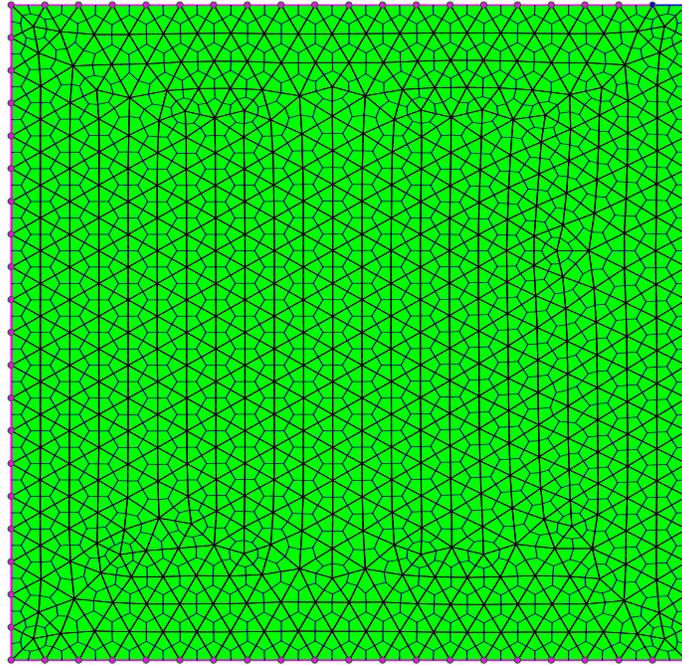


Fig. 6.5: Maillage de  $\Omega = ]0, 0.1[ \times ]0, 0.1[$

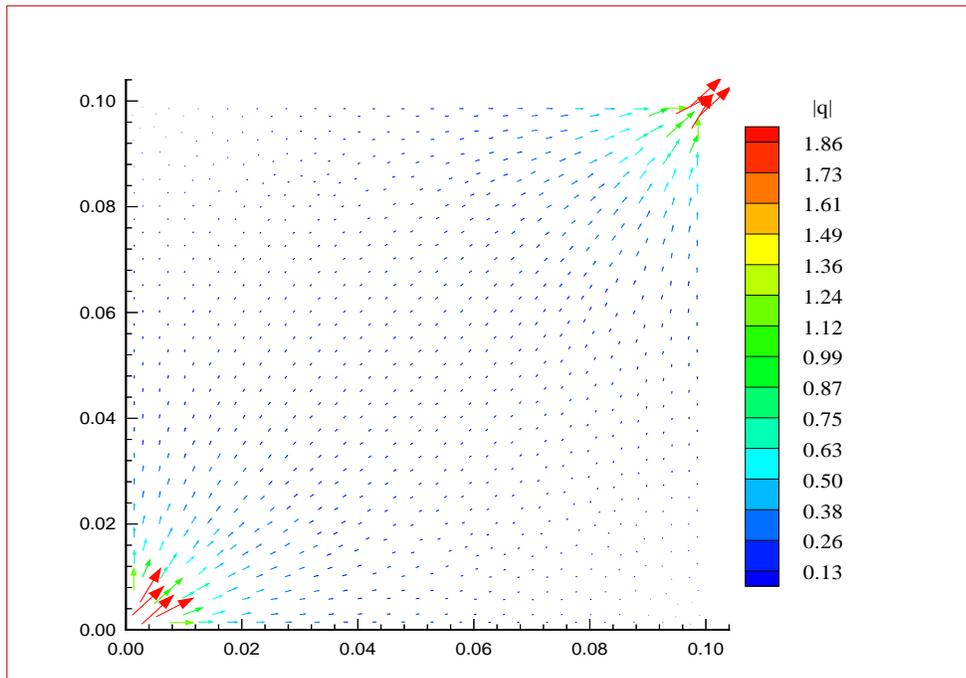


Fig. 6.6: Vitesse totale  $\vec{q}$

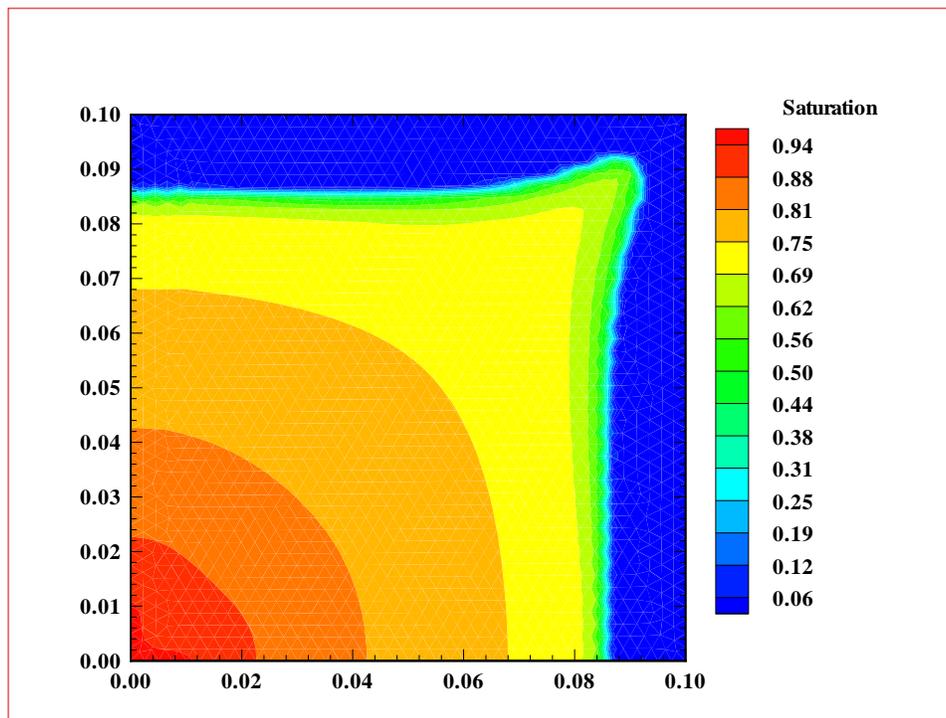


Fig. 6.7: Les contours de la saturation

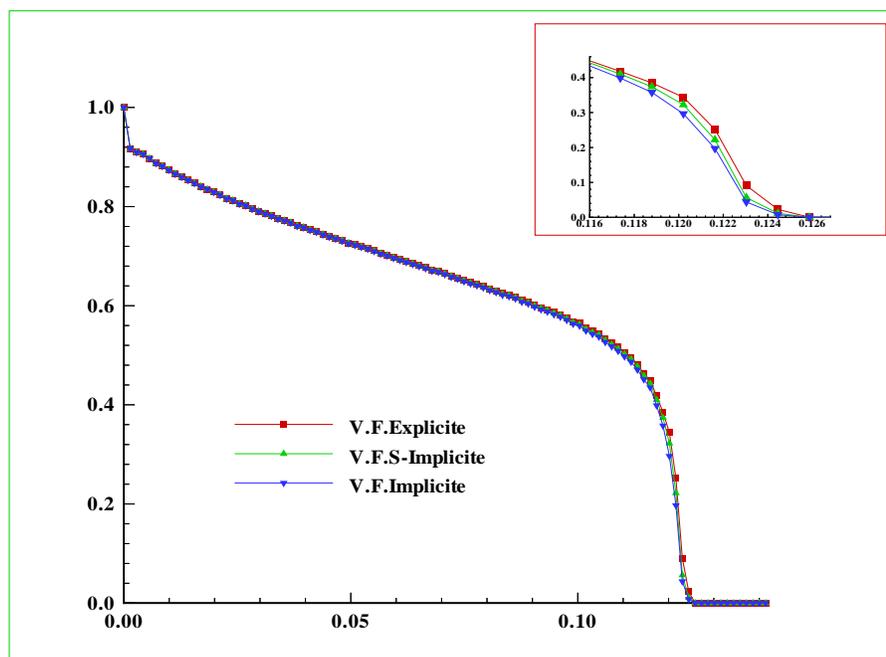
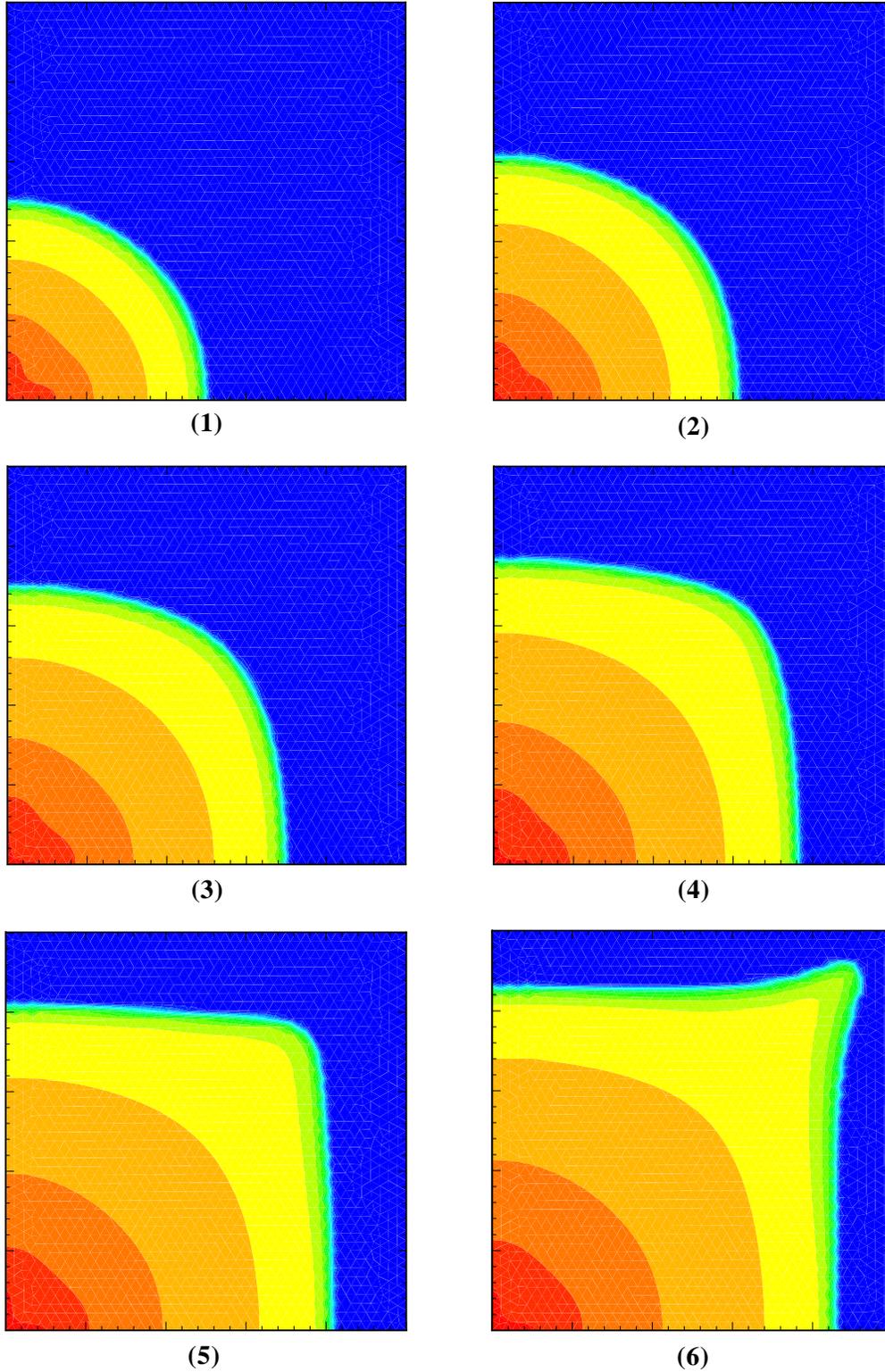


