

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
École Normale Supérieure, Kouba(Alger)
Département de Mathématiques



THÈSE

présentée pour obtenir le grade de

Docteur en Sciences

Par

Latifa AIT MAHIOUT

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse fonctionnelle et numérique

Homogénéisation et simulation numérique d'écoulements diphases immiscibles et compressibles en milieux poreux

Sous la direction de

Abdelhafid Mokrane, Pr. (ENS Kouba) et Brahim Amaziane, Maître de Conférence. (U. Pau, France)

Sera soutenue publiquement le **04 Juin 2016** à l'ENS-Kouba (salle de cours du Lab. Eq. Diff. Part) à **9h**, devant le jury composé de :

| | | |
|-------------------------------|--|--------------------|
| Mr. Mohamed Amara | Professeur, U. de Pau, France | Président |
| Mr. Youcef Atik | Professeur, ENS-Kouba | Examineur |
| Mr. Brahim Amaziane | Maître de Conférence, U. de Pau, France | Co-directeur |
| Mr. Mohand Moussaoui | Professeur, ENS-Kouba | Examineur |
| Mr. Abdelhafid Mokrane | Professeur, ENS-Kouba | Directeur de thèse |
| Mr. Mazen Saad | Professeur, École Centrale de Nantes, France | Examineur |
| Mr. Mouloudj Nouredine | Docteur, Institut Algérien du Pétrole, Sonatrach | Invité |

Remerciements

Je tiens à remercier tout d'abord Abdelhafid Mokrane, mon directeur de thèse et Brahim Amaziane, mon co-directeur de thèse, qui m'ont accompagnée durant toute la période de la préparation de ma thèse.

Leur disponibilité, leur patience, les moyens mis à ma disposition que ce soit au Laboratoire d'Équations aux Dérivées Partielles Non Linéaires à l'ENS Kouba, par Abdelhafid Mokrane, ou le Laboratoire de Mathématiques et de leurs Applications de Pau, par Brahim Amaziane, leurs encouragements m'ont beaucoup aidé et m'ont permis de réussir mon travail malgré toutes les difficultés auxquelles je me suis heurtée.

Je remercie Leonid Pankratov qui a énormément contribué à l'aboutissement de cette thèse par nos discussions très enrichissantes, ses remarques, ses suggestions, sa disponibilité, et par son aide très précieuse.

Je remercie également Mustapha El Ossmani et Etienne Ahusborde, qui m'ont accompagnée pendant mon stage au Laboratoire de Mathématiques et de leurs Applications de Pau. Ils m'ont aidé à maîtriser la programmation, ainsi que plusieurs logiciels, puis ont apporté une contribution importante à la résolution des problèmes liés à la fois à la programmation et à l'édition de la thèse.

Je remercie Mladen Jurak pour sa disponibilité et son aide qui m'ont été très précieuses, lors de mon stage au Laboratoire de Mathématiques et de leurs Applications de Pau. Il m'a aidé à me familiariser avec de nouvelles notions en ingénierie pétrolière et a beaucoup contribué à la résolution de mes problèmes liés à la programmation.

Je remercie Mohand Moussaoui pour sa disponibilité durant toutes ces années, et les séances de travail très longues, et très fructueuses que l'on faisait, et qui m'ont permis de très bien avancer et de consolider mes bases en analyse fonctionnelle. Je le remercie aussi pour ses précieux conseils et ses encouragements. Je remercie Youcef Atik et Abdelaziz Choutri pour leur aide tout au long de mon travail, que ce soit par leurs remarques ou leurs conseils très précieux, et je tiens vraiment à remercier Boubaker-Khaled Saadallah pour sa disponibilité, son écoute et ses précieux conseils.

Je remercie Saad Mazen pour avoir contribué à l'aboutissement de ce travail par ses cours qui m'ont énormément servi, et les discussions fructueuses que l'on a eu lors de sa visite à Alger.

Je remercie Mohamed Amara d'avoir bien voulu accepter de présider mon jury de soutenance, c'est un immense honneur pour moi. Je remercie Youcef Atik, Mohand Moussaoui, Saad Mazen, et Mouloudj Nouredine d'avoir accepté la tâche d'examiner ce manuscrit.

Je voudrais également remercier tout le Laboratoire de Mathématiques et de leurs Applications de Pau pour leur accueil très chaleureux.

Finalement, je remercie toute ma famille, en particulier mon grand père et mes parents, mon oncle, ma petite sœur, et Apkyc MypaA de m'avoir soutenue tout le long de cette thèse notamment dans les moments les plus difficiles.

Résumé

Cette thèse est consacrée à l'homogénéisation par la méthode de convergence à deux échelles, et à la simulation numérique par le code DuMu^x (voir [86]), d'écoulements diphasiques immiscibles et compressibles en milieux poreux.

L'exploitation d'un gisement pétrolifère conduit au développement de diverses méthodes de techniques de récupération assistée du pétrole. L'une de ces techniques est celle de la récupération secondaire, qui consiste à pousser l'huile vers les puits de production en injectant de l'eau par d'autres puits qui sont réservés à cet effet. Du point de vue mathématique, ceci conduit à la modélisation d'un écoulement diphasique immiscible et compressible en réservoir naturellement fracturé, ce qui est l'objectif principal de cette thèse.

Les réservoirs naturellement fracturés peuvent être modélisés par deux milieux superposés : un système de fractures et un système de bloc de matrices (réservoirs entièrement fracturés). Le système de fractures a une faible capacité de stockage, et une conductivité élevée, tandis que le système de blocs de matrices a une faible conductivité en comparaison avec le système de fractures. La majeure partie du fluide est transportée à travers le système des fractures, et le reste est stocké dans les bloc de matrices. Lorsque le système de fissures et si développé que la matrice est divisée en blocs individuels ou en cellules qui sont isolées les unes des autres (Warren-Root géométrie [57], ou comme des cubes de sucre), il n'y a pas d'écoulement direct de cellule à cellule, mais plutôt un échange de fluide entre chaque cellule et le système de fractures. Pour plus de détails sur la formulation physique de ces problèmes, (voir [25, 70, 57]).

Dans cette thèse, nous concentrons notre attention sur la modélisation d'un écoulement diphasique non miscible et compressible dans des réservoirs fracturés, en ayant un regard sur le déplacement forcé eau-huile, qui est un mécanisme crucial pour la récupération secondaire de l'huile. Au cours de ces dernières années, l'intérêt pour l'écoulement et le transport de fluides en milieux fracturés avec une perméabilité faible, a beaucoup augmenté, et une des raisons importantes à cet intérêt est que les réservoirs fracturés d'hydrocarbures fournissent plus de 20% de réserves et de production du pétrole dans le monde (voir [72] et les références qui y sont). La recherche vise à comprendre le processus qui détermine le chemin qui suit l'écoulement, et le taux de fluide mouillant dans les masses de la roche fracturée.

Pour modéliser ces problèmes d'écoulement, il y a toujours de multiples échelles de longueur dans les coefficients physiques qui gouvernent les équations. D'autre part, la taille du réservoir ne permet pas une simulation à fine échelle, sur plusieurs temps malgré la modernisation des ordinateurs, et l'avancement de la technologie du calcul parallèle. Par conséquent, un compromis doit être réalisé entre la précision souhaitée et les ressources informatiques disponibles. Un compromis standard est d'échelonner les coefficients qui font qu'on est obligé d'utiliser un maillage grossier. La description à grande échelle devra intégrer deux différents mécanismes d'écoulement. Pour certains ratios de perméabilités, et quelques largeurs de fissures, la description à grande échelle est obtenue par l'introduction du modèle dit à double porosité. Il a été introduit pour décrire le comportement global du milieu poreux fracturé par Barenblatt et al. [22], et il est depuis utilisé dans l'ingénierie liée à la hydrogéologie, l'ingénierie des réservoirs pétrolifère, la génie civile, ou encore la science du sol.

Dans cette thèse, nous nous concentrerons sur un système non linéaire d'équations de convection-diffusion dans un domaine, modélisant l'écoulement et le transport de fluides non miscible et compressibles dans un

milieu poreux hétérogène, en prenant en compte la pression capillaire et la gravité. Les équations du modèle sont dérivées de la loi de conservation de la masse pour les deux fluides, ainsi que les relations constitutives de la vitesse du gradient, de la pression, et les effets de gravités. Traditionnellement, la loi standard de Darcy-Muskat fournit ces relations. Cette formulation nous donne un système couplé constitué d'équations paraboliques non linéaires pour le liquide et la pression du gaz, en ajoutant les conditions au bord et les conditions initiales qui conviennent. Il existe deux types de dégénérescence dans le système étudié. La première est la dégénérescence classique de l'opérateur de diffusion. Cette dégénérescence est due aux effets de la pression capillaire ; il peut être observé même dans le cas d'un écoulement diphasique incompressible. La seconde concerne la dégénérescence du terme d'évolution. Il se produit dans la région où les saturations du fluide sont nulles. Dans les deux cas, la présence de la dégénérescence affaiblit les estimations d'énergie et fait la preuve des résultats de compacité plus impliqués.

Cette thèse est organisée de la manière suivante : On commence par une introduction générale. Dans le Chapitre 1, on présente une synthèse des résultats obtenus dans [6], et on rappelle les principaux résultats qui nous seront utiles pour la suite. Il s'agit de l'homogénéisation d'un écoulement diphasique immiscible compressible eau-gaz, dans un milieu poreux à structure périodique. La phase eau est supposée incompressible, tandis que la phase gaz est compressible. On commence par écrire le modèle microscopique en utilisant les équations de conservation de la masse, et la loi standard de Darcy-Muskat pour chaque phase, puis on passe à la formulation du modèle microscopique en utilisant le concept de la pression globale (voir [17, 36]). Après ça, afin d'obtenir le problème homogénéisé associé, on commence par faire des estimations *a priori* indispensables, puis on formule le théorème de compacité essentiel à l'obtention du résultat d'homogénéisation après passage à la limite faible et à deux échelles. Dans le Chapitre 2, on généralise les résultats obtenus dans [6]. À savoir, on considère l'homogénéisation d'un écoulement diphasique immiscible et compressible liquide-gaz dans un milieu poreux périodique, avec des coefficients à oscillations rapides. Dans ce chapitre, on suppose que le liquide et le gaz sont des fluides compressibles. En suivant les mêmes étapes suivies dans le Chapitre 1, et en utilisant des idées du papier [8], on obtient finalement le modèle global en terme de pressions phasiques homogénéisées, ce qui généralise les résultats de [6]. Dans le Chapitre 3, on présente le résultat principal de cette thèse. Dans ce chapitre, on étudie le problème de l'homogénéisation d'un écoulement diphasique immiscible et compressible dans un milieu poreux à double porosité. Le problème microscopique est écrit en terme des pressions et saturations de chaque phase. Le milieu fracturé est composé de fractures, et de blocs de matrice ε -périodiquement distribuées, avec une perméabilité d'ordre ε^2 . La difficulté de ce chapitre est de prouver le résultat de compacité dans le cas d'un modèle couplé non linéaire. On obtient la convergence des solutions ainsi que le modèle macroscopique en utilisant le concept de convergence à deux échelles, et la technique de dilatation. Le modèle global (homogénéisé) est donné en termes des pressions phasiques homogénéisées. Le résultat principal de ce chapitre est une importante généralisation du papier [11]. La thèse se termine par le Chapitre 4 qui est consacré à la simulation numérique d'écoulements diphasiques immiscibles en milieux poreux, en utilisant le code DuMu^x. On commence par une présentation du code DuMu^x, puis, on présente des simulations numériques pour quatre tests : les tests 1 et 2 sont des benchmarks proposés par le GdR MoMaS (voir [83]). Ces tests nous ont permis d'avoir une vision précise sur ce que l'on peut faire avec DuMu^x pour la simulation numérique des écoulements diphasiques en milieux poreux, et de sa prise en main. Les tests 3 et 4 sont des simulations numériques pour le problème étudié dans le Chapitre 1 de ce travail. Dans le test 3, le milieu poreux considéré est périodique, tandis que dans le test 4, le milieu poreux est hétérogène. Ces deux tests nous ont permis de faire une comparaison entre les simulations faites en milieu hétérogène, et les simulations faites en milieu homogénéisé, ce qui nous a permis d'apprécier la justesse des approximations obtenues par la méthode de l'homogénéisation.

Mots clés : Compressible, immiscible, milieu double porosité, écoulement diphasique, milieu poreux fracturé, homogénéisation, convergence à deux échelles, DuMu^x.

Abstract

The thesis is devoted to the homogenization by the two-scale convergence method and numerical simulation using the code DuMu^x (see, e.g., [86]) of the immiscible compressible two-phase flow in porous media.

The exploitation of oil containing formations requires the development of various technical methods of the enhanced oil recovery. One of these methods concerns the secondary oil recovery. It is based on the oil displacement by the water towards the production wells. From the mathematical point of view, this leads to the modeling of the immiscible compressible two-phase flow in naturally fractured reservoirs which is the main objective of the thesis.

Naturally-fractured reservoirs can be modeled by two-superimposed continua, a connected fracture system and a system of topologically disconnected matrix blocks (totally fractured reservoirs). The fracture system has a low storage capacity and high a conductivity, while the matrix block system has a conductivity that is low in comparison to that in the fractures. The majority of fluid transport will occur along flow paths through the fissure system, and the relative volume and storage capacity of the porous matrix is much larger than that of the fissure system. When the system of fissures is so well developed that the matrix is broken into individual blocks or cells that are isolated from each other (Warren-Root geometry [57] or sugar cubes), there is, consequently, no flow directly from cell to cell, but only an exchange of fluid between each cell and the surrounding fissure system. For more details on the physical formulation of such problems see, e.g., [25, 70, 57].

In this thesis, we focus our attention on the modeling of immiscible compressible two-phase flow through fractured reservoirs with an eye towards the studies of the forced oil-water displacement which is a crucial mechanism of secondary oil recovery. In recent years the interest has increased considerably in the area of flow and transport in low permeability fractured rocks. One important reason for this is that the fractured hydrocarbon reservoirs provide over 20% of the world's oil reserves and production (see, e.g., [72] and the references therein). The research is aimed at understanding the processes that determine the flow paths and the flow rates of the wetting fluids in fractured rock masses.

For modeling such flow problems, there are always multiple length scales in the physical coefficients for the governing equations. On the other hand, the size of the reservoir prohibits a full fine scale simulation over many time steps, even with the advent of modern computers and parallel computing technology. Therefore, a compromise has to be made between desired accuracy and available computer resources. The standard compromise is to upscale the coefficients which enables the use of a coarse computational grid. The large-scale description will have to incorporate the two different flow mechanisms. For some permeability ratios and some fissures width, the large-scale description is achieved by introducing the so-called *double-porosity model*. It was introduced first for describing the global behavior of fractured porous media by Barenblatt *and al.* [22] and it is since used in a wide range of engineering specialties related to geohydrology, petroleum reservoir engineering, civil engineering or soil science.

In this thesis we will be concerned with a nonlinear system of diffusion-convection equations in a domain modeling the flow and transport of immiscible compressible fluids through heterogeneous porous media, taking into account capillary and gravity effects. The governing equations are derived from the mass conservation laws of both fluids, along with constitutive relations relating the velocities to the pressure gradients and gravitatio-

nal effects. Traditionally, the standard Darcy–Muskat law provides this relationship. This formulation leads to a coupled system consisting of nonlinear parabolic equations for the liquid and gas pressures, subject to appropriate boundary and initial conditions. There are two kinds of degeneracy in the studied system. The first one is the classical degeneracy of the diffusion operator. This degeneracy is due to the capillary effects ; it can be observed even in the case of incompressible two-phase flow. The second one represents the evolution term degeneracy. It occurs in the region where the fluid saturations vanish. In both cases the presence of degeneracy weakens the energy estimates and makes a proof of compactness results more involved.

The thesis is organized as follows. It is started by the Introduction section.

Chapter 1 is devoted to a detailed review of the results obtained in paper [6]. Namely, we consider the homogenization of immiscible compressible two-phase flow, like water-gas flow, in porous media with periodic rapidly oscillating coefficients. The water phase is assumed to be incompressible, whereas the gas phase is compressible. The microscopic model is written using the mass conservation law for each phase along with the standard Darcy-Muskat law. The first step is to obtain the appropriate *a priori* estimates for the solution of the problem under consideration. In order to pass to the limit in the standing equations, we reformulate them in terms of the global pressure (see, e.g., [17, 36]) and saturation function. The compactness results are also formulated. The homogenized model is then obtained by the two-scale convergence method in the weak formulation of our problem in terms of the global pressure and saturation. In Chapter 2, we generalize the results obtained in [6]. Namely, we consider the homogenization of immiscible compressible two-phase flow, like liquid-gas flow, in porous media with periodic rapidly oscillating coefficients. In this chapter we assume that both, the liquid and the gas, are compressible fluids. Following the lines of Chapter 1 and using the ideas of paper [8] we, finally, obtain the global model in terms of the homogenized phase pressures which generalizes the results of [6]. In Chapter 3 we present the main results of the thesis. In this chapter we study the homogenization problem for two-phase immiscible compressible flow in porous media with double porosity. The microscopic model is written in terms of the phase pressures and saturation. The fractured-porous media is made of fractures and ε -periodically distributed matrix blocks with the permeability of order ε^2 . The main difficulty in this chapter is the proof of the compactness result in the case of a degenerate non-linear coupled model. We obtain the convergence of solutions, as well as the macroscopic model using the concept of two-scale convergence and the dilatation technic. The global (homogenized) model is given in terms of the homogenized phase pressures. The main result of the chapter is an important generalization of paper [11]. The thesis concludes with Chapter 4 which is devoted to the numerical simulation of two-phase immiscible flow in porous media using the code DuMu^x. It begins with a presentation of the code DuMu^x. Then we give the numerical simulation to four tests : Tests 1, 2 are the benchmarks proposed by GdR MoMaS (see [83]). These tests enable to give a clear vision of the capabilities of DuMu^x in the numerical simulations of two-phase flow in porous media. Tests 3, 4 present the numerical results for the problem studied in Chapter 1. In particular, in Test 3, the porous medium is periodic, while in Test 4, the porous medium is heterogeneous. Both tests enable to make comparison between simulation in heterogeneous media and simulation in homogenized media. This simulation shows the correctness of the approximation obtained by the homogenization.

Key words : Compressible, immiscible, double porous media, two-phase flow, fractured-porous media, homogenization, two-scale convergence, DuMu^x.

Table des matières

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Homogénéisation d'un modèle diphasique eau–gaz en milieu poreux | 3 |
| 1.1 | Introduction | 3 |
| 1.2 | Modèle microscopique physique–mathématique | 3 |
| 1.3 | Formulation du modèle à l'aide de la pression globale. | 5 |
| 1.3.1 | Classification des équations (1.25)-(1.30) : | 8 |
| 1.3.1.1 | Classification de l'équation (1.25) | 8 |
| 1.3.1.2 | Classification de l'équation (1.30) | 8 |
| 1.4 | Hypothèses sur les données | 9 |
| 1.5 | Formulation faible du problème (1.25)-(1.35) | 10 |
| 1.5.1 | Définition d'une solution faible au problème (1.25)- (1.35) | 10 |
| 1.6 | Résultat d'homogénéisation | 10 |
| 1.7 | Preuve du résultat essentiel du Chapitre 1 | 13 |
| 1.7.1 | Estimations a priori. | 13 |
| 1.7.1.1 | Égalité d'énergie | 13 |
| 1.8 | Résultats de compacité pour les suites $\{S^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}, \{\Theta^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ | 18 |
| 1.9 | Passage à la limite dans (1.38)-(1.39) | 20 |
| 1.9.1 | Passage à la limite dans (1.38) | 21 |
| 1.9.2 | Passage à la limite dans (1.39) : | 22 |
| 1.9.3 | Équations de w_p et w_s | 22 |
| 2 | Homogénéisation d'un modèle diphasique compressible en milieu poreux. | 29 |
| 2.1 | Introduction | 29 |
| 2.2 | Modèle physique–mathématique | 29 |
| 2.3 | Formulation du modèle à l'aide de la pression globale. | 31 |
| 2.4 | Hypothèses sur les données | 31 |
| 2.5 | Formulation faible du problème | 32 |
| 2.6 | Résultat d'homogénéisation | 32 |
| 2.7 | Preuve du résultat essentiel du Chapitre 1 | 34 |
| 2.7.1 | Estimations a priori | 34 |
| 2.7.2 | Preuve de la Proposition 2.7.4 | 43 |
| 2.7.3 | Passage à la limite dans (2.20)–(2.21) | 43 |
| 2.8 | Modèle homogénéisé en terme de <i>pressions physiques</i> | 49 |
| 3 | Homogénéisation d'un modèle diphasique compressible en milieu poreux à double porosité. | 51 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 4 | Simulations numériques d'écoulements diphasiques en milieux poreux | 81 |
| 4.1 | Introduction | 81 |
| 4.2 | Présentation de DuMu ^x | 82 |
| 4.2.1 | Installation de DuMu ^x | 82 |
| 4.2.2 | Utilisation de DuMu ^x | 82 |
| 4.2.2.1 | Schémas numériques | 83 |
| 4.2.2.2 | Traitement algébrique (linéaire et non linéaire). | 83 |
| 4.2.3 | Choix du pas de temps | 83 |
| 4.2.4 | Concepts et modèles | 83 |
| 4.2.5 | Systèmes de matériaux | 83 |
| 4.3 | Simulations numériques | 84 |
| 4.3.1 | Test 1 : Benchmark BOBG 1-D. | 84 |
| 4.3.1.1 | Modélisation physique et mathématique. | 84 |
| 4.3.1.2 | Résultats numériques. | 87 |
| 4.3.2 | Test 2 : Injection d'un gaz dans un milieu poreux 2D, saturé en eau. | 90 |
| 4.3.2.1 | Modélisation physique et mathématique. | 90 |
| 4.3.2.2 | Résultats numériques. | 93 |
| 4.3.3 | Test 3 : Milieu périodique. | 95 |
| 4.3.3.1 | Données physiques du problème. | 95 |
| 4.3.3.2 | Résultats numériques. | 97 |
| 4.3.4 | Test 4 : Milieu hétérogène. | 105 |
| 4.3.4.1 | Données physiques du problème. | 105 |
| 4.3.4.2 | Résultats numériques. | 108 |