Fig. 6.8: Coupe du profil de la saturation entre les puits

Fig. 6.9: Variation du profil de la saturation au cours du temps



### 6.4.2 Test 2: chenal hétérogène et anisotrope

Dans cet exemple, on présente les résultats numériques pour un **réservoir hétérogène et anisotrope**  $\Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[$  (voir figure 6.10), avec trois différentes valeurs de perméabilité absolue, variant entre 0.1 Darcy et 10 Darcy.

Les perméabilités absolues selon les zones sont :  $K = 10K_0$  dans les blocs jaunes,  $K = K_0$ , dans les blocs verts et  $K = 0.1K_0$  dans les blocs rouges, avec :

$$K_0 = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.3 \\ 0.3 & 1.0 \end{pmatrix}$$

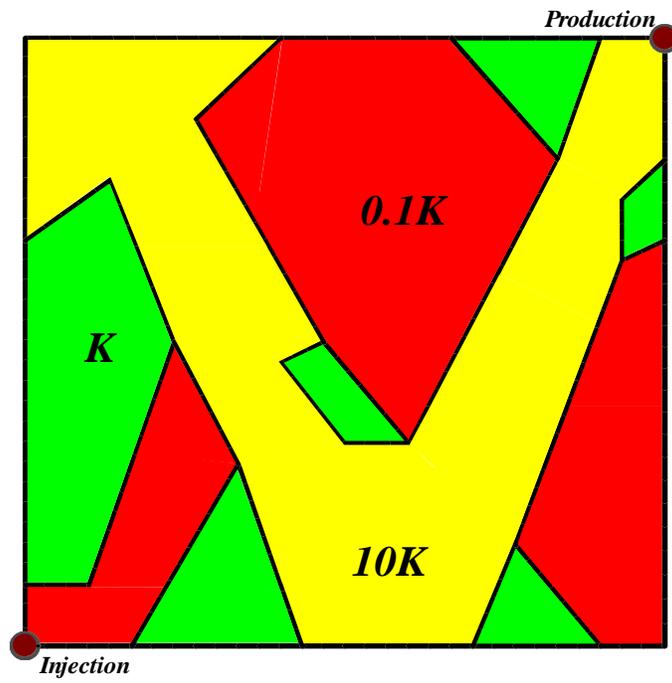
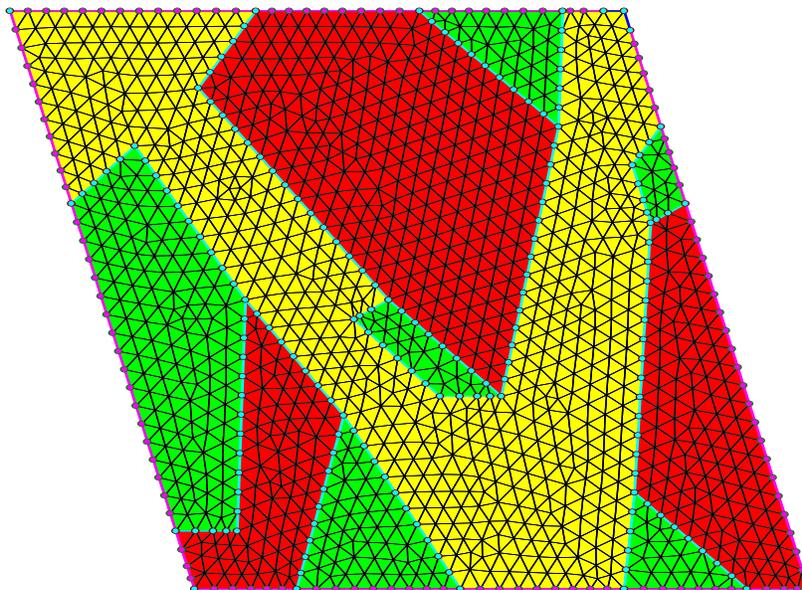
On prendra une valeur constante pour le débit au puits d'injection  $q_d = 0.5$ , la viscosité de l'eau  $\mu_w = 1$  et la viscosité de l'huile  $\mu_o = 10$ . Les puissances dans les formules des perméabilités relatives (6.1), sont  $r1 = 3$  et  $r2 = 3$ .

Vu que le tenseur de perméabilité n'est pas diagonal, le maillage se fait sur  $\Omega_0 := U_0(\Omega)$  une transformation de  $\Omega$  par l'application linéaire  $U_0$  tel que  $\mathbf{adj}[K_0] = [U_0]^t [U_0]$  (voir figure 6.11), ce qui permet la prise en compte des hétérogénéités anisotropiques du réservoir (voir chapitre 4 cf. § 4.3.6).

Le test a été effectué par le schéma semi-implicite (4.26) avec un maillage à  $Ne = 3642$  éléments soit un pas  $h = 1.24 \cdot 10^{-2}$ , pour une  $CFL_2 = 1$  soit  $\Delta t = 2.46 \cdot 10^{-4}$ .

On remarque que la vitesse de filtration totale  $\vec{q}$  (voir figure 6.12) et les contours de la saturation (voir figure 6.13) suivent les zones de forte perméabilité, ce qui correspond bien au problème physique.

Bien que l'étude théorique a été faite pour une modélisation avant le **temps de percée**, le code numérique réalisé prend en compte le modèle après le temps de percée.

Fig. 6.10: Chenal hétérogène et anisotrope  $\Omega$ Fig. 6.11: Maillage de  $\Omega_0 = U_0(\Omega)$

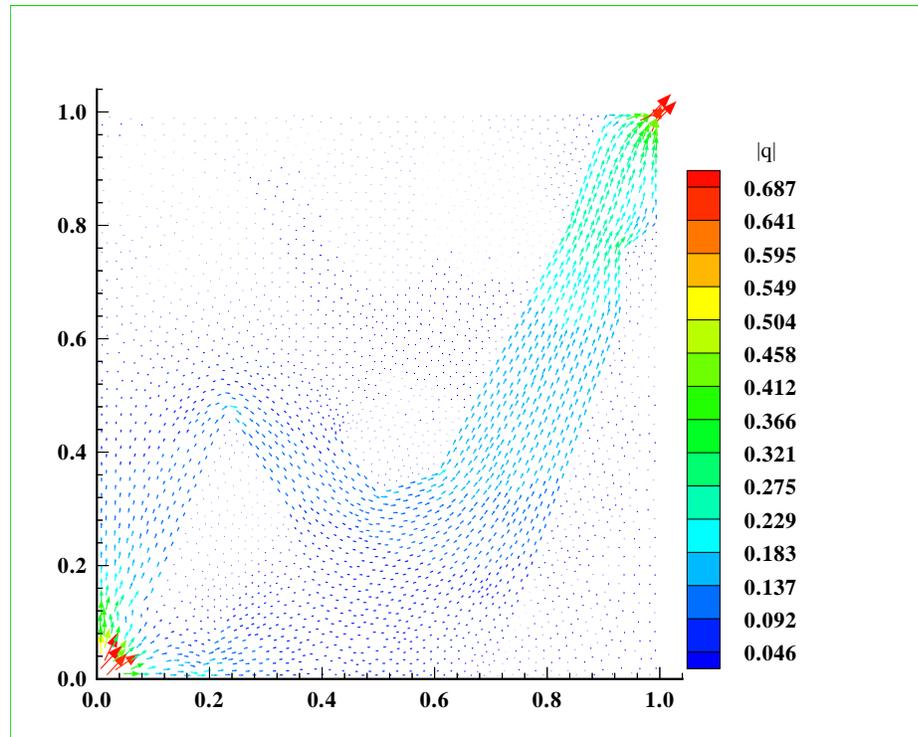
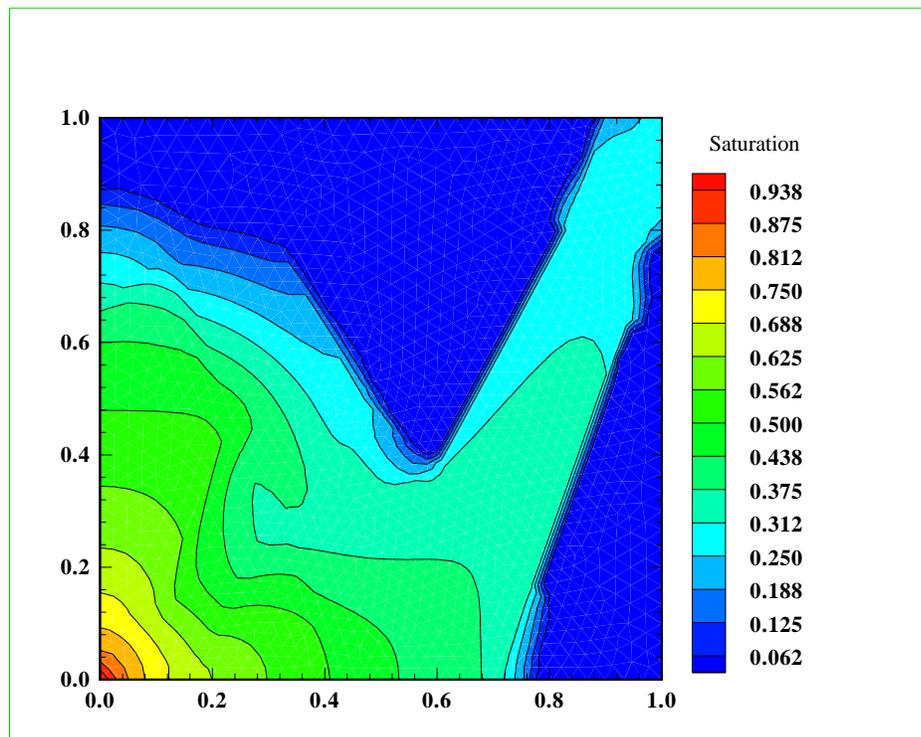
Fig. 6.12: Vitesse totale  $\vec{q}$ 

Fig. 6.13: Les contours de la saturation

### 6.4.3 Test 3: milieu stratifié et anisotrope

Dans cet exemple, on présente les résultats numériques pour un **réservoir stratifié et anisotrope**  $\Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[$  (voir figure 6.14), avec deux différentes valeurs de perméabilité absolue :

$$K = \begin{pmatrix} 1.0 & 10^{-5} \\ 10^{-5} & 1.0 \end{pmatrix} \text{ pour } y \in [0.4, 0.7] \text{ zone jaune}$$

$$\text{et } K = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.2 \\ 0.2 & 1.0 \end{pmatrix} \text{ pour } y \in ]0, 0.4[ \cup ]0.7, 1[ \text{ zones vertes}$$

On injecte de l'eau à un débit constante  $q_d = 1$  sur toute la partie gauche du réservoir ( $\{0\} \times [0, 1]$ ) et la production se fait par la partie droite du réservoir ( $\{1\} \times [0, 1]$ ) à pression constante  $P_0 = 0$ . La viscosité de l'eau  $\mu_w = 1$  et la viscosité de l'huile  $\mu_o = 10$ . Les puissances dans les formules des perméabilités relatives (6.1), sont  $r_1 = 3$  et  $r_2 = 3$ .

Cet exemple illustre l'effet de l'hétérogénéité anisotropique, vu que les contours de pression (figure 6.15) et de saturation (figure 6.16) subissent une déformation non symétrique dûe aux valeurs non diagonales dans le tenseur de perméabilité.

Le test de comparaison a été effectué pour un maillage à  $Ne = 3384$  éléments avec un pas  $h = 2.2 \cdot 10^{-2}$ .

$Ne = 3384$	<b>E.F.V.</b> $CFL_1 = 1$	<b>S-I.F.V.</b> $CFL_2 = 1$	<b>I.F.V.</b> $CFL_2 = 3$
$h = 2.2 \cdot 10^{-2}$	$dt = 2.0 \cdot 10^{-4}$	$dt = 4.4 \cdot 10^{-4}$	$dt = 1.4 \cdot 10^{-3}$
C.P.U.	0mn08.19s	0mn06.23s	0mn07.76s

**Tab. 6.2: Temps C.P.U. Test 3**

On remarque aussi une diffusion numérique pour le schéma implicite (I.F.V.) à partir d'une  $CFL_2 = 3$ , par rapport aux autres schémas (voir figure 6.17).

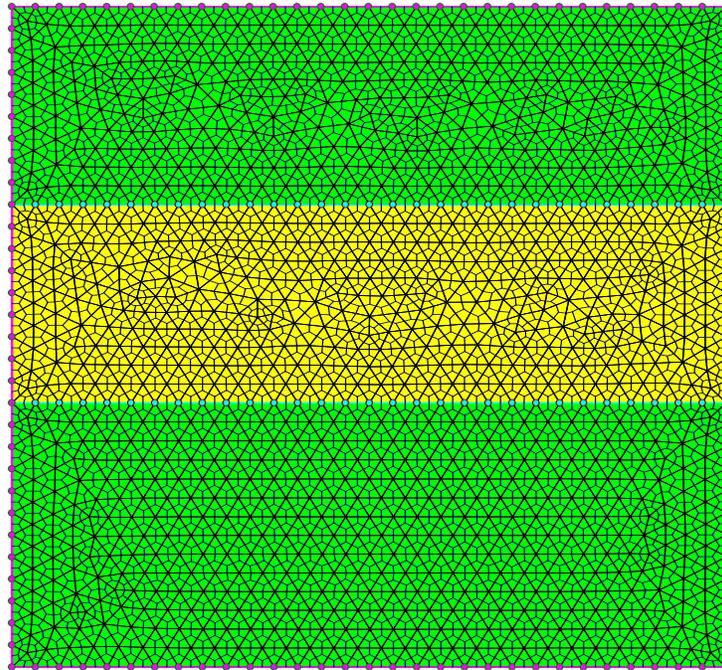
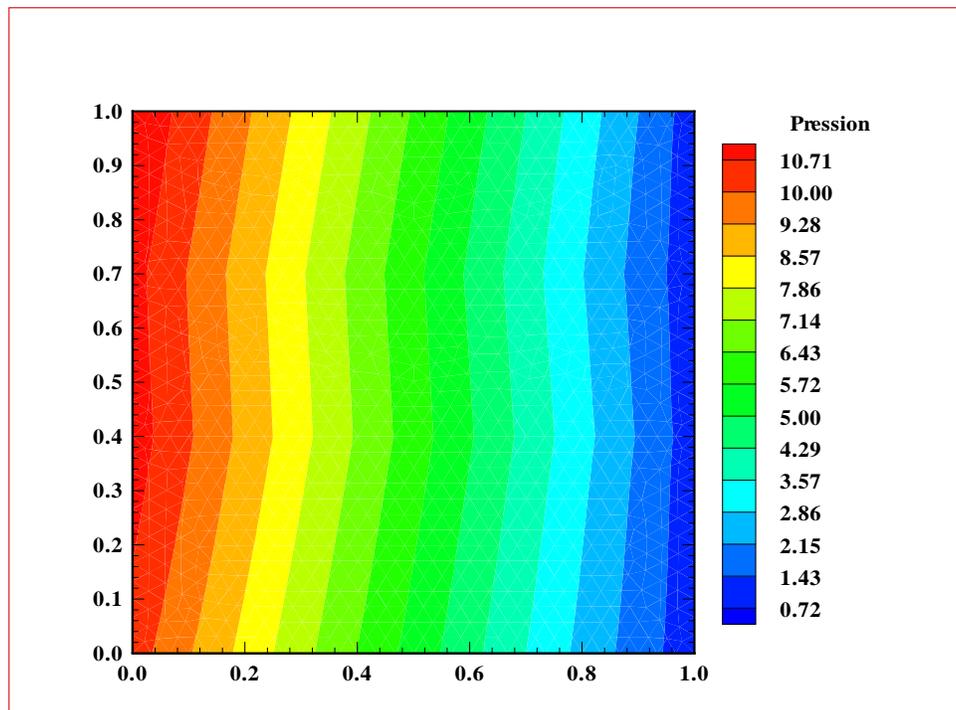
Fig. 6.14: Réservoir stratifié et anisotrope  $\Omega$ 

Fig. 6.15: Les contours de la pression

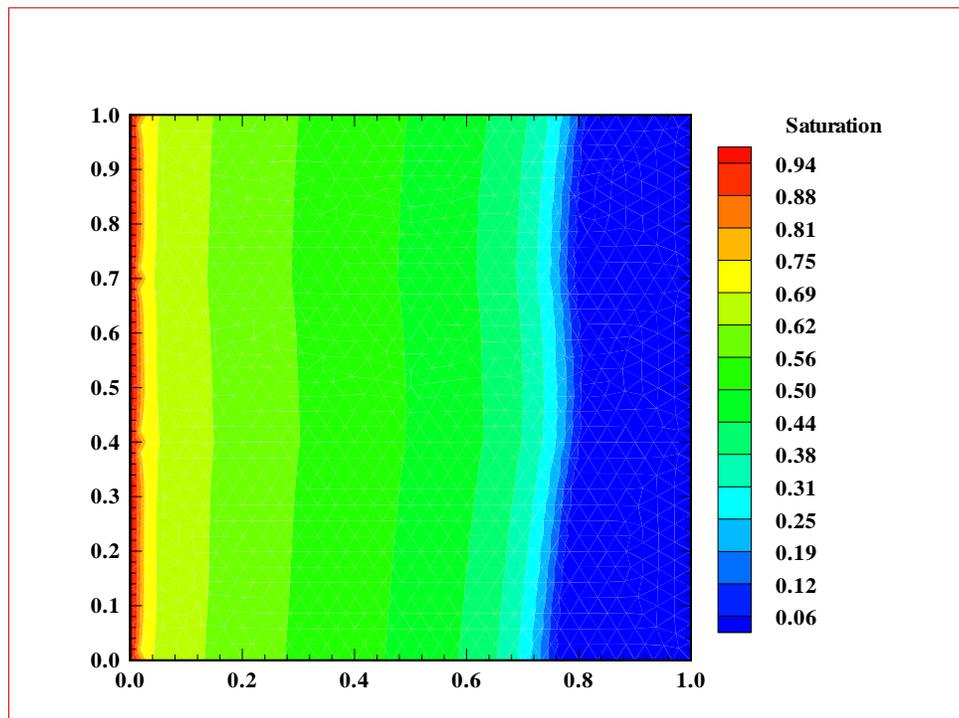
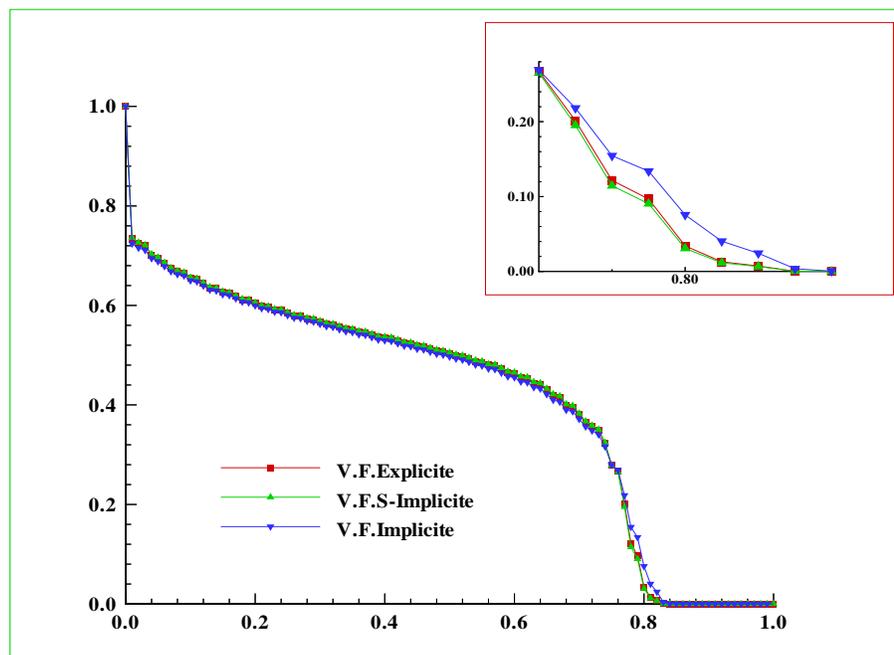


Fig. 6.16: Les contours de la saturation

Fig. 6.17: Coupe du profil de la saturation pour ( $y = 0.5$ )

#### 6.4.4 Test 4: milieu hétérogène et anisotrope

Dans cet exemple, on présente les résultats numériques pour un **réservoir hétérogène et anisotrope**  $\Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[$  (voir figure 6.18), avec quatre différentes valeurs de perméabilité absolue, variant entre  $10^{-4}$  Darcy et 1 Darcy :

$$K = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.2 \\ 0.2 & 1.0 \end{pmatrix} \quad \text{dans le bloc jaune,} \quad K = 10^{-2} \cdot I_d \quad \text{dans le bloc vert,}$$

$$K = 5 \cdot 10^{-3} \cdot I_d \quad \text{dans les blocs rouges et} \quad K = 10^{-4} \cdot I_d \quad \text{dans le bloc bleu}$$

On prendra une valeur constante pour le débit au puits d'injection  $q_d = 1$ , la viscosité de l'eau  $\mu_w = 1$  et la viscosité de l'huile  $\mu_o = 3$ . Les puissances dans les formules des perméabilités relatives (6.1), sont  $r1 = 3$  et  $r2 = 3$ .