Table des figures

| | | |
|------|---|----|
| 4.1 | Représentation du domaine du cas test bi-matériau 1-D. | 85 |
| 4.2 | Courbe de la pression capillaire dans le milieu BO. | 85 |
| 4.3 | Courbe de la pression capillaire dans le milieu BG. | 85 |
| 4.4 | Représentation des perméabilités relatives dans le milieu BOBG. | 86 |
| 4.5 | Représentation des conditions initiales et aux limites du cas test BOBG 1-D. | 87 |
| 4.6 | Explication des phénomènes se déroulant dans les matériaux. | 87 |
| 4.7 | Représentation de la pression du gaz, la pression du liquide, la pression capillaire et la saturation du liquide en différents temps. | 88 |
| | (a) pression du gaz. | 88 |
| | (b) pression de l'eau | 88 |
| | (c) pression capillaire | 88 |
| | (d) saturation de l'eau | 88 |
| 4.8 | Représentation de la pression du gaz, la pression du liquide, la pression capillaire et la saturation du liquide en différents temps. | 89 |
| | (a) pression du gaz. | 89 |
| | (b) pression de l'eau | 89 |
| | (c) pression capillaire | 89 |
| | (d) saturation de l'eau | 89 |
| 4.9 | Représentation de la pression du gaz, la pression du liquide, la pression capillaire et la saturation du liquide en différents temps. | 90 |
| 4.10 | Représentation des conditions initiales et aux limites du test 2. | 93 |
| 4.11 | Représentation de la pression du gaz (à gauche) et la saturation du liquide (à droite) en différents temps : en haut 50 ans, au milieu 1000 ans, en bas 10 000 ans. | 94 |
| | (a) T=50 ans | 94 |
| | (b) T=1000 ans | 94 |
| | (c) T=10000 ans | 94 |
| 4.12 | Représentation de la perméabilité du milieu périodique. | 95 |
| 4.13 | Représentation de la pression capillaire. | 96 |
| 4.14 | Représentation des perméabilités relatives. | 96 |
| 4.15 | maillage 40×40 | 97 |
| 4.16 | maillage 80×80 | 97 |
| 4.17 | Pression de l'eau en diagonale. | 98 |
| 4.18 | Saturation de l'eau en diagonale. | 98 |
| 4.19 | Pression de l'eau en diagonale. | 98 |
| 4.20 | Saturation de l'eau en diagonale. | 98 |

| | |
|--|-----|
| 4.21 Profil des saturations de l'eau en milieu hétérogène (à gauche) et en milieu homogénéisé (à droite). | 100 |
| (a) T=1an | 100 |
| (b) T=10 ans | 100 |
| (c) T=22 ans | 100 |
| 4.22 Profil des saturations de l'huile en milieu hétérogène (à gauche) et en milieu homogénéisé (à droite). | 101 |
| (a) T=1an | 101 |
| (b) T=10 ans | 101 |
| (c) T=22 ans | 101 |
| 4.23 Profil des pressions de l'eau en milieu hétérogène (à gauche) et en milieu homogénéisé (à droite). | 102 |
| (a) T=1an | 102 |
| (b) T=10 ans | 102 |
| (c) T=22 ans | 102 |
| 4.24 Profil des pressions de l'huile en milieu hétérogène (à gauche) et en milieu homogénéisé (à droite). | 103 |
| (a) T=1an | 103 |
| (b) T=10 ans | 103 |
| (c) T=22 ans | 103 |
| 4.25 Saturations de l'eau en diagonale (à gauche) et saturations de l'huile en diagonale (à droite) en milieu hétérogène et homogénéisé. | 104 |
| 4.26 Pressions de l'eau en diagonale (à gauche) et pressions de l'huile en diagonale (à droite) en milieu hétérogène et homogénéisé. | 104 |
| 4.27 Représentation du débit total d'huile récupérée. | 105 |
| 4.28 Représentation des perméabilités du milieu hétérogène. | 106 |
| 4.29 Représentation des perméabilités du milieu homogénéisé. | 108 |
| 4.30 Profil des saturations de l'eau en milieu hétérogène (à gauche) et en milieu homogénéisé (à droite). | 109 |
| (a) T=1an | 109 |
| (b) T=10 ans | 109 |
| (c) T=29 ans | 109 |
| 4.31 Profil des saturations de l'huile en milieu hétérogène (à gauche) et en milieu homogénéisé (à droite). | 110 |
| (a) T=1an | 110 |
| (b) T=10 ans | 110 |
| (c) T=29 ans | 110 |
| 4.32 Profil des pressions de l'eau en milieu hétérogène (à gauche) et en milieu homogénéisé (à droite). | 111 |
| (a) T=1an | 111 |
| (b) T=10 ans | 111 |
| (c) T=29 ans | 111 |
| 4.33 Profil des pressions de l'huile en milieu hétérogène (à gauche) et en milieu homogénéisé (à droite). | 112 |
| (a) T=1an | 112 |
| (b) T=10 ans | 112 |
| (c) T=29 ans | 112 |
| 4.34 Saturations de l'eau en diagonale (à gauche) et saturations de l'huile en diagonale (à droite) en milieu hétérogène et homogénéisé. | 113 |

| | |
|--|-----|
| 4.35 Pressions de l'eau en diagonale (à gauche) et pressions de l'huile en diagonale (à droite) en milieu hétérogène et homogénéisé. | 113 |
| 4.36 Représentation du débit total d'huile récupérée. | 114 |

Nomenclature

- Ω domaine de \mathbb{R}^d ($d = 2, 3$) figurant un milieu poreux.
- $\Gamma = \partial\Omega = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2$ frontière du domaine Ω .
- \vec{n} normale unitaire à une frontière, orientée vers l'extérieur.
- t, T variable temporaire et temps final.
- h pas du maillage dans Ω .
- Δt pas de discrétisation en temps dans $[0, T[$.
- $K = K(x)$ perméabilité, en (m^2) .
- μ_i ($i = \ell, g$) viscosité du fluide en Pa.s.
- ρ_i ($i = \ell, g$) masse volumique de la phase i , en $kg.m^{-3}$.
- ϕ porosité totale (sans dimension).
- g accélération de la pesanteur.
- kr_i perméabilité relative de la phase i .
- \bar{q} vitesse de Darcy.
- p_i ($i = \ell, g$) la pression de la phase i , en Pa .
- P pression globale.
- P_c pression capillaire

Les opérateurs

- $(f)^+, (f)^-$ $\max(f, 0), \min(f, 0)$.
- $|\xi|$ norme euclidienne pour $\xi \in \mathbb{R}^d$.
- \cdot produit scalaire entre deux vecteurs de \mathbb{R}^d .

Les espaces fonctionnels

- $L^p(\Omega) := \{f; \text{mesurable sur } \Omega; \text{ tel que } \int_{\Omega} |f|^p dx < \infty\}, 1 \leq p \leq \infty$.
- $H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); u' \in L^2(\Omega)\}$.
- $H_{\Gamma_1}^1 = \{u \in H^1(\Omega) : u = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}$

Le plan de cette thèse se présente comme suit.

Introduction générale

Les roches réservoirs des gisements contiennent généralement plusieurs fluides immiscibles tels que l'huile, l'eau et le gaz. Lors de la mise en exploitation du gisement, il est fréquent qu'un fluide vienne déplacer l'hydrocarbure contenue dans la roche. Par exemple, sous l'effet de la baisse de pression due à l'exploitation, où peut être en présence d'une migration d'eau depuis les régions extérieures vers le gisement, ou bien d'une libération du gaz dissous dans les huiles brutes. De plus, les techniques de récupération secondaire ou tertiaires nécessitent souvent l'injection d'un fluide initialement absent du réservoir, qui va permettre de déplacer l'huile vers les puits de production. Ainsi, les écoulements dans les roches réservoirs sont la plupart du temps multiphasiques.

Une manière standard de modéliser ces écoulements, est l'utilisation des équations de conservation de la masse et la loi de Darcy–Muskat pour chaque phase, ce qui nous donne un système d'équations aux dérivées partielles couplées, non linéaires, et dégénérées de type hyperbolique–parabolique.

L'analyse mathématique des écoulements en milieu poreux est depuis longtemps, largement étudiée, et la littérature est riche de nombreuses méthodes développées à ce sujet. Dans le cas d'un écoulement diphasique incompressible, les questions d'existence et de régularité des solutions faibles ont été étudiées dans [4, 17, 19, 27, 36, 37, 46, 51, 64, 80, 81]. Les résultats d'existence pour le modèle multi-composants ont été établis dans [35, 50, 65, 67, 78, 77], et les résultats d'existence pour les modèles d'écoulements miscibles compressibles en milieu poreux ont été traités dans [13, 14, 42, 53]. En revanche, le premier résultat d'existence pour les modèles d'écoulements diphasiques immiscibles et compressibles n'a été établie que récemment par les auteurs de [61, 56, 12]. Dans ces travaux, les modèles ont été écrit sous une formulation telle que les inconnues primaires sont la pression de la phase gaz et la saturation de la phase liquide. La notion de la pression globale introduite dans [17, 36], est utilisée afin d'obtenir des estimations *a priori* nécessaires. Un modèle plus général d'écoulement diphasique immiscible et compressible a été étudié dans [56, 61, 62]. Ces résultats ont été établis sous l'hypothèse d'une pression capillaire bornée, et la continuité de la porosité et de la perméabilité du milieu. Les résultats d'existence d'une solution faible pour la formulation en pression globale associée à un écoulement diphasique compressible a été introduite dans [5], sous quelques hypothèses réalistes qui sont la non bornitude de la pression capillaire, et la discontinuité de la porosité et du tenseur de perméabilité absolue.

Les milieux poreux naturels sont hétérogènes, à plusieurs échelles. Il n'y a pas assez d'outils de modélisation qui permettent la description de ces hétérogénéités, ni de moyens de calculs efficaces pour simuler tous les phénomènes physiques intervenants à cette échelle. La théorie de l'homogénéisation permet en partie, de surmonter ce problème, son objectif étant de remplacer les équations à l'échelle microscopique, par un modèle effectif que l'on résout par un maillage grossier à échelle raisonnable, et qui de plus, nous donne une bonne approximation du comportement général du modèle initial.

De nombreux ouvrages sont consacrés à l'étude de l'homogénéisation de modèles d'écoulements diphasiques immiscibles et compressibles en milieu poreux. On cite par exemple [73] pour une présentation classique de la théorie de l'homogénéisation, et pour une présentation générale plus avancée de l'homogénéisation mathématique, on se réfère à [73], et dans [60], on trouve une large collection d'applications de l'homogénéisation en milieu poreux. Pour d'autres travaux plus récents sur les méthodes d'*upscaling*, on peut se référer à [48, 52]

et leurs bibliographies.

Les résultats d'homogénéisation des écoulements diphasiques miscibles et compressibles en milieu poreux ont été établis dans [13, 43]. En revanche, le premier résultat d'homogénéisation d'écoulements diphasiques immiscibles et compressible en milieu poreux n'a été établie que récemment par les auteurs de [6]. Dans ce travail, le modèle d'écoulement eau-gaz est considéré, et une formulation en pression globale est utilisée pour obtenir des estimations *a priori*, et un résultat de compacité essentiel à la justification rigoureuse du modèle homogénéisé.

Si on regarde le développement de la théorie de l'homogénéisation selon le type du milieu poreux, on note tout d'abord, qu'il a été observé au cours des années 1960, qu'un écoulement en réservoir fracturé est très différent d'un écoulement en réservoir non fracturé. En effet, dans le cas d'un milieu fracturé, l'écoulement se comporte comme si le réservoir possède deux structures poreuses : l'une associée aux fractures, et l'autre associée à la matrice. La majorité de l'écoulement se fait dans le milieu fracturé, tandis que la majeure partie du fluide se trouve piégée à l'intérieur de la matrice. Le premier résultat, que l'on trouve dans [27], fut la dérivation du modèle double porosité pour un écoulement diphasique en milieu fracturé, où les équations effectives du modèle double porosité ont été établies de manière formelle, par des développements asymptotiques dans le cas miscible incompressible.

Dans [30], le modèle double porosité pour un modèle d'écoulement diphasique immiscible et incompressible formulé en fonction de la pression réduite a été rigoureusement justifié par la méthode d'homogénéisation périodique. Le même problème a été considéré par l'auteur de [82], qui a distingué trois cas, selon le rapport entre la perméabilité du bloc de matrice, et la perméabilité des fractures : égale à ε^2 , inférieur à ε^2 , supérieur à ε^2 , où ε est un petit paramètre qui représente le rapport entre la taille du bloc de matrice et le domaine tout entier. Cette étude a révélé que, si le rapport entre les perméabilités est ε^2 , il y a un terme source qui apparaît, tandis que si le rapport entre les perméabilités n'est pas ε^2 , il n'y a pas de terme source. Pour le déplacement d'un fluide miscible compressible par un autre dans un réservoir naturellement fracturé, le modèle double porosité correspondant, a été rigoureusement décrit dans [41], et le cas d'un écoulement tri-phasique a été établi de manière formelle, par un développement asymptotique dans [20, 38].

Chapitre 1

Homogénéisation d'un modèle diphasique eau–gaz en milieu poreux

1.1 Introduction

Ce Chapitre présente une synthèse des résultats obtenus dans [6]. Il s'agit de l'homogénéisation d'un écoulement diphasique immiscible compressible eau–gaz dans un milieu poreux. La phase eau est supposée incompressible, tandis que la phase gaz est compressible. Le modèle microscopique qui décrit cet écoulement est donné dans la section 1.2. Dans la section 1.3, on donne une formulation du modèle microscopique en utilisant la pression globale. Les hypothèses sur les données sont formulées dans la section 1.4, et un théorème d'existence d'au moins une solution faible du problème (1.14) est donné dans la section 1.5. puis un résultat d'homogénéisation est donné dans la section 1.6. Finalement, nous donnons dans la section 1.7, une justification du résultat d'homogénéisation par une méthode de convergence à deux–échelles, et cela en passant par des estimations a priori essentiellement basées sur l'égalité d'énergie, des résultats de compacité, et enfin, un passage à la limite dans formulation faible du problème en terme de la pression globale et de la saturation.

1.2 Modèle microscopique physique–mathématique

On considère un réservoir $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 1, 2, 3$) borné, connexe, lipschitzien, de structure périodique. Plus précisément, on paramètre cette structure périodique par un paramètre ε qui représente le rapport entre la taille de la cellule et toute la région Ω , et on suppose que $0 < \varepsilon \ll 1$ destiné à tendre vers 0. Soit $Y = (0, 1)^d$ la cellule de base microscopique du domaine. Avant de décrire les équations du modèle, nous donnons quelques notations. Soit $\Phi^\varepsilon(x) = \Phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ la porosité de Ω ; $K^\varepsilon = K\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ le tenseur de perméabilité absolue de Ω ; $S_w^\varepsilon = S_w^\varepsilon(x, t)$, $S_g^\varepsilon = S_g^\varepsilon(x, t)$ les saturations de l'eau et du gaz, resp; $p_w^\varepsilon = p_w^\varepsilon(x, t)$, $p_g^\varepsilon = p_g^\varepsilon(x, t)$ les pressions de l'eau et du gaz, resp; et ρ_w, ρ_g sont les densités de l'eau et du gaz, resp.

L'équation de conservation de la masse est :

$$\begin{cases} \Phi^\varepsilon(x) \frac{\partial}{\partial t} (S_w^\varepsilon \rho_w(p_w^\varepsilon)) + \operatorname{div} (\rho_w(p_w^\varepsilon) \vec{q}_w^\varepsilon) = 0 & \text{dans } \Omega_T; \\ \Phi^\varepsilon(x) \frac{\partial}{\partial t} (S_g^\varepsilon \rho_g(p_g^\varepsilon)) + \operatorname{div} (\rho_g(p_g^\varepsilon) \vec{q}_g^\varepsilon) = 0 & \text{dans } \Omega_T, \end{cases} \quad (1.1)$$

où $T > 0$ est fixé, $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$, et $\vec{q}_w^\varepsilon, \vec{q}_g^\varepsilon$, sont définis par la lois de Darcy- Muskat : (voir par exemple [24, 36])

$$\vec{q}_w^\varepsilon = -K^\varepsilon(x)\lambda_w(S_w^\varepsilon)(\nabla p_w^\varepsilon - \rho_w(p_w^\varepsilon)\vec{g}) \quad \text{avec} \quad \lambda_w(S_w^\varepsilon) = \frac{k_{r,w}}{\mu_w}(S_w^\varepsilon); \quad (1.2)$$

$$\vec{q}_g^\varepsilon = -K^\varepsilon(x)\widetilde{\lambda}_g(S_g^\varepsilon)(\nabla p_g^\varepsilon - \rho_g(p_g^\varepsilon)\vec{g}) \quad \text{avec} \quad \widetilde{\lambda}_g(S_g^\varepsilon) = \frac{k_{r,g}}{\mu_g}(S_g^\varepsilon) \quad (1.3)$$

avec \vec{g} est le vecteur de gravité, et μ_w, μ_g sont les viscosités de l'eau et du gaz, resp. Nous faisons les hypothèses suivantes sur la densité :

On suppose que la densité de l'eau est constante, et pour simplifier, on pose

$$\rho_w(p_w^\varepsilon) = 1, \quad (1.4)$$

et on suppose que la densité du gaz est une fonction monotone telle que :

$$\rho_g(p) = \rho_{\min} \quad \text{pour} \quad p \leq p_{\min}, \quad \rho_g(p) = \rho_{\max} \quad \text{pour} \quad p \geq p_{\max}; \quad (1.5)$$

$$\rho_{\min} < \rho_g(p) < \rho_{\max} \quad \text{pour} \quad p_{\min} < p < p_{\max},$$

où les constantes ρ_{\min}, ρ_{\max} et p_{\min}, p_{\max} vérifient les conditions :

$$0 < \rho_{\min} < \rho_{\max} < +\infty \quad \text{et} \quad 0 < p_{\min} < p_{\max} < +\infty. \quad (1.6)$$

Pour compléter le modèle, nous avons besoin de deux équations supplémentaires. La première est une équation pour les saturations :

$$S_w^\varepsilon + S_g^\varepsilon = 1 \quad \text{avec} \quad S_w^\varepsilon, S_g^\varepsilon \geq 0. \quad (1.7)$$

La deuxième est la loi de la pression capillaire :

$$P_c(S^\varepsilon) = p_g^\varepsilon - p_w^\varepsilon \quad (1.8)$$

avec $P_c'(S) < 0, \forall S \in [0, 1]$, où $P_c'(s)$ note la dérivée de la fonction P_c par rapport à la variable S .

Pour simplifier les notations, on note

$$S^\varepsilon = S_w^\varepsilon \quad (1.9)$$

En combinant les équations (1.2), et (1.3), en utilisant la notation (1.9), et en utilisant l'hypothèse sur la densité de la phase eau, on écrit le système (2.22) de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi^\varepsilon(x) \frac{\partial S^\varepsilon}{\partial t} - \operatorname{div}(K^\varepsilon(x)\lambda_w(S^\varepsilon)(\nabla p_w^\varepsilon - \vec{g})) = 0 \quad \text{dans } \Omega_T; \\ \Phi^\varepsilon(x) \frac{\partial (\rho_g(p_g^\varepsilon)(1 - S^\varepsilon))}{\partial t} - \operatorname{div}(K^\varepsilon(x)\lambda_g(S^\varepsilon)\rho_g(p_g^\varepsilon)(\nabla p_g^\varepsilon - \rho(p_g^\varepsilon)\vec{g})) = 0 \quad \text{dans } \Omega_T; \\ P_c(S^\varepsilon) = p_g^\varepsilon - p_w^\varepsilon \quad \text{dans } \Omega_T, \end{array} \right. \quad (1.10)$$

où

$$\lambda_g(S^\varepsilon) := \widetilde{\lambda}_g(1 - S^\varepsilon).$$

Nous allons maintenant spécifier les conditions au bord et les conditions initiales du problème. On suppose que le bord $\partial\Omega$ est constitué de deux parties : Γ_1 et Γ_2 telles que

$$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset \quad \text{et} \quad \partial\Omega = \overline{\Gamma_1} \cup \overline{\Gamma_2};$$

Les conditions au bord de notre problème sont :

$$S^\varepsilon(x, t) = S^1(x, t) \text{ et } p_g^\varepsilon(x, t) = p_g^1(x, t) \text{ sur } \Gamma_1 \times (0, T) \quad (1.11)$$

$$\vec{q}_w^\varepsilon \cdot \vec{\nu} = \vec{q}_g^\varepsilon \cdot \vec{\nu} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T) \quad (1.12)$$

et les conditions initiales sont :

$$S^\varepsilon(x, 0) = S^0(x) \quad \text{et} \quad p_g^\varepsilon(x, 0) = p_g^0(x) \text{ sur } \Omega \quad (1.13)$$

Remarque 1 . On trouve les conditions sur Γ_1 et les conditions initiales pour la saturation du gaz et la pression de l'eau à partir de (1.11), (1.13).