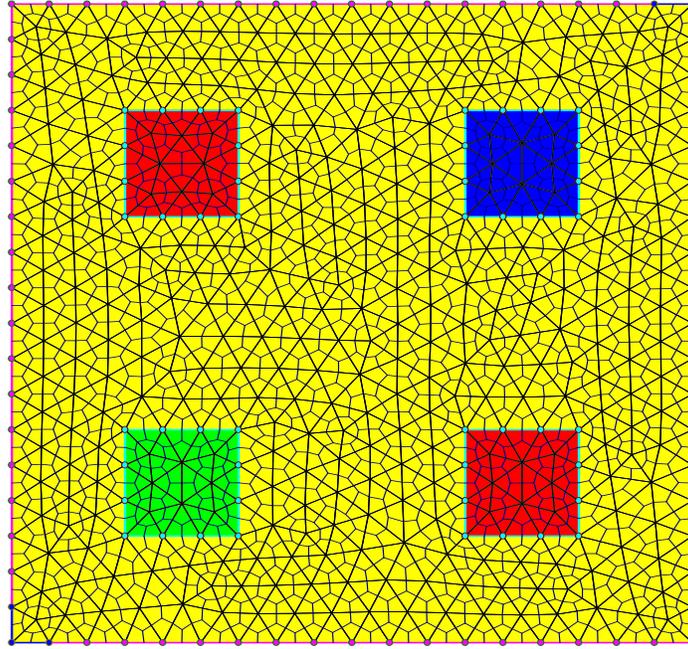
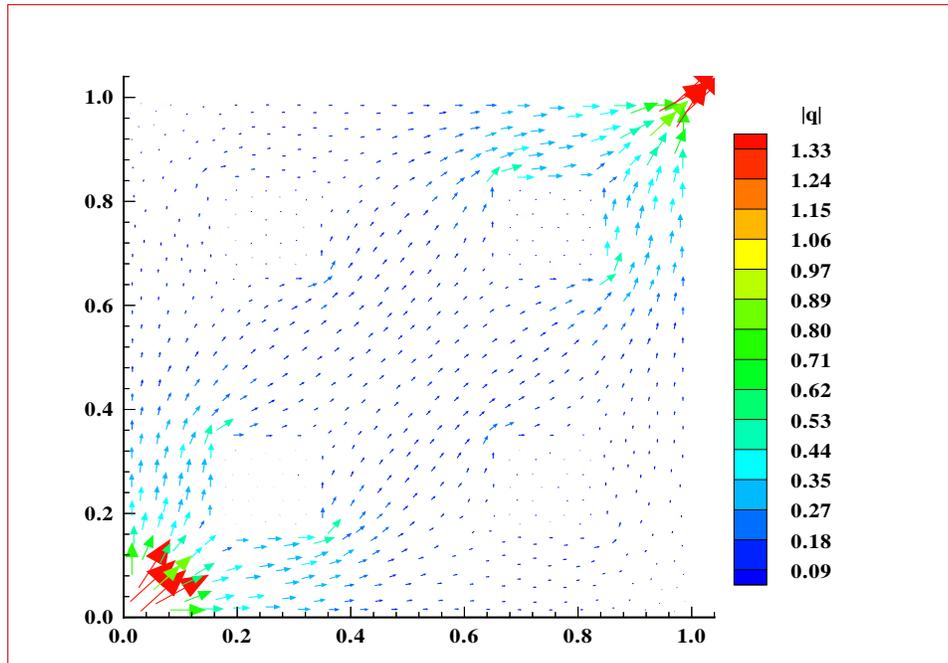
Les vitesses de filtration sont représentées dans la figure 6.19, les contours de la saturation dans la figure 6.20, le profil de la saturation dans la figure 6.22, et une coupe du profil de la saturation entre le puits d'injection et le puits de production dans la figure 6.21.

Le test de comparaison a été effectué pour un maillage à  $Ne = 3082$  éléments avec un pas  $h = 1.8 \cdot 10^{-2}$ .

$Ne = 3082$	<b>E.F.V.</b> $CFL_1 = 1$	<b>S-I.F.V.</b> $CFL_2 = 1$	<b>I.F.V.</b> $CFL_2 = 2$
$h=1.8 \cdot 10^{-2}$	$dt=1.3 \cdot 10^{-4}$	$dt=2.2 \cdot 10^{-4}$	$dt=4.4 \cdot 10^{-4}$
C.P.U.	1mn45.93s	1mn09.99s	1mn06.95s

**Tab. 6.3: Temps C.P.U. Test 4**

Dans cet exemple, on illustre l'écoulement d'un fluide à travers un réservoir avec des variations discontinues de la perméabilité absolue. Le fluide se déplace initialement à partir du puits d'injection d'une manière uniforme, puis il subit l'influence des variations de perméabilité, en suivant les zones de forte perméabilité. On remarque aussi une bonne approche du front de saturation au tour des fortes discontinuités de la perméabilité. Ceci montre l'efficacité des schémas numériques proposés ici.

Fig. 6.18: Réservoir hétérogène et anisotrope  $\Omega$ Fig. 6.19: Vitesse totale  $\vec{q}$