Finalement, le modèle microscopique d'un écoulement diphasique immiscible et compressible est :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Phi^\varepsilon(x) \frac{\partial S^\varepsilon}{\partial t} - \operatorname{div} (K^\varepsilon(x) \lambda_w(S^\varepsilon) (\nabla p_w^\varepsilon - \vec{g})) = 0 & \text{dans } \Omega_T; \\ \Phi^\varepsilon(x) \frac{\partial (\rho_g(p_g^\varepsilon)(1 - S^\varepsilon))}{\partial t} - \operatorname{div} (K^\varepsilon(x) \lambda_g(S^\varepsilon) \rho_g(p_g^\varepsilon) (\nabla p_g^\varepsilon - \rho(p_g^\varepsilon) \vec{g})) = 0 & \text{dans } \Omega_T; \\ P_c(S^\varepsilon) = p_g^\varepsilon - p_w^\varepsilon & \text{dans } \Omega_T; \\ S^\varepsilon(x, t) = S^1(x, t) \text{ et } p_g^\varepsilon(x, t) = p_g^1(x, t) & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T); \\ \vec{q}_w^\varepsilon \cdot \vec{\nu} = \vec{q}_g^\varepsilon \cdot \vec{\nu} = 0 & \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T); \\ S^\varepsilon(x, 0) = S^0(x) \quad \text{et} \quad p_g^\varepsilon(x, 0) = p_g^0(x) & \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (1.14)$$

1.3 Formulation du modèle à l'aide de la pression globale.

Nous allons décrire dans cette section, une formulation pour le modèle précédent à l'aide de la pression globale, voir par exemple [17, 36]. Les équations sont écrites sous forme de flux fractionnel et introduisent un système couplé faisant intervenir une équation de convection diffusion non linéaire (équation de la saturation), et une équation parabolique dégénérée, non linéaire (équation en pression globale) comme nous le verrons en détail dans la section classification à la fin du chapitre. ce qui va nous permettre ici, d'avoir un modèle plus facile à manipuler pour obtenir des estimations a priori des solutions. Il s'agit de chercher une pression P^ε et le coefficient $\gamma(S^\varepsilon)$ tels que $\gamma(S^\varepsilon) > 0$ dans $[0, 1]$ et

$$\lambda_w(S^\varepsilon) \nabla p_w^\varepsilon + \lambda_g(S^\varepsilon) \nabla p_g^\varepsilon = \gamma(S^\varepsilon) \nabla P^\varepsilon. \quad (1.15)$$

On définit la pression globale par :

$$p_w^\varepsilon = P^\varepsilon + G_w(S^\varepsilon) \quad \text{et} \quad p_g^\varepsilon = P^\varepsilon + G_g(S^\varepsilon), \quad (1.16)$$

où les fonctions $G_w(S^\varepsilon)$ et $G_g(S^\varepsilon)$ sont des fonctions que l'on définira plus tard. On a :

$$\begin{aligned} \lambda_w(S^\varepsilon) \nabla p_w^\varepsilon + \lambda_g(S^\varepsilon) \nabla p_g^\varepsilon &= \lambda_w(S^\varepsilon) [\nabla P^\varepsilon + \nabla G_w(S^\varepsilon)] + \lambda_g(S^\varepsilon) [\nabla P^\varepsilon + \nabla G_g(S^\varepsilon)] \\ &= \lambda_w(S^\varepsilon) \nabla P^\varepsilon + \lambda_w(S^\varepsilon) \nabla G_w(S^\varepsilon) + \lambda_g(S^\varepsilon) \nabla P^\varepsilon + \lambda_g(S^\varepsilon) \nabla G_g(S^\varepsilon) \\ &= [\lambda_w(S^\varepsilon) + \lambda_g(S^\varepsilon)] \nabla P^\varepsilon + \{\lambda_w(S^\varepsilon) \nabla G_w(S^\varepsilon) + \lambda_g(S^\varepsilon) \nabla G_g(S^\varepsilon)\}. \end{aligned}$$

On obtient :

$$\lambda_w (S^\varepsilon) \nabla p_w^\varepsilon + \lambda_g (S^\varepsilon) \nabla p_g^\varepsilon = \lambda (S^\varepsilon) \nabla P^\varepsilon + \{ \lambda_g (S^\varepsilon) \nabla G_g (S^\varepsilon) + \lambda_w (S^\varepsilon) \nabla G_w (S^\varepsilon) \},$$

où

$$\lambda(s) = \lambda_w(s) + \lambda_g(s). \quad (1.17)$$

On choisit alors les fonctions G_w et G_g de sorte que

$$\lambda_g (S^\varepsilon) \nabla G_g (S^\varepsilon) + \lambda_w (S^\varepsilon) \nabla G_w (S^\varepsilon) = 0, \quad (1.18)$$

où la fonction G_g est définie par :

$$G_g (S^\varepsilon) = G_g(0) + \int_0^{S^\varepsilon} \frac{\lambda_w(s)}{\lambda(s)} P'_c(s) ds. \quad (1.19)$$

La fonction G_w est définie par :

$$G_w (S^\varepsilon) = G_g (S^\varepsilon) - P_c (S^\varepsilon). \quad (1.20)$$

De plus, on a par (1.18) que

$$\nabla G_w (S^\varepsilon) = -\frac{\lambda_g (S^\varepsilon)}{\lambda_w (S^\varepsilon)} \nabla G_g (S^\varepsilon) = -\frac{\lambda_g (S^\varepsilon)}{\lambda_w (S^\varepsilon)} \nabla P_c (S^\varepsilon) \frac{\lambda_w (S^\varepsilon)}{\lambda(S^\varepsilon)}.$$

Alors

$$\nabla G_w (S^\varepsilon) = -\frac{\lambda_g (S^\varepsilon)}{\lambda (S^\varepsilon)} \nabla P_c (S^\varepsilon). \quad (1.21)$$

Il est maintenant clair que $\gamma (S^\varepsilon) \equiv \lambda (S^\varepsilon)$; et l'hypothèse standard pour $\lambda(s)$ est que $\lambda(s) > 0$ pour $s \in [0, 1]$ comme nous allons le voir dans la prochaine section. Donc, la relation (1.15) est établie.

Avant d'aller plus loin, nous allons donner une relation entre la pression capillaire et la mobilité. Pour ça, on définit deux fonctions scalaires A_g et A_w par :

$$\sqrt{\lambda_g (S^\varepsilon)} G'_g (S^\varepsilon) = A'_g (S^\varepsilon) \quad \text{et} \quad \sqrt{\lambda_w (S^\varepsilon)} G'_w (S^\varepsilon) = A'_w (S^\varepsilon). \quad (1.22)$$

On déduit des relations (1.16), (1.17), (1.18) et (1.22) l'identité suivante :

$$\lambda_g (S^\varepsilon) |\nabla P_g^\varepsilon|^2 + \lambda_w (S^\varepsilon) |\nabla P_w^\varepsilon|^2 = \lambda (S^\varepsilon) |\nabla P^\varepsilon|^2 + |\nabla A_g (S^\varepsilon)|^2 + |\nabla A_w (S^\varepsilon)|^2. \quad (1.23)$$

On réécrit maintenant le problème (1.10) en considérant S^ε et P^ε comme étant les inconnus du problème. On obtient alors pour la première équation de (1.10) :

$$\Phi^\varepsilon(x) \frac{\partial S^\varepsilon}{\partial t} - \operatorname{div} (K^\varepsilon(x) \lambda_w (S^\varepsilon) (\nabla p_w^\varepsilon - \vec{g})) = 0 \quad \text{dans } \Omega_T$$

on déduit de la définition de la pression globale (1.16) que :

$$\nabla p_w^\varepsilon = \nabla P^\varepsilon + \nabla G_w (S^\varepsilon)$$

on l'injecte dans l'équation, et on obtient :

$$\Phi^\varepsilon(x) \frac{\partial S^\varepsilon}{\partial t} - \operatorname{div} (K^\varepsilon(x) \lambda_w (S^\varepsilon) (\nabla P^\varepsilon + \nabla G_w (S^\varepsilon) - \vec{g})) = 0 \quad \text{dans } \Omega_T.$$

Donc,

$$\Phi^\varepsilon(x) \frac{\partial S^\varepsilon}{\partial t} - \operatorname{div} (K^\varepsilon(x) (\lambda_w(S^\varepsilon) \nabla P^\varepsilon + \lambda_w(S^\varepsilon) \nabla G_w(S^\varepsilon) - \lambda_w(S^\varepsilon) \vec{g})) = 0 \quad \text{dans } \Omega_T. \quad (1.24)$$

Alors on a :

$$\Phi^\varepsilon(x) \frac{\partial S^\varepsilon}{\partial t} - \operatorname{div} (K^\varepsilon(x) (\lambda_w(S^\varepsilon) \nabla P^\varepsilon + \nabla \beta(S^\varepsilon) - \lambda_w(S^\varepsilon) \vec{g})) = 0 \quad \text{dans } \Omega_T, \quad (1.25)$$

où

$$\beta(s) = \int_0^s \alpha(u) du \quad \text{avec} \quad \alpha(s) = \frac{\lambda_g(s) \lambda_w(s)}{\lambda(s)} |P'_c(s)|. \quad (1.26)$$

Pour la seconde équation de (1.10) :

$$\Phi^\varepsilon(x) \frac{\partial ((1 - S^\varepsilon) \rho_g(p_g^\varepsilon))}{\partial t} - \operatorname{div} (K^\varepsilon(x) \lambda_g(S^\varepsilon) \rho_g(p_g^\varepsilon) (\nabla p_g^\varepsilon - \tilde{\rho}_g^\varepsilon \vec{g})) = 0 \quad \text{dans } \Omega_T.$$

On déduit de la définition de la pression globale (2.31) que

$$\nabla p_g^\varepsilon = \nabla P^\varepsilon + \nabla G_g(S^\varepsilon),$$

on l'injecte dans l'équation, et on obtient :

$$\Phi^\varepsilon(x) \frac{\partial \Theta^\varepsilon}{\partial t} - \operatorname{div} (K^\varepsilon(x) \tilde{\rho}_g^\varepsilon (\lambda_g(S^\varepsilon) \nabla P^\varepsilon - \lambda_g(S^\varepsilon) \nabla G_g(S^\varepsilon) - \lambda_g(S^\varepsilon) \tilde{\rho}_g^\varepsilon \vec{g})) = 0 \quad \text{dans } \Omega_T,$$

où

$$\tilde{\rho}_g^\varepsilon = \rho_g(P^\varepsilon + G_g(S^\varepsilon)) \quad (1.27)$$

et

$$\Theta^\varepsilon = \Theta^\varepsilon(S^\varepsilon, P^\varepsilon) = (1 - S^\varepsilon) \tilde{\rho}_g^\varepsilon. \quad (1.28)$$

On déduit alors par (1.21) que :

$$\lambda_w(s) \nabla G_w(s) = \alpha(s) \nabla s \quad \text{et} \quad \lambda_g(s) \nabla G_g(s) = -\alpha(s) \nabla s. \quad (1.29)$$

La deuxième équation de (1.10) peut s'écrire :

$$\Phi^\varepsilon(x) \frac{\partial \Theta^\varepsilon}{\partial t} - \operatorname{div} (K^\varepsilon(x) \tilde{\rho}_g^\varepsilon (\lambda_g(S^\varepsilon) \nabla P^\varepsilon - \nabla \beta(S^\varepsilon) - \lambda_g(S^\varepsilon) \tilde{\rho}_g^\varepsilon \vec{g})) = 0 \quad \text{dans } \Omega_T, \quad (1.30)$$

où nous avons introduit les notations suivantes :

$$\tilde{\rho}_g^\varepsilon = \rho_g(P^\varepsilon + G_g(S^\varepsilon)); \quad (1.31)$$

$$\Theta_g^\varepsilon = \Theta_g^\varepsilon(S^\varepsilon, P^\varepsilon) = (1 - S^\varepsilon) \tilde{\rho}_g^\varepsilon; \quad (1.32)$$

avec $\alpha(u)$ est définie par (1.26).

On complète le système (1.25) et (1.30) par les conditions au bord et les conditions initiales suivantes :

$$S^\varepsilon(x, t) = S^1(x, t) \quad \text{et} \quad P^\varepsilon(x, t) = P^1(x, t) \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T) \quad (1.33)$$

$$\vec{q}_w^\varepsilon \cdot \vec{\nu} = \vec{q}_g^\varepsilon \cdot \vec{\nu} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T) \quad (1.34)$$

$$S^\varepsilon(x, 0) = S^0(x) \quad \text{et} \quad P^\varepsilon(x, 0) = P^0(x) \quad \text{dans } \Omega \quad (1.35)$$

avec

$$P^1(x, t) = p_g^1 - G_g(S^1) \text{ et } P^0(x, t) = p_g^0 - G_g(S^0)$$

En conclusion, le système avec lequel nous allons travailler est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi^\varepsilon(x) \frac{\partial S^\varepsilon}{\partial t} - \operatorname{div} (K^\varepsilon(x) (\lambda_w(S^\varepsilon) \nabla P^\varepsilon + \nabla \beta(S^\varepsilon) - \lambda_w(S^\varepsilon) \vec{g})) = 0 \text{ dans } \Omega_T; \\ \Phi^\varepsilon(x) \frac{\partial \Theta^\varepsilon}{\partial t} - \operatorname{div} (K^\varepsilon(x) \tilde{\rho}_g^\varepsilon (\lambda_g(S^\varepsilon) \nabla P^\varepsilon - \nabla \beta(S^\varepsilon) - \lambda_g(S^\varepsilon) \tilde{\rho}_g^\varepsilon \vec{g})) = 0 \text{ dans } \Omega_T; \\ S^\varepsilon(x, t) = S^1(x, t) \text{ et } P^\varepsilon(x, t) = P^1(x, t) \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T); \\ \vec{q}_w^\varepsilon \cdot \vec{\nu} = \vec{q}_g^\varepsilon \cdot \vec{\nu} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T); \\ S^\varepsilon(x, 0) = S^0(x) \text{ et } P^\varepsilon(x, 0) = P^0(x) \quad \text{dans } \Omega. \end{array} \right.$$

Nous passons maintenant à la classification des équations (1.25) et (1.30).

1.3.1 Classification des équations (1.25)-(1.30) :

1.3.1.1 Classification de l'équation (1.25)

Considérons l'équation (1.25)

$$\Phi^\varepsilon(x) \frac{\partial S^\varepsilon}{\partial t} - \operatorname{div} [K^\varepsilon(x) \nabla \beta(S^\varepsilon)] - \operatorname{div} [K^\varepsilon(x) (\lambda_w(S^\varepsilon) \nabla P^\varepsilon - \lambda_w(S^\varepsilon) \vec{g})] = 0 \quad \text{dans } \Omega_T$$

C'est une équation parabolique en S^ε , plus précisément, une équation de Convection-Diffusion. La diffusion est donnée par

$$- \operatorname{div} [K^\varepsilon(x) \nabla \beta(S^\varepsilon)]$$

et la convection - transport est donnée par

$$\operatorname{div} [K^\varepsilon(x) (\lambda_w(S^\varepsilon) \nabla P^\varepsilon - \lambda_w(S^\varepsilon) \vec{g})].$$

Mais on a par l'hypothèse **(H.6)** (voir la section 1.4), que la fonction α s'annule en certains points, et dans ce cas où $\alpha = 0$, l'équation n'est plus parabolique mais hyperbolique d'ordre 1. On conclut alors que l'équation (1.25) en S^ε est une équation parabolique dégénérée.

1.3.1.2 Classification de l'équation (1.30)

Considérons l'équation (1.30).

$$\Phi^\varepsilon(x) \frac{\partial \Theta^\varepsilon}{\partial t} - \operatorname{div} (K^\varepsilon(x) \tilde{\rho}_g^\varepsilon (\lambda_g(S^\varepsilon) \nabla P^\varepsilon - \nabla \beta(S^\varepsilon) - \lambda_g(S^\varepsilon) \tilde{\rho}_g^\varepsilon \vec{g})) = 0 \quad \text{dans } \Omega_T$$

où Θ^ε est donnée par (1.28). Il est possible de la réécrire comme suit :

$$\Phi^\varepsilon(x) \frac{\partial \Theta^\varepsilon}{\partial t} - \operatorname{div} (K^\varepsilon(x) \tilde{\rho}_g^\varepsilon \lambda_g(S^\varepsilon) \nabla P^\varepsilon) - \operatorname{div} (K^\varepsilon(x) \tilde{\rho}_g^\varepsilon (-\nabla \beta(S^\varepsilon) - \lambda_g(S^\varepsilon) \tilde{\rho}_g^\varepsilon \vec{g})) = 0 \quad \text{sur } \Omega_T$$

C'est une équation parabolique en P^ε . Mais on a par l'hypothèse **(H.5)** (voir la section 1.4), que la fonction λ_g s'annule en $S^\varepsilon = 1$. C'est donc une équation parabolique dégénérée au sens parabolique-hyperbolique d'ordre 1. De plus, dans la dérivée en temps, si on développe formellement, on obtient :

$$\frac{\partial \Theta^\varepsilon}{\partial t} = (1 - S^\varepsilon) \frac{\partial}{\partial t} \rho_g (P^\varepsilon + G_g(S^\varepsilon)) - \frac{\partial S^\varepsilon}{\partial t} \rho_g (P^\varepsilon + G_g(S^\varepsilon))$$

Alors

$$\Phi^\varepsilon \frac{\partial \Theta^\varepsilon}{\partial t} = \Phi^\varepsilon (1 - S^\varepsilon) \frac{\partial}{\partial t} \rho_g (P^\varepsilon + G_g(S^\varepsilon)) - \Phi^\varepsilon \frac{\partial S^\varepsilon}{\partial t} \rho_g (P^\varepsilon + G_g(S^\varepsilon))$$

et le terme $(1 - S^\varepsilon) \frac{\partial}{\partial t} \rho_g (P^\varepsilon + G_g(S^\varepsilon))$ disparaît lorsque $S^\varepsilon = 1$. On a donc que le terme d'évolution dégénère. On conclut donc que l'équation (1.30) en P^ε est une équation parabolique-hyperbolique d'ordre 1 et dégénérée en temps.

1.4 Hypothèses sur les données

L'étude sera faite sous les hypothèses suivantes :

(H.1) La fonction $\Phi = \Phi(y)$ est Y -périodique, $\Phi \in L^\infty(Y)$, et il existe deux constantes positives ϕ_1 et ϕ_2 telles que

$$0 < \phi_1 \leq \Phi(y) \leq \phi_2 < 1 \quad \text{dans } Y.$$

(H.2) Le tenseur $K = K(y)$ est une fonction Y -périodique, qui appartient à $(L^\infty(Y))^{d \times d}$; de plus, il existe deux constantes positives k_0 et k_∞ telles que

$$k_0 |\xi|^2 \leq (K(y)\xi, \xi) \leq k_\infty |\xi|^2 \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbb{R}^d \text{ dans } Y. \quad (1.36)$$

(H.3) La fonction $\rho_g = \rho_g(p)$ donnée par (2.25) est une fonction monotone et \mathcal{C}^1 dans \mathbb{R} .

(H.4) La fonction pression-capillaire $s \mapsto P_c(s)$ est positive, de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$. On suppose aussi que $P'_c(s) < 0$ sur $[0, 1]$.

(H.5) La fonction $\lambda_w \in \mathcal{C}([0, 1])$ est telle que $0 \leq \lambda_w(s) \leq 1$ pour tout $s \in [0, 1]$, et $\lambda_w(0) = 0$.

La fonction $\lambda_g \in \mathcal{C}([0, 1])$ est telle que $0 \leq \lambda_g(s) \leq 1$ pour tout $s \in [0, 1]$, et $\lambda_g(1) = 0$.

De plus, il existe une constante positive L_0 , telle que :

$$\lambda(s) = \lambda_w(s) + \lambda_g(s) \geq L_0 > 0 \text{ pour tout } s \in [0, 1].$$

(H.6) La fonction α donnée par (1.26) est continue sur $[0, 1]$. De plus, $\alpha(0) = \alpha(1) = 0$ et $\alpha > 0$ sur $]0, 1[$.

(H.7) La fonction β^{-1} , fonction inverse de β définie dans (1.26) est une fonction Hölderienne d'ordre θ avec $\theta \in [0, 1)$ sur l'intervalle $[0, \beta(1)]$. C'est à dire qu'il existe une constante positive C_β telle que pour tout $s_1, s_2 \in [0, \beta(1)]$, l'inégalité suivante est satisfaite :

$$|\beta^{-1}(s_1) - \beta^{-1}(s_2)| \leq C_\beta |s_1 - s_2|^\theta. \quad (1.37)$$

(H.8) Les données initiales en saturation, i.e., S^0, S^1 satisfont à la condition $0 \leq S^0, S^1 \leq 1$, et la donnée initiale de la pression est telle que $p_g^0 \in L^2(\Omega)$.

1.5 Formulation faible du problème (1.25)-(1.35)

1.5.1 Définition d'une solution faible au problème (1.25)- (1.35)

Afin de définir une solution faible du système (1.25) et (1.35), nous allons introduire l'espace de Sobolev suivant :

$$H_{\Gamma_1}^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}.$$

L'espace $H_{\Gamma_1}^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour la norme $\|u\|_{H_{\Gamma_1}^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{(L^2(\Omega))^d}$.