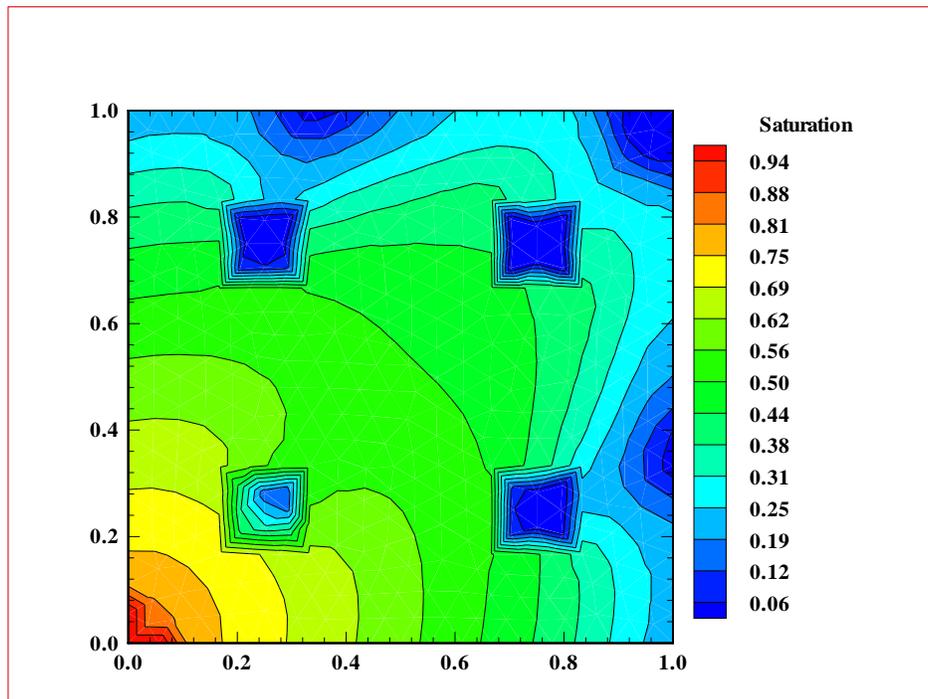


Fig. 6.20: Les contours de la saturation

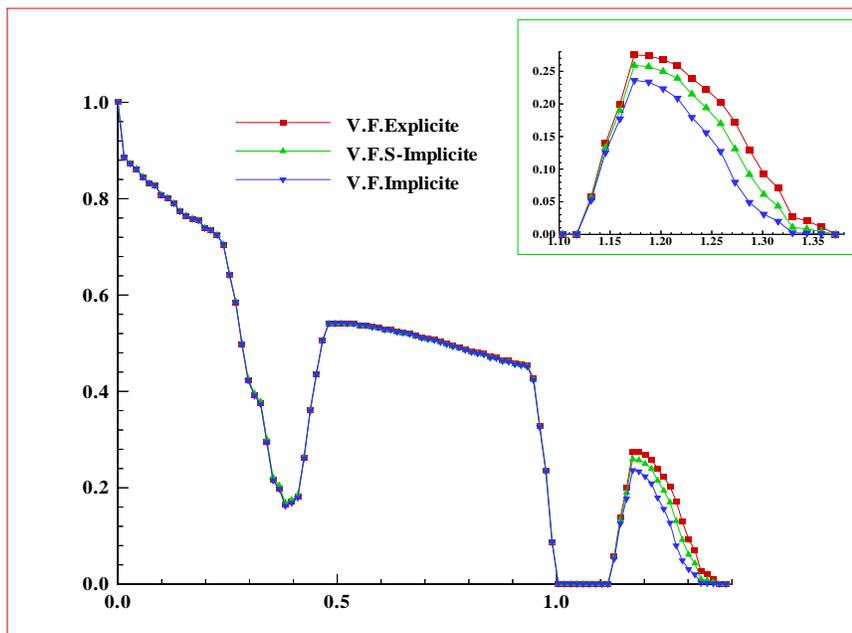


Fig. 6.21: Coupe du profil de la saturation entre les puits

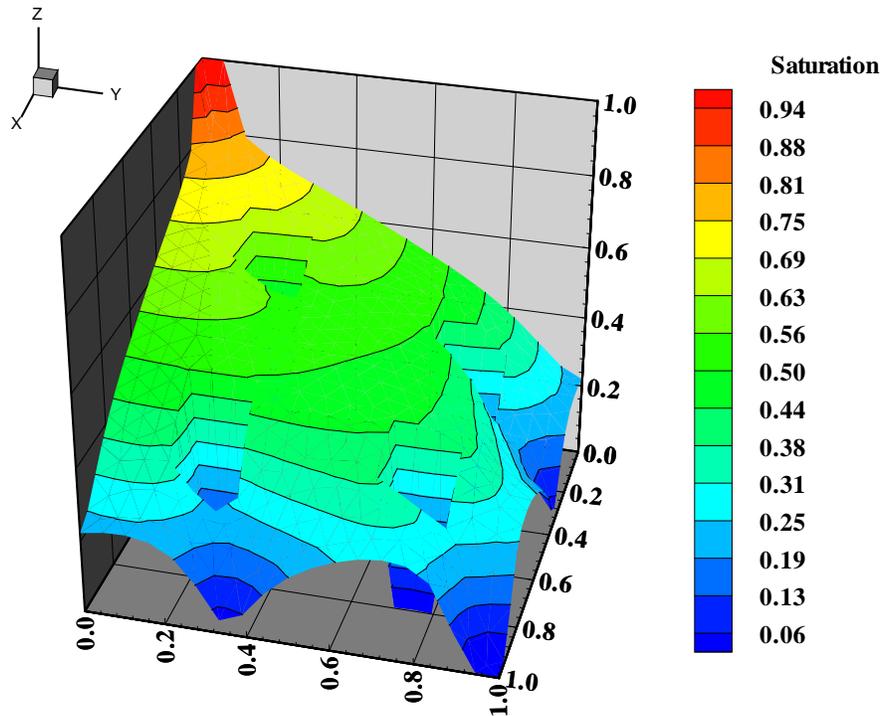


Fig. 6.22: Le profil de la saturation  $u$

## 6.5 Conclusion

Les schémas numériques, étudiés dans les chapitre 3 et 4, ont été testés pour des cas d'écoulement diphasique immiscible et incompressible en milieu poreux bi-dimensionnel. Une méthode d'éléments finis mixte duale hybride est utilisée pour obtenir une bonne approximation de la vitesse totale. Les résultats numériques indiquent que la méthode des volumes finis est bien adaptée à la discrétisation de ce problème. Les solutions numériques obtenus satisfont le principe du maximum discret et sont monotones. De plus les hétérogénéités anisotropiques du milieu poreux sont prises d'une manière efficace. En outre, les schémas volumes finis semi-implicite et implicite donnent un meilleur temps de calcul par rapport au schéma explicite.



# Partie



# Conclusion Générale

Nous avons développé et analysé des schémas numériques de type volumes finis, pour un problème de convection-dominante diffusion-dégénérée parabolique non linéaire, issu de la modélisation des écoulements diphasiques de fluides en milieu poreux.

Nous avons traité et analysé trois familles de schémas volumes finis (explicite implicite et semi-implicite). Après avoir établi que les schémas sont  $L^\infty$  et  $BV$  stables, sous les conditions CFL appropriées et satisfont le principe du maximum discret, on obtient des résultats de convergence, vers la solution faible du problème, dans  $L^1$  pour des maillages réguliers en 1-D et 2-D, et dans  $L^2$  pour des maillages non structurés en dimension multiple, ceci en introduisant une technique de maillage adéquate permettant de préserver le principe du maximum discret sur des maillages déstructurés.

Des résultats numériques sont présentés en 1-D, qui confirment, la stabilité des schémas numériques proposés et l'efficacité du schéma semi-implicite en temps de calcul (C.P.U.). En dimension deux, les résultats numériques obtenus montrent que la méthode des volumes finis est bien adaptée à la discrétisation de ce problème. Les solutions approchées calculées satisfont le principe du maximum discret et sont monotones. De plus les hétérogénéités anisotropiques du milieu poreux sont prises d'une manière efficace. En outre, les schémas volumes finis semi-implicite et implicite donnent un meilleur temps de calcul par rapport au schéma explicite.

Le code numérique réalisé prend en compte le couplage entre une équation parabolique non linéaire dégénérée et une famille d'équations elliptiques paramétrées par le temps. Ceci montre l'efficacité des schémas numériques proposés ici, qui

combinent une méthode d'éléments finis mixte hybride pour l'équation elliptique en pression et une méthode de volumes finis pour l'équation parabolique en saturation.

## Remarques et perspectives

L'analyse des schémas numériques présentés ici, pour le problème fortement couplé reste ouvert. Il est à noter que l'estimation de la vitesse de filtration  $\vec{q}$  dans  $L^\infty$ , introduite comme hypothèse dans notre cas, est un problème ouvert pour l'équation elliptique en pression.

Les simulations numériques en 3-D, sont aujourd'hui d'une grande importance dans l'industrie pétrolière, et mérite d'être abordées.

Nous nous sommes concentrés dans ce travail sur l'étude de la convergence des schémas numériques, il serait aussi utile d'étudier les estimations d'erreur pour ces schémas volumes finis.

# Annexe A

## Rappels sur les éléments finis mixtes hybrides

La modélisation de nombreux problèmes physiques conduit parfois à la résolution de problèmes d'équations aux dérivées partielles elliptiques. À titre d'exemple, l'équation en pression dans la modélisation des écoulements diphasiques en milieux poreux. Nous présentons ici une méthode des éléments finis mixte duale hybride pour discrétiser de telles équations (voir **Brezzi & Fortin** [BRF91] et **Bendali & al.** [BRT96]).

### Introduction

Considérons le problème de Dirichlet suivant :

$$(P_K) \begin{cases} -\operatorname{div}(K\nabla p) = f & \text{dans } \Omega \\ p = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

avec les hypothèses habituelles suivantes :

(H1)  $\Omega$  un ouvert connexe de  $\mathbb{R}^d$ , de frontière polyédrique  $\Gamma = \partial\Omega$ .

(H2)  $f \in L^2(\Omega)$ .

(H3)  $K \in (W^{1,\infty}(\Omega))^{\text{d}\times\text{d}}$  une matrice uniformément elliptique et bornnée c.à.d.  $\forall \xi \neq 0, 0 < K_- |\xi|^2 \leq \xi^t K(x) \xi \leq K^+ |\xi|^2 < \infty$  p.p. dans  $\Omega$ .

## Méthodes d'éléments finis mixtes

En général, dans des problèmes physiques où  $p$  représente la grandeur pression pour un constituant, on cherche à évaluer le gradient de  $p$  qui représente le flux ou la vitesse de filtration pour les problèmes des écoulements dans un milieu poreux.

On est donc amené à introduire une nouvelle variable :  $\vec{q} = -K(x)\nabla p$  et à résoudre un problème mixte de la forme :

$$\begin{cases} \vec{q} = -K(x)\nabla p; \operatorname{div}(\vec{q}) = f & \text{dans } \Omega \\ p = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

une formulation **mixte primale** de ce problème consiste à chercher  $(\vec{q}, p)$  solution de :

$$\begin{cases} (\vec{q}, p) \in (L^2(\Omega))^d \times H_0^1(\Omega) \\ \int_{\Omega} K^{-1}(x)\vec{q} \cdot \vec{w} dx + \int_{\Omega} \nabla p \cdot \vec{w} dx = 0 \quad \forall \vec{w} \in (L^2(\Omega))^d \\ \int_{\Omega} \vec{q} \cdot \nabla v dx = - \int_{\Omega} f \cdot v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

On constate que l'on impose ici la régularité sur l'inconnue  $u$ , cette formulation est sans doute moins répandue que la version **mixte duale** donnée par :

$$\begin{cases} \text{trouver } (\vec{q}, p) \in H(\operatorname{div}, \Omega) \times L^2(\Omega) \\ \int_{\Omega} K^{-1}(x)\vec{q} \cdot \vec{w} dx - \int_{\Omega} p \operatorname{div}(\vec{w}) dx = 0 \quad \forall \vec{w} \in H(\operatorname{div}, \Omega) \\ \int_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{q}) v dx = \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in L^2(\Omega) \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

Les problèmes (A.3) et (A.4) sont équivalents et on a :

**Théorème A.1** *Sous les hypothèses (H1) – (H3), le problème (A.4) admet une solution unique (voir **Brezzi & Fortin** [BRF91]).*

On peut aussi formuler un problème équivalent où l'on impose la régularité sur les inconnues  $p$  et  $\vec{q}$  à la fois.

## Problème discret

Soit  $\Lambda_h$  une famille de triangulation régulière au sens de la définition (4.3), alors l'espace d'approximation de degré  $k$  pour les fonctions vectorielles  $\vec{w}$  de

$H(\operatorname{div}, \Omega)$  est défini par :

$$ID_k := (\mathcal{P}_k)^d + \vec{r}(x) \cdot \tilde{\mathcal{P}}_k$$

où  $\mathcal{P}_k$  est l'espace des polynômes de degré  $\leq k$  sur chaque élément fini de  $\Lambda_h$  et  $\tilde{\mathcal{P}}_k \subset \mathcal{P}_k$  le sous espace des polynômes homogènes,  $\vec{r}(x)$  est une fonction vectorielle dont les composantes sont les coordonnées cartésiennes  $x_1, \dots, x_d$ . On définit les espaces :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_h^{(k)} &:= \{\vec{w}_h \in H(\operatorname{div}, \Omega); \text{ tel que } \forall T \in \Lambda_h, \vec{w}_h|_T \in ID_k\} \\ \mathcal{M}_h^{(k)} &:= \{v \in L^2(\Omega); \text{ tel que } \forall T \in \Lambda_h, v_h|_T \in \mathcal{P}_k\} \end{aligned}$$

Alors une approximation de la solution  $(\vec{q}, p)$  du problème (A.4) par une méthode d'éléments finis **mixte duale** de degré  $k$ , consiste à chercher  $(\vec{q}_h, p_h)$ , vérifiant :

$$\begin{cases} (\vec{q}_h, p_h) \in \mathcal{W}_h^{(k)} \times \mathcal{M}_h^{(k)} \\ \int_{\Omega} K^{-1}(x) \vec{q}_h \cdot \vec{w}_h dx - \int_{\Omega} p_h \operatorname{div}(\vec{w}_h) dx = 0 & \forall \vec{w}_h \in \mathcal{W}_h^{(k)} \\ \int_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{q}_h) v_h dx = \int_{\Omega} f v_h dx & \forall v_h \in \mathcal{M}_h^{(k)} \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