Définition 1.5.1 *On dit que le couple $(S^\varepsilon, P^\varepsilon)$ est solution faible du problème (1.25)-(1.35) si les conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) $0 \leq S^\varepsilon \leq 1$ p.p. dans Ω_T .

(ii) $P^\varepsilon - P^1 \in L^2(0, T; H_{\Gamma_1}^1(\Omega))$.

(iii) Les conditions aux limites (1.33)-(1.34) sont satisfaites.

(iv) Pour tout $\varphi_w, \varphi_g \in C^1([0, 1]; H_{\Gamma_1}^1(\Omega))$ telle que $\varphi_w = \varphi_g = 0$ sur $\Gamma_1 \times (0, T)$ et $\varphi_w(T) = \varphi_g(T) = 0$ on a :

$$-\int_{\Omega_T} \Phi^\varepsilon(x) S^\varepsilon \frac{\partial \varphi_w}{\partial t} dx dt + \int_{\Omega} \Phi^\varepsilon(x) S^0(x) \varphi_w(0, x) dx \quad (1.38)$$

$$+ \int_{\Omega} K^\varepsilon(x) \lambda_w(S^\varepsilon) \nabla P^\varepsilon \cdot \nabla \varphi_w dx dt + \int_{\Omega_T} K^\varepsilon(x) \nabla \beta(S^\varepsilon) \cdot \nabla \varphi_w dx dt - \int_{\Omega_T} K^\varepsilon(x) \lambda_w(S^\varepsilon) \vec{g} \cdot \nabla \varphi_w dx dt = 0$$

et

$$-\int_{\Omega_T} \Phi^\varepsilon(x) \Theta^\varepsilon \frac{\partial \varphi_g}{\partial t} dt dx + \int_{\Omega} \Phi^\varepsilon(x) (1 - S^0) \rho_g (P^0 + G_g(S^0)) \varphi_g(0, x) dx \quad (1.39)$$

$$+ \int_{\Omega_T} K^\varepsilon(x) \lambda_g(S^\varepsilon) \tilde{\rho}_g^\varepsilon \cdot \nabla \varphi_g dx dt - \int_{\Omega_T} K^\varepsilon(x) \tilde{\rho}_g^\varepsilon \nabla \beta(S^\varepsilon) \cdot \nabla \varphi_g dx dt - \int_{\Omega_T} K^\varepsilon(x) \lambda_g(S^\varepsilon) [\tilde{\rho}_g^\varepsilon]^2 \vec{g} \cdot \nabla \varphi_g dt = 0$$

où $\tilde{\rho}_g^\varepsilon$ est définie par (1.27).

Si $\Phi \in W^{1,\infty}(Y)$ et $K \in (W^{1,\infty}(Y))^{d \times d}$, alors par [61], si les hypothèses **(H.1)**-**(H.8)** sont satisfaites, le problème (1.25)-(1.35) admet au moins une solution faible.

Le résultat d'existence reste vrai dans l'hypothèse où $\Phi \in L^\infty(Y)$ et $K \in (L^\infty(Y))^{d \times d}$. Pour le voir, on peut combiner la preuve qu'il y a dans [61] avec le résultat de compacité que l'on donnera un peu plus loin.

1.6 Résultat d'homogénéisation

Nous étudions la convergence du modèle microscopique d'un écoulement eau-gaz dans le réservoir poreux Ω quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Le modèle homogénéisé est :

$$\begin{cases} \langle \Phi \rangle \frac{\partial S}{\partial t} - \operatorname{div}_x \left(\mathbb{K}^* (\lambda_w l(S) \nabla P + \nabla \beta(S)) + \mathbf{F}_w(S, P) \right) = 0 & \text{dans } \Omega_T; \\ \langle \Phi \rangle \frac{\partial}{\partial t} ((1 - S) \varrho_g^H) - \operatorname{div}_x \left(\varrho_g^H \mathbb{K}^* (\lambda_g(S) \nabla P - \nabla \beta(S)) + \mathbf{F}_g(S, P) \right) = 0 & \text{dans } \Omega_T. \end{cases} \quad (1.40)$$

Ici, $\langle \cdot \rangle$ note la valeur moyenne de la fonction correspondante sur la cellule Y ; \mathbb{K}^* est le tenseur homogénéisé, avec les \mathbb{K}_{ij}^* , $1 \leq i, j \leq p$, définis par :

$$\mathbb{K}_{ij}^* \stackrel{\text{def}}{=} \int_Y K(y) [\nabla_y \xi_i + \vec{e}_i] [\nabla_y \xi_j + \vec{e}_j] dy, \quad (1.41)$$

où la fonction ξ_j est une solution Y -périodique du problème local suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_y \left(K(y) [\nabla_y \xi_j + \vec{e}_j] \right) = 0 & \text{dans } Y; \\ y \mapsto \xi_j(y) & Y\text{-périodique} \end{cases} \quad (1.42)$$

où \vec{e}_j est la j -ème composante du vecteur unité ; la fonction ϱ_g^H est donnée par :

$$\varrho_g^H \stackrel{\text{def}}{=} \varrho_g(P + G_g(S)); \quad (1.43)$$

Les fonctions $\mathbf{F}_w = \mathbf{F}_w(S, P)$, $\mathbf{F}_g = \mathbf{F}_g(S, P)$ dans l'équation (1.40) sont données par :

$$\mathbf{F}_w(S, P) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_w(S) \langle K \nabla_y f_p \rangle + \langle K \nabla_y f_s \rangle - \lambda_w(S) \langle K \vec{g} \rangle; \quad (1.44)$$

$$\mathbf{F}_g(S, P) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_g(S) \varrho_g^H \langle K \nabla_y f_s \rangle - \varrho_g^H \langle K \nabla_y f_s \rangle - \lambda_w(S) [\varrho_g^H]^2 \langle K \vec{g} \rangle, \quad (1.45)$$

où les fonctions $f_p = f_p(y, S, P)$, $f_s = f_s(y, S, P)$ sont les solutions des équations suivantes :

$$\begin{cases} \operatorname{div}_y (K(y) \nabla_y f_p) = \frac{\lambda_w(S) + \varrho_g^H \lambda_g(S)}{\lambda(S)} \operatorname{div}_y (K(y) \vec{g}) & \text{dans } \Omega_T \times Y; \\ y \mapsto f_p(y, S, P) & Y\text{-périodique;} \end{cases} \quad (1.46)$$

et

$$\begin{cases} \operatorname{div}_y (K(y) \nabla_y f_s) = -\frac{\lambda_w(S) \lambda_g(S)}{\lambda(S)} (\varrho_g^H - 1) \operatorname{div}_y (K(y) \vec{g}) & \text{dans } \Omega_T \times Y; \\ y \mapsto f_s(y, S, P) & Y\text{-périodique.} \end{cases} \quad (1.47)$$

Le système (1.40)–(1.47) est complété par les conditions au bord et les conditions initiales suivantes :

$$S(x, t) = S^1(x, t) \text{ et } P(x, t) = P^1(x, t) \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T); \quad (1.48)$$

$$\vec{q}_w \cdot \vec{\nu} = \vec{q}_g \cdot \vec{\nu} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (1.49)$$

avec

$$\vec{q}_w = \mathbb{K}^* (\lambda_w(S) \nabla P + \nabla \beta(S)) + \mathbf{F}_w(S, P); \quad (1.50)$$

$$\vec{q}_g = \mathbb{K}^* (\lambda_g(S) \nabla P - \nabla \beta(S)) + \frac{\mathbf{F}_g}{\varrho_g^H}(S, P). \quad (1.51)$$

$$S(x, 0) = S^0(x) \text{ et } P(x, 0) = P^0(x) \quad \text{dans } \Omega. \quad (1.52)$$

Définissons la notion de convergence à deux échelles.

Définition 1.6.1 Une fonction, $\varphi \in L^2(\Omega_T; C_{\#}^2(Y))$, qui est Y –périodique en y et qui satisfait

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_T} \left| \varphi \left(x, \frac{x}{\varepsilon}, t \right) \right|^2 dxdt = \int_{\Omega_T \times Y} |\varphi(x, y, t)|^2 dydxdt,$$

est dite fonction test admissible.

Ici, $L^2(\Omega_T; C_{\#}^2(Y))$ est l'espace des fonctions $\phi = \phi(x, y, t)$ périodiques, et deux fois continûment différentiables par rapport à y pour presque tout $(x, t) \in \Omega_T$, pour la norme

$$\|\phi\|_{L^2(\Omega_T; C_{\#}^2(Y))}^2 = \int_{\Omega_T} \|\phi(x, \cdot, t)\|_{C^2(Y)}^2 dxdt.$$

Définition 1.6.2 Une suite de fonctions $v^\varepsilon \in L^2(\Omega_T)$ converge à deux échelles vers $v \in L^2(\Omega_T \times Y)$ si et seulement si, pour toute fonction test admissible $\varphi(x, y, t)$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_T} v^\varepsilon(x, t) \varphi \left(x, \frac{x}{\varepsilon}, t \right) dxdt = \int_{\Omega_T \times Y} v(x, y, t) \varphi(x, y, t) dxdydt.$$

Cette convergence est notée par $v^\varepsilon(x, t) \xrightarrow{2s} v(x, y, t)$.

Le résultat essentiel de ce chapitre, est le suivant :

Théorème 1.6.3 Supposons que les hypothèses **(H.1)–(H.8)** sont satisfaites et soit la paire de fonctions $(P^\varepsilon, S^\varepsilon)$ une solution faible du problème (1.25)–(1.30). Alors, il existe une sous-suite (notée par ε) telle que

$$S^\varepsilon(x, t) \rightarrow S(x, t) \text{ fortement dans } L^q(\Omega_T) \quad \forall 1 < q < +\infty; \quad (1.53)$$

$$P^\varepsilon(x, t) \rightharpoonup P(x, t) \text{ faiblement dans } L^2(0, T; H^1(\Omega)); \quad (1.54)$$

$$\nabla P^\varepsilon(x, t) \xrightarrow{2s} \nabla P(x, t) + \nabla_y w_p(x, t, y); \quad (1.55)$$

$$\beta(S^\varepsilon) \rightarrow \beta(S) \text{ fortement dans } L^q(\Omega_T) \quad \forall 1 < q < +\infty; \quad (1.56)$$

$$\nabla \beta^\varepsilon(x, t) \xrightarrow{2s} \nabla \beta(x, t) + \nabla_y w_s(x, t, y), \quad (1.57)$$

où la fonction β^ε est définie par (1.26);

$$(1 - S^\varepsilon) \varrho_g(P^\varepsilon + G_g(S^\varepsilon)) \rightarrow (1 - S) \varrho_g(P + G_g(S)) \text{ fortement dans } L^2(\Omega_T), \quad (1.58)$$

où $w_p, w_s \in L^2(\Omega_T; H_{\#}^1(Y))$ sont données par

$$w_p = \sum_{j=1}^d \xi_j(y) \frac{\partial P}{\partial x_j}(x, t) + f_p \quad \text{et} \quad w_s = \sum_{j=1}^d \xi_j(y) \frac{\partial \beta}{\partial x_j}(x, t) + f_s,$$

et (P, S) est une solution faible de (1.40)–(1.52).