**Théorème A.2** *Sous les hypothèses (H1) – (H3), le problème (A.5) admet une solution unique (voir **Brezzi & Fortin** [BRF91]).*

Une approximation **mixte duale hybride** du problème  $(P_K)$  consiste à relaxer la continuité inter-éléments contenue dans la définition de l'espace  $\mathcal{W}_h^{(k)}$ , en introduisant une suite de multiplicateurs de Lagrange, comme dans [BRT96, BRF91], soit :

$$\mathcal{E}_h := \{l \in \partial T; \forall T \in \Lambda_h\} \text{ et } \mathcal{E}_h^0 := \{l \in \mathcal{E}_h; l \in \Gamma\}$$

L'espace des **multiplicateurs de Lagrange** est défini par :

$$\mathcal{L}_h^{(k)} := \{\lambda_h \in L^2(\mathcal{E}_h); \lambda_h|_l \in \mathcal{P}_k(l), \forall l \in \partial T, \forall T \in \Lambda_h \text{ et } \lambda_h = 0 \text{ sur } \Gamma\}$$

où  $\mathcal{P}_k(l)$  désigne l'espace des restrictions de  $\mathcal{P}_k$  à  $l \in \partial T$ . Nous considérons maintenant l'espace :

$$\mathcal{W}_{h,-1}^{(k)} := \left\{ \vec{w}_h \in (L^2(\Omega))^d; \text{ tel que } \forall T \in \Lambda_h, \vec{w}_h|_T \in ID_k \right\}$$

en ajoutant les multiplicateurs de Lagrange, on obtient ainsi une formulation **mixte duale hybride** : trouver  $(\vec{q}_h, p_h, \lambda_h) \in \mathcal{W}_h^{(k)} \times \mathcal{M}_h^{(k)} \times \mathcal{L}_h^{(k)}$  tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_T K^{-1} \vec{q}_h \cdot \vec{w}_h dx - \int_T p_h \operatorname{div}(\vec{w}_h) dx \\ \quad + \sum_{l \in \partial T} \int_l \lambda_h \vec{w}_h \cdot \vec{n}_{T,l} dl = 0 \quad \forall \vec{w}_h \in ID_k \\ \int_T \operatorname{div}(\vec{q}_h) v_h dx = \int_T f v_h dx \quad \forall v_h \in \mathcal{P}_k \\ \sum_{T \in \Lambda_h} \sum_{l \in \partial T} \int_l \mu_h \vec{q}_h \cdot \vec{n}_{T,l} dl = 0 \quad \forall \mu_h \in \mathcal{L}_h^{(k)} \end{array} \right. \quad (\text{A.6})$$

la détermination de  $\vec{q}_h \in \mathcal{W}_h^{(k)}$  satisfaisant la continuité inter-éléments est caractérisée par les résultats suivants : (voir **Bendali & al.** [BRT96]).

**Théorème A.3** *Pour tout  $k$  entier  $\geq 0$ , l'espace  $ID_k$  est donné par :*

$$ID_k = \left\{ \vec{q} \in (\mathcal{P}_k)^d; \operatorname{div}(\vec{q}) = 0 \right\} \oplus \vec{r} \cdot \mathcal{P}_k \quad (\text{A.7})$$

On pose alors  $ID_k^0 = \left\{ \vec{q} \in (\mathcal{P}_k)^d; \operatorname{div}(\vec{q}) = 0 \right\}$ .

**Lemme A.4** *Pour tout  $T \in \Lambda_h$ , et pour tout  $k$  entier  $\geq 0$ , il existe un unique  $\alpha_T \in \mathcal{P}_k$ , tel que :*

$$\int_T \operatorname{div}(\alpha_T \vec{r}) v dx = \int_T f v dx \quad \forall v \in \mathcal{P}_k(T) \quad (\text{A.8})$$

Pour  $k = 0$ ,  $\alpha_T \in \mathcal{P}_0$  est une constante déterminée par :

$$\alpha_T = \frac{1}{d|T|} \int_T f dx$$

Ainsi pour une approximation de degré  $k$ , le théorème A.3 réduit la détermination de  $\vec{q}_h|_T, \forall T \in \Lambda_h$ , à trouver  $\vec{q}_T^0$  et  $\alpha_T$  respectivement dans  $ID_k^0$  et  $\mathcal{P}_k$ , tels que :

$$\vec{q}_h|_T = \vec{q}_T^0 + \alpha_T \vec{r}(x) \quad (\text{A.9})$$

maintenant pour  $w \in ID_k^0$ , de la première équation dans (A.6), on en déduit que :

$$\int_T K^{-1} (\vec{q}_T^0 + \alpha_T \vec{r}) \cdot \vec{w} dx + \sum_{l \in \partial T} \int_l \lambda_h \vec{w} \cdot \vec{n}_{T,l} dl = 0 \quad \forall \vec{w} \in ID_k^0 \quad (\text{A.10})$$

les inconnues sont alors réduites à  $(\vec{q}_T^0, \lambda_h) \in ID_k^0 \times \mathcal{L}_h^{(k)}$ .

En introduisant les fonctions de base de  $ID_k^0$ , et en notant par :  $[q_T]$  et  $[w_T]$ , [resp.  $[\lambda_T]$  et  $[\mu_T]$ ], les vecteurs colonnes des composantes de  $\vec{q}_T^0$  et  $w_h$ , dans  $ID_k^0$ , [resp. ceux de  $\{\lambda_h|_l\}_{l \in \partial T}$  et  $\{\mu_h|_l\}_{l \in \partial T}$ ]. L'équation (A.10) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$[w_T]^t K_T^{-1} [q_T] + [w_T]^t C_T [\lambda_T] = [w_T]^t [f_T^{(1)}] \quad (\text{A.11})$$

où  $[w_T]^t$  est la transposée de la matrice  $[w_T]$ ,  $K_T^{-1} = \int_T K^{-1} dx$ , ( $C_T$  est la matrice  $d \times (d+1)$  des composantes de  $\{\vec{n}_{T,l}|_l\}_{l \in \partial T}$  dans le cas  $k=0$ ) et la matrice  $[f_T^{(1)}]$  est donnée par :

$$[w_T]^t [f_T^{(1)}] = - \int_T \alpha_T K^{-1} \vec{r}(x) \cdot \vec{w} dx \quad (\text{A.12})$$

en inversant  $K_T^{-1}$ , on a la relation matricielle suivante :

$$[q_T] + K_T C_T [\lambda_T] = K_T [f_T^{(1)}] \quad (\text{A.13})$$

de même de la dernière équation dans (A.6), on en déduit que :

$$\sum_{T \in \Lambda_h} [\mu_T]^t [C_T]^t [q_T] = \sum_{T \in \Lambda_h} [\mu_T]^t [f_T^{(2)}] \quad (\text{A.14})$$

où la matrice  $[f_T^{(2)}]$  est donnée par la relation :

$$[\mu_T]^t [f_T^{(2)}] = - \sum_{l \in \partial T} \int_l \alpha_T \mu_h \vec{r}(x) \cdot \vec{n}_{T,l} dl \quad (\text{A.15})$$

multiplions (A.13) par  $[\mu_T]^t [C_T]^t$  et sommions sur  $T \in \Lambda_h$ , on obtient :

$$\sum_{T \in \Lambda_h} [\mu_T]^t [C_T]^t K_T [C_T] [\lambda_T] = \sum_{T \in \Lambda_h} [\mu_T]^t [f_T] \quad (\text{A.16})$$

Ainsi la formulation **mixte hybride** se réduit à la résolution d'un système linéaire dont les coefficients s'obtiennent par assemblage des matrices élémentaires  $[C_T]^t K_T [C_T]$  et du second membre  $[f_T] = [C_T]^t K_T [f_T^{(1)}] - [f_T^{(2)}]$ . Les flux  $\vec{q}_h|_T$  seront alors déterminés par simple substitution dans (A.13) et (A.9).

## Cas bi-dimensionnel de bas degré

On se limite ici au degré  $k = 0$ , dans  $IR^2$ . Ainsi si on suppose de plus que  $K$  est constante par maille, alors on a :

$$K_T [f_T^{(1)}] = -\alpha_T \frac{1}{|T|} \int_T \vec{r} dx = -\alpha_T \vec{r}_T$$

et

$$[f_T^{(2)}]_l = -\alpha_T \int_l \vec{r} \cdot \vec{n}_{T,l} dl = -\alpha_T |l| \vec{r}_l \cdot \vec{n}_{T,l}$$

avec

$$\alpha_T = \frac{1}{2|T|} \int_T f dx = \frac{1}{2} f_T$$

d'où

$$\begin{aligned} [f_T]_l &= \alpha_T |l| (\vec{r}_l - \vec{r}_T) \cdot \vec{n}_{T,l} \\ &= \alpha_T \frac{2|T|}{3} = \frac{|T|}{3} f_T \end{aligned}$$

■

# Bibliographie

- [ AFI99] AFIF M., Schémas volumes finis pour une équation non linéaire de diffusion-convection dégénérée, in: M. Madaune-Tort et al., eds, *Actas de las VI Jornadas Zaragoza-Pau de Matemática Aplicada*, (1999) 29-36.
- [ AFA97] AFIF M. AND AMAZIANE B., On convergence of finite volume schemes for one-dimensional two-phase flow in porous media, Preprint Univ. Pau Labo. Math. Appli., N°9706 (1997), to appear in: *Journal of Computational and Applied Mathematics*.
- [ AFA99] AFIF M. AND AMAZIANE B., Analysis of finite volume schemes for two-phase flow in porous media on unstructured grids, in: F. Benkhaldoun and R. Vilsmeier, eds, *Finite Volumes for Complex Applications II - Problems and Perspectives*, (Hermès, Paris, 1999) 387-394.
- [ AFA00] AFIF M. AND AMAZIANE B., Convergence of finite volume schemes for a degenerate convection-diffusion equation arising in flow in porous media, Preprint Univ. Pau Dépt. Math. Rech., (1999), Submitted to Journal: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*.
- [ AFA01] AFIF M. AND AMAZIANE B., Numerical simulation of two-phase flow through heterogeneous porous media, Submitted to: *Numerical Algorithms* (2001).
- [ ALL83] ALT H.W. AND LUCKHAUS S., Quasilinear elliptic-parabolic differential equation, *Math. Z.*, vol. **183** (1983) 311-341.

- [ AMA88] AMAZIANE B., Application des techniques d'homogénéisation aux écoulements diphasiques incompressibles en milieu poreux, Thèse de Doctorat, Univ. Claude Bernard Lyon I, (1988).
- [ AKM90] ANTONTSEV S.N., KAZHIKHOV A.V. AND MONAKHOV V.N., *Boundary Value Problems in Mechanics of Nonhomogeneous Fluids* (North-Holland, Amsterdam, 1990).
- [ ANM78] ANTONTSEV S.N. AND MONAKHOV V.N., Three-dimensional problems of time-dependant two-phase filtration in nonhomogeneous anisotropic porous media, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 243 n°3, Soviet Math. Dock., vol. **19** (1978) 1354-1358.
- [ ARB92] ARBOGAST T., The existence of weak solutions to single porosity and simple dual porosity models of two-phase incompressible flow, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, vol. **19** (1992) 1009-1031.
- [ AWZ96] ARBOGAST T., WHEELER M.F. AND ZHANG N.Y., A nonlinear mixed finite element method for a degenerate parabolic equation arising in flow in porous media, *SIAM J. Num. Anal.*, vol. **33** (1996) 1669-1687.
- [ BEB91] BEAR J. AND BACHMAT Y., *Introduction to Modeling of Transport Phenomena in Porous Media*. (Kluwer Academic Publishers, London, 1991).
- [ BRT96] BENDALI A., RAYNAUD N., AND THOMAS J-M., New Decomposition of Shape Functions Spaces of Mixed Finite-Element Methods, *Appl. Math. Lett.*, vol. **9** (1996) 33-38.
- [ BOH95] BOURGEAT A. AND HIDANI A., A result of existence for a model of two-phase flow in a porous medium made of different rock type, *Appl. Anal.*, vol. **56** (1995) 381-399.
- [ BRF91] BREZZI F. AND FORTIN M., *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*, (Springer-Verlag, New York, 1991).

- [ CGH93] CHAMPIER S., GALLOUËT T. AND HERBIN R., Convergence of an upstream finite volume scheme for a nonlinear hyperbolic equation on a triangular mesh, *Numer. Math.*, vol. **66** (1993) 139-157.
- [ CHA76] CHAVENT G., A new formulation of diphasic incompressible flow in porous media, in: A. Dold and B. Eckman, eds, *Application of Methods of functional Analysis to the problems in Mechanics*, Lecture Notes in Mathematics, vol. **503** (Springer-Verlag, 1976) 258-270.
- [ CHJ86] CHAVENT G. AND JAFFRÉ J., *Mathematical Models and Finite Elements for Reservoir Simulation*. (North-Holland, Amsterdam, 1986).
- [ CJR95] CHAVENT G., JAFFRÉ J. AND ROBERTS J.E., Mixed-hybrid finite elements and cell-centred finite volumes for two-phase flow in porous media, in: A. P. Bourgeat et al., eds., *Mathematical Modeling of Flow Through Porous Media* (World Scientific, London, 1995) 100-114.
- [ CHS82] CHAVENT G. AND SALZANO G., A finite-element method for the 1-D water flooding problem with Gravit., *J. of Computational Physics*, vol. **45** (1982) 307-344.
- [ CHE97] CHEN Z. AND EWING R.E., Fully-discrete finite element analysis of multiphase flow in groundwater hydrology, *SIAM J. Num. Anal.*, vol. **34** (1997) 2228-2253.
- [ CVV99] COURDIÈRE Y., VILA J.-P. AND VILLEDIEU P., Convergence rate of a finite volume scheme for a two dimensional convection-diffusion problem, *Math. Mod. and Num. Anal., M2AN*, vol. **33** (1999) 493-516.
- [ DAW93] DAWSON C., Godunov-mixed methods for advection-diffusion equations in multidimensions, *SIAM J. Num. Anal.*, vol. **30** (1993) 1315-1332.
- [ DWW98] DAWSON C., WHEELER M.F. AND WOODWARD C.S., A two-grid finite difference scheme for nonlinear parabolic equations, *SIAM J. Num. Anal.*, vol. **35** (1998) 435-452.

- [ DWK84] DOUGLAS J.JR., DARLOW B.L., WHEELER M.F. AND KENDALL R.P., Self-adaptive finite element and finite difference methods for one-dimensional two-phase immiscible flow, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. **47** (1984) 119-130.
- [ DFP97] DOUGLAS J.JR., FURTADO F. AND PEREIRA F., On the numerical simulation of waterflooding of heterogeneous petroleum reservoirs, *Computational Geosciences*, vol. **1** (1997) 155-190.
- [ EVG92] EVANS L.C. AND GARIEPY R.F., *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, (Studies in Advanced Mathematics, 1992).
- [ EVK99] EVJE S. AND KARLSEN K.H., Degenerate convection-diffusion equations and implicate monotone difference schemes, *Hyperbolic problems: theory, numerics, applications*, Int. Series of Numerical Mathematics, vol. **129** (Birkhäuser Verlag, 1999) 285-294.
- [ EVK00] EVJE S. AND KARLSEN K.H., Monotone difference approximations of BV solutions to degenerate convection-diffusion equations, *SIAM J. Num. Anal.*, vol. **37** (2000) 1838-1860.
- [ EYG93] EYMARD R. AND GALLOUËT T., Convergence d'un schéma de type éléments finis-volumes finis pour un système formé d'une équation elliptique et d'une équation hyperbolique, *Math. Mod. and Num. Anal., M2AN*, vol. **27** (1993) 843-961.
- [ EGH98] EYMARD R., GALLOUËT T., GHILANI M. AND HERBIN R., Error estimates for the approximate solutions of a nonlinear hyperbolic equation given by finite volume schemes, *IMA J. Num. Anal.*, vol. **18** (1998) 563-594.
- [ EGH95] EYMARD R., GALLOUËT T. AND HERBIN R., Schémas de volumes finis pour les problèmes d'écoulements en milieu poreux, in: A. P. Bourgeat et al., eds., *Mathematical Modeling of Flow Through Porous Media*, (World Scientific, London, 1995) 148-165.

- [ EGH99] EYMARD R., GALLOUËT T. AND HERBIN R., Convergence of finite volume schemes for semilinear convection diffusion equations, *Numer. Math.*, vol. **82** (1999) 91-116.
- [ EGH00] EYMARD R., GALLOUËT T. AND HERBIN R., The finite volume method, *Handbook of Numerical Analysis*, P.G. Ciarlet and J.L. Lions, eds., vol **7**, (2000) 715-1022.
- [ EGN98] EYMARD R., GALLOUËT T., HILHOST D. AND NAÏT SLIMAN Y., Finite volumes and nonlinear diffusion equations, *Math. Mod. and Num. Anal., M2AN*, vol. **32** (1998) 747-761.
- [ FAS95] FADIMBA K.B. AND SHARPLEY R.C., A priori estimates and regularization for a class of porous medium equation, *Nonlinear Word*, vol. **2** (1995) 843-864.
- [ FAI92] FAILLE I., A control volume method to solve an elliptic aquation on a two-dimensional irregular mesh, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. **100** (1992) 275-290.
- [ FRO98] FROLKOVIČ P., Maximum principle and local mass balance for numerical solutions of transport equation coupled with variable density flow, *Acta Math. Univ. Comeniana*, vol. **67** (1998) 137-157.
- [ FUL98] FUHRMAN J. AND LANGMACH H., Stability and existence of solutions of time-implicit finite volume schemes for viscous nonlinear conservation, Preprint 437, *Weierstraß-Institut*, Berlin (1998).
- [ GAB00] GABBOUHY M., Analyse mathématique et simulation numérique des phénomène d'écoulement et transport en milieux poreux non-saturés. Application à la région de Gharb, Thèse de Doctorat, Univ. Ibn Tofaïl Kénitra, (2000).
- [ GAM00] GABBOUHY M. AND MGHAZLI Z., An adaptive methode for characteristics-finite element method for solute transport equation in unsaturated porous media, in: J.M. Crolet et al., eds., *Computational Methods*

- for *Flow and Transport in Porous Media*, (Kluwer Academic, Netherlands, 2000) 39-52.
- [ GAN84] GAGNEUX G., Existence et propriétés du temps de percée lors de déplacements forcée eau-huile en milieu poreux, *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, vol. **3** (1984) 415-432.
- [ GAM96] GAGNEUX G. AND MADAUNE-TORT M., *Analyse Mathématique de Modèles non Linéaires de l'Ingénierie Pétrolière*, Mathématiques & Applications, SMAI, vol. **22** (Springer-Verlag, Berlin, 1996).
- [ GHV00] GALLOUËT T., HERBIN R. AND VIGNAL M.H., Error estimates on the approximate finite volume solution of convection diffusion equations with general boundary conditions, *SIAM J. Num. Anal.*, vol. **38** (2000) 1935-1972.
- [ GAV91] GALLOUËT T. AND VILA J.P., Finite volume schemes for conservation laws of mixed type, *SIAM J. Num. Anal.*, vol. **28** (1991) 1548-1573.
- [ GHI97] GHILANI M., Convergence et estimations d'erreurs des solutions approchées par volumes finis d'un système modélisant un écoulement diphasique incompressible en milieux poreux, Thèse d'Etat, Univ. Mohamed V Rabat, (1997).
- [ GHI98] GHILANI M., An error estimate for the approximate solution of a porous media diphasic flow equation, in: J.M. Crolet et al., eds., *Problems of Flow and Transport in Porous Media*, (Kluwer Academic, Netherlands, 1998) 25-30.
- [ GOD76] GODUNOV S. K., *Résolution Numérique des Problèmes Multidimensionnels de la Dynamique des Gaz*, (Editions MIR, Moscou, 1976).
- [ HER95] HERBIN R., An error estimate for a finite volume scheme for a diffusion-convection problem on a triangular mesh, *Num. Meth. for PDE's*, vol. **11** (1995) 165-173.

- [ HEL97] HERBIN R. AND LABERGERIE O., Finite volume scheme for elliptic-hyperbolic problems on triangular meshes, *Comput. Methods in Appl. Mech. Engrg.*, vol. **147** (1997) 85-103.
- [ HID93] HIDANI A., Modélisation des écoulements diphasiques en milieu poreux à plusieurs type de roches, Thèse de Doctorat, Univ. Saint-Etienne, (1993).
- [ HON00] HONTANS T., Homogénéisation numérique de paramètres pétrophysiques pour des maillages déstructurés en simulation de réservoir, Thèse de Doctorat, Univ. UPPA Pau, (2000).
- [ HOR97] HORNUNG U, *Homogenization and porous media*, Interdisciplinary Applied Mathematics (Springer-Verlag, New York, 1997).
- [ JIN90] JINGXUE Y., On the uniqueness and stability of BV solution for non-linear diffusion equations, *Commun. in Partial Differential Equations*, vol. **15** (1990) 1671-1683.
- [ JOE90] JOLY P. AND EYMARD R., Preconditionned biconjugate gradient methods for numerical reservoir simulation, *Journal of Computational Physics*, vol. **91** (1990).
- [ JOV95] JOLY P. AND VIDRASCU M., *Quelques méthodes classiques de résolution de systèmes linéaires, exemple d'utilisation dans la bibliothèque MODULEF*, Collection Didactique INRIA (Paris, 1995).
- [ KAR01] KARLSEN K.H. AND RISEBRO N.H., Convergence of finite difference schemes for viscous and inviscid conservation laws with rough coefficients, *Math. Mod. and Num. Anal., M2AN*, vol. **35** (2001) 239-269.
- [ KRO97] KRÖNER D., *Numerical Schemes for Conservation Laws* (Wiley & Teubner, New York, 1997).
- [ KRS77] KRUKOV S.N. AND SUKORJANSKI S.M., Boundary value problems for systems of equations of two phase porous flow type: statement of the

- problem, equations of solvability, justification of approximative methods, *Mat. Sbornik*, vol. **33** (1977) 62-80.
- [ LMV94] LAZAROV R.D., MISHEV I.D. AND VASSILEVSKI P.S., Finite volume methods with local refinement for convection-diffusion problems, *Computing*, vol. **53** (1994) 33-57.
- [ LMV96] LAZAROV R.D., MISHEV I.D. AND VASSILEVSKI P.S., Finite volume methods for convection-diffusion problems, *SIAM J. Num. Anal.*, vol. **33** (1996) 31-55.
- [ MAR72] MARLE C.M., *Cours de production*, Tome IV. *Les écoulements diphasiques en milieu poreux*, (Eds. Technip, Paris, 1972).
- [ MAR81] MARLE C.M., *Multiphase Flow in Porous Media*, (Editions Technip, Paris, 1981).
- [ MIC96] MICHEV I.D., Finite volume element methods for nonsymmetric problems, Ph.D. Dissertation, Texas A&M Univ., (1996).
- [ MOR96] MORTON K.W., *Numerical Solution of Convection-Diffusion Problems*, (Chapman & Hall, London, 1996).
- [ MOR98] MORTON K.W., On the analysis of finite volume methods for evolutionary problems, *SIAM J. Num. Anal.*, vol. **35** (1998) 2195-2222.
- [ OHL97] OHLBERGER M., Convergence of a mixed finite element - finite volume methode for the two phase flow in porous media, *East-West J. Numer. Math.*, vol. **5** (1997) 183-210.
- [ OHL01] OHLBERGER M., A posteriori error estimates for vertex centered finite volume approximations of convection-diffusion-reaction equation, *Math. Mod. and Num. Anal., M2AN*, vol. **35** (2001) 355-387.
- [ PTV92] PRESS W., TEUKOLSKY S.A., VETTERLING W.T. AND FLANNERY B.P., *Numerical Recipes in C*, The Art of Scientific Computing, 2nd Eds., (Cambridge Univ. Press, New York, 1992).

- 
- [ SAZ97] SAAD M. AND ZHANG H., Front tracking for two-phase flow in reservoir simulation by adaptative mesh, *Numer. Methods Partial Differential Eq.*, vol. **13** (1997) 673-697.
- [ VEV98] VERDIÈRE S. AND VIGNAL M.H., Numerical and theoretical study of a dual mesh method using finite volume schemes for two phase flow problems in porous media, *Numer. Math.*, vol. **80** (1998) 601-639.
- [ VIG96] VIGNAL M.H., Convergence of finite volumes schemes for an elliptic-hyperbolic system with boundary conditions, in: F. Benkhaldoun and R. Vilsmeier, eds., *Finite Volumes for Complex Applications*, (Hermès, Paris, 1996) 145-152.
- [ YOU84] YOUNG L.C., A study of spatial approximations for simulating fluid displacements in petroleum reservoirs, *Comput. Methods in Appl. Mech. Engrg.*, vol. **47** (1984) 3-46.



# Liste des tableaux

5.1	Temps C.P.U pour $\tau = 0.1$ . . . . .	149
5.2	Erreur relative $L^1$ . . . . .	149
6.1	Temps C.P.U. Test 1 . . . . .	156
6.2	Temps C.P.U. Test 3 . . . . .	163
6.3	Temps C.P.U. Test 4 . . . . .	166



# Liste des figures

1.1	Réservoir $\Omega$ . . . . .	20
1.2	Perméabilités relatives $k_{r,i}$ en fonction de la saturation $S_w$	23
1.3	Pression capillaire $P_C$ en fonction de la saturation $S_w$ .	24
1.4	Diffusion capillaire $a$ en fonction de la saturation réduite $u$ . . . . .	29
1.5	Fraction du flux $b$ en fonction de la saturation réduite $u$	29
1.6	Mobilité totale $d$ en fonction de la saturation réduite $u$	30
2.1	Écoulement mono-dimonsionnel dans une carotte poreuse	40
2.2	Volume de contrôle $I_i$ . . . . .	42
3.1	Volume de contrôle $M_{ij}$ . . . . .	70
4.1	Maillage dual dans $IR^2$ et $IR^3$ . . . . .	101
4.2	Maillage de $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ . . . . .	111
5.1	Pression capillaire $p_c$ et Perméabilités relatives $k_{r,i}$ . . . .	143
5.2	Diffusion capillaire $a(u)$ et fraction du flux $b(u)$ . . . . .	143
5.3	Profil de saturation (E.F.V.) en fonction de la $CFL_1$ . .	145
5.4	Profil de saturation (M.F.E.) en fonction de la $CFL_3$ .	145
5.5	Profil de saturation (S-I.F.V.) en fonction de la $CFL_2$ .	146
5.6	Profil de saturation (I.F.V.) en fonction de la $CFL_2$ . .	146
5.7	Saturation pour $h = 10^{-3}$ , Schémas E.F.V. et M.F.E. . .	147
5.8	Saturation pour $h = 10^{-3}$ , Schémas S-I.F.V. et I.F.V. . .	148
6.1	Mobilité totale $d(u)$ . . . . .	152

6.2	Distribution des perméabilités absolues $K(x, y)$ . . . . .	154
6.3	Vitesse totale $\vec{q}$ . . . . .	155
6.4	Profil de la saturation $u$ . . . . .	155
6.5	Maillage de $\Omega = ]0, 0.1[ \times ]0, 0.1[$ . . . . .	157
6.6	Vitesse totale $\vec{q}$ . . . . .	157
6.7	Les contours de la saturation . . . . .	158
6.8	Coupe du profil de la saturation entre les puits . . . . .	158
6.9	Variation du profil de la saturation au cours du temps . . . . .	159
6.10	Chenal hétérogène et anisotrope $\Omega$ . . . . .	161
6.11	Maillage de $\Omega_0 = U_0(\Omega)$ . . . . .	161
6.12	Vitesse totale $\vec{q}$ . . . . .	162
6.13	Les contours de la saturation . . . . .	162
6.14	Réservoir stratifié et anisotrope $\Omega$ . . . . .	164
6.15	Les contours de la pression . . . . .	164
6.16	Les contours de la saturation . . . . .	165
6.17	Coupe du profil de la saturation pour $(y = 0.5)$ . . . . .	165
6.18	Réservoir hétérogène et anisotrope $\Omega$ . . . . .	167
6.19	Vitesse totale $\vec{q}$ . . . . .	167
6.20	Les contours de la saturation . . . . .	168
6.21	Coupe du profil de la saturation entre les puits . . . . .	168
6.22	Le profil de la saturation $u$ . . . . .	169



# Index

- Carotte poreuse, 39, 142
- Cauchy-Schwartz (inégalité), 122
- Compacte (relativement), 134
- Conservativité, 44, 72, 102
- Consistance, 44, 73, 103
- Continuité  $L^1$  en temps, 61, 89
- Courant-Friedrichs-Lewy, 49, 52, 78, 113, 116
- Delaunay (condition), 110
- Diffusion capillaire, 28, 142, 143, 152
- Eléments finis mixtes, 144, 175, 176
- Equation
  - en pression globale, 12, 32
  - en saturation réduite, 12, 32
- Erreur relative  $l^1$ , 149
- Estimation  $BV$  faible, 131
- Fluide mouillant, 24
- Fluide non mouillant, 25
- Flux
  - (fraction du), 27, 142, 143, 152
  - de convection, 43, 71, 102
  - de diffusion, 43, 71, 102
  - numériques, 43, 46, 47, 72, 74, 76, 77, 102, 105–107
- Formulation mixte
  - Duale, 176
  - Hybride, 177, 179
  - Primale, 176
- Front raide, 144
- Hölderienne, 34, 35, 41, 69, 99
- Inégalité de trace, 94, 137
- Injection
  - compacte, 63, 64, 91
  - continue, 63
- Lagrange (multiplicateurs), 177
- Lipschitzienne, 35
- Loi de Darcy, 22
- Maillage
  - admissible, 109, 110
  - de Donald, 100
  - dual, 100
  - non structuré, 156
  - rectangulaire, 153
  - régulier, 42, 70, 100, 176
- Matrice
  - (co-), 109
  - diagonale strictement dominante, 52, 56, 116, 119
  - monotone, 53, 81, 116

- Mobilité, 22  
  totale, 27, 152
- Moyenne harmonique, 74
- Perméabilité  
  absolue, 22  
  relative, 22, 142, 143, 152, 153
- Porosité, 22, 28
- Pression, 22  
  atmosphérique, 25  
  capillaire, 23, 142, 143, 152, 153  
  capillaire maximale, 23  
  capillaire réduite, 23  
  globale, 26, 28  
  intermédiaire, 28  
  réduite, 28
- Principe du maximum discret, 49, 52,  
  54, 78, 80, 113, 116, 118
- Quart de five-spot, 153
- Regime saturé, 21
- Réservoir  
  hétérogène anisotrope, 160, 166  
  hétérogène isotrope, 153  
  homogène isotrope, 156  
  stratifié anisotrope, 163
- Riemann  
  (problème de), 45
- Saturation, 21  
  réduite, 26  
  résiduelle, 21
- Schémas de Godunov, 45, 74, 104
- Schémas volumes finis  
  Explicite, 44, 73, 103  
  Implicite, 46, 75, 106  
  Semi-Implicite, 47, 76, 107
- Solution faible, 34, 35, 90, 99, 133
- Stabilité  $BV$ , 48, 77
- Stabilité  $L^\infty$ , 48, 77, 112
- Temps CPU, 149
- Temps de percée, 21, 25, 142, 160
- Vitesse  
  de filtration, 22  
  totale, 26
- Volume de contrôle, 42, 69, 100
- Volumes finis, 44, 73, 103