1.7 Preuve du Théorème 1.6.3 par une méthode de convergence à deux-échelles

Les grandes lignes de la preuve du Théorème 1.6.3 sont : on commence par obtenir des estimations uniformes, puis on établit des résultats de compacité pour les suites $\{S^\varepsilon\}_\varepsilon$ et $\{\Theta_g^\varepsilon\}_\varepsilon$, et finalement, on passe à la limite dans (1.38)–(1.39) quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

1.7.1 Estimations a priori.

Nous allons, dans cette étape, établir les estimations *a priori* pour les solutions S^ε et P^ε du problème (1.25)–(1.35). Pour simplifier, on suppose que $p_w^\varepsilon, p_g^\varepsilon = 0$ sur $\Gamma_1 \times (0, T)$.

1.7.1.1 Égalité d'énergie

Pour obtenir une égalité d'énergie pour la solution faible du problème (1.10), on introduit les fonctions :

$$R_w(p_w^\varepsilon) = \int_0^{p_w^\varepsilon} \frac{d\xi}{\rho_w(\xi)} = p_w^\varepsilon \quad \text{et} \quad R_g(p_g^\varepsilon) = \int_0^{p_g^\varepsilon} \frac{d\xi}{\rho_g(\xi)} \quad (1.59)$$

On a de plus

$$\nabla R_w(p_w^\varepsilon) = \nabla p_w^\varepsilon \quad \text{et} \quad \nabla R_g(p_g^\varepsilon) = \frac{1}{\tilde{\rho}_g^\varepsilon} \nabla \tilde{\rho}_g^\varepsilon \quad \text{avec} \quad \tilde{\rho}_g^\varepsilon = \rho_g(p_g^\varepsilon). \quad (1.60)$$

En multipliant la première équation de (1.10) par p_w^ε , puis on intègre sur Ω et on obtient :

$$\int_\Omega \Phi^\varepsilon(x) \frac{\partial S^\varepsilon}{\partial t}(x, t) p_w^\varepsilon(x, t) dx - \int_\Omega \operatorname{div}(K^\varepsilon(x) \lambda_w(S^\varepsilon) (\nabla p_w^\varepsilon - \vec{g})) p_w^\varepsilon dx = 0.$$

Ce qui implique que

$$\int_\Omega \Phi^\varepsilon(x) \frac{\partial S^\varepsilon}{\partial t}(x, t) p_w^\varepsilon(x, t) dx + \int_\Omega \nabla p_w^\varepsilon \cdot [K^\varepsilon(x) \lambda_w(S^\varepsilon) (\nabla p_w^\varepsilon - \vec{g})] dx = 0.$$

On obtient alors

$$\int_\Omega \Phi^\varepsilon(x) \frac{\partial S^\varepsilon}{\partial t}(x, t) p_w^\varepsilon(x, t) dx + \int_\Omega K^\varepsilon(x) \lambda_w(S^\varepsilon) \nabla p_w^\varepsilon \cdot \nabla p_w^\varepsilon dx - \int_\Omega K^\varepsilon(x) \lambda_w(S^\varepsilon) \vec{g} \cdot \nabla p_w^\varepsilon dx = 0. \quad (1.61)$$

On multiplie maintenant la deuxième équation de (1.10) par $R_g(p_g^\varepsilon)$, puis on intègre sur Ω et on obtient :

$$\int_\Omega \Phi^\varepsilon(x) \frac{\partial((1 - S^\varepsilon) \rho_g(p_g^\varepsilon))}{\partial t} R_g(p_g^\varepsilon) dx - \int_\Omega \operatorname{div}(K^\varepsilon(x) \lambda_g(S^\varepsilon) \rho_g(p_g^\varepsilon) (\nabla p_g^\varepsilon - \rho_g^\varepsilon \vec{g})) R_g(p_g^\varepsilon) dx = 0.$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \Phi^\varepsilon(x) \frac{\partial((1 - S^\varepsilon) \rho_g(p_g^\varepsilon))}{\partial t} R_g(p_g^\varepsilon) dx + \int_\Omega K^\varepsilon(x) \lambda_g(S^\varepsilon) \rho_g(p_g^\varepsilon) \nabla p_g^\varepsilon \cdot \nabla R_g(p_g^\varepsilon) dx \\ & - \int_\Omega K^\varepsilon(x) \lambda_g(S^\varepsilon) \rho_g(p_g^\varepsilon) \tilde{\rho}_g^\varepsilon \vec{g} \cdot \nabla R_w(p_g^\varepsilon) dx = 0. \end{aligned}$$

et par la relation (1.60), on conclut que :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \Phi^{\varepsilon}(x) \frac{\partial}{\partial t} [(1 - S^{\varepsilon}) \tilde{\rho}_g^{\varepsilon}] R_g(p_g^{\varepsilon}) dx + \int_{\Omega} K^{\varepsilon}(x) \lambda_g(S^{\varepsilon}) \tilde{\rho}_g^{\varepsilon} \nabla P_g^{\varepsilon} \frac{1}{\tilde{\rho}_g^{\varepsilon}} \nabla p_g^{\varepsilon} dx \\ & - \int_{\Omega} K^{\varepsilon}(x) \lambda_g(S^{\varepsilon}) [\tilde{\rho}_g^{\varepsilon}]^2 \vec{g} \cdot \frac{1}{\tilde{\rho}_g^{\varepsilon}} \nabla p_g^{\varepsilon} dx = 0. \end{aligned} \quad (1.62)$$

Puis, on fait la somme de (1.61) et (1.62) et on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \Phi^{\varepsilon}(x) \frac{\partial S^{\varepsilon}}{\partial t}(x, t) p_w^{\varepsilon}(x, t) dx + \int_{\Omega} \Phi^{\varepsilon}(x) \frac{\partial}{\partial t} [(1 - S^{\varepsilon}) \tilde{\rho}_g^{\varepsilon}] R_g(p_g^{\varepsilon}) dx \\ & + \int_{\Omega} K^{\varepsilon}(x) \lambda_w(S^{\varepsilon}) \nabla p_w^{\varepsilon} \cdot \nabla p_w^{\varepsilon} dx + \int_{\Omega} K^{\varepsilon}(x) \lambda_g(S^{\varepsilon}) \tilde{\rho}_g^{\varepsilon} \nabla p_g^{\varepsilon} \cdot \frac{1}{\tilde{\rho}_g^{\varepsilon}} \nabla p_g^{\varepsilon} dx \\ & - \int_{\Omega} K^{\varepsilon}(x) \lambda_w(S^{\varepsilon}) \vec{g} \cdot \nabla p_w^{\varepsilon} dx - \int_{\Omega} K^{\varepsilon}(x) \lambda_g(S^{\varepsilon}) [\tilde{\rho}_g^{\varepsilon}]^2 \vec{g} \cdot \frac{1}{\tilde{\rho}_g^{\varepsilon}} \nabla p_g^{\varepsilon} dx = 0. \end{aligned} \quad (1.63)$$

Nous allons maintenant arranger les deux premiers termes de (1.63). On a

$$\frac{\partial S^{\varepsilon}}{\partial t} p_w^{\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial t} [S^{\varepsilon} p_w^{\varepsilon}] - S^{\varepsilon} \frac{\partial p_w^{\varepsilon}}{\partial t}; \quad (1.64)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [(1 - S^{\varepsilon}) \tilde{\rho}_g^{\varepsilon}] R_g(p_g^{\varepsilon}) = \frac{\partial}{\partial t} [(1 - S^{\varepsilon}) \tilde{\rho}_g^{\varepsilon} R_g(p_g^{\varepsilon})] - (1 - S^{\varepsilon}) \frac{\partial p_g^{\varepsilon}}{\partial t}. \quad (1.65)$$

On a par la définition de la pression capillaire (1.8) que

$$S^{\varepsilon} \frac{\partial p_w^{\varepsilon}}{\partial t} + (1 - S^{\varepsilon}) \frac{\partial p_g^{\varepsilon}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \{S^{\varepsilon} p_w^{\varepsilon} + (1 - S^{\varepsilon}) p_g^{\varepsilon} + F(S^{\varepsilon})\} \quad (1.66)$$

où

$$F(s) = \int_1^s P_c(\xi) d\xi$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} S^{\varepsilon} \frac{\partial p_w^{\varepsilon}}{\partial t} + (1 - S^{\varepsilon}) \frac{\partial p_g^{\varepsilon}}{\partial t} &= S^{\varepsilon} \frac{\partial p_w^{\varepsilon}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} p_g^{\varepsilon} - \frac{\partial S^{\varepsilon}}{\partial t} p_g^{\varepsilon} - S^{\varepsilon} \frac{\partial p_g^{\varepsilon}}{\partial t} + \frac{\partial S^{\varepsilon}}{\partial t} p_g^{\varepsilon} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} [S^{\varepsilon} p_w^{\varepsilon}] - \frac{\partial S^{\varepsilon}}{\partial t} p_w^{\varepsilon} + \frac{\partial}{\partial t} p_g^{\varepsilon} - \frac{\partial}{\partial t} [S^{\varepsilon} p_g^{\varepsilon}] + \frac{\partial S^{\varepsilon}}{\partial t} p_g^{\varepsilon} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} [S^{\varepsilon} p_w^{\varepsilon}] + \frac{\partial}{\partial t} [(1 - S^{\varepsilon}) p_g^{\varepsilon}] + \frac{\partial S^{\varepsilon}}{\partial t} p_g^{\varepsilon} - \frac{\partial S^{\varepsilon}}{\partial t} p_w^{\varepsilon} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} [S^{\varepsilon} p_w^{\varepsilon}] + \frac{\partial}{\partial t} [(1 - S^{\varepsilon}) p_g^{\varepsilon}] + \frac{\partial}{\partial t} F(S^{\varepsilon}) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \{S^{\varepsilon} p_w^{\varepsilon} + (1 - S^{\varepsilon}) p_g^{\varepsilon} + F(S^{\varepsilon})\}. \end{aligned}$$

On déduit à partir des relations (1.64) et (1.65), que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial S^\varepsilon}{\partial t} p_w^\varepsilon + \frac{\partial}{\partial t} [p_g^\varepsilon (1 - S^\varepsilon)] R_g(p_g^\varepsilon) &= \frac{\partial}{\partial t} [S^\varepsilon p_w^\varepsilon] - S^\varepsilon \frac{\partial p_w^\varepsilon}{\partial t} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial t} [(1 - S^\varepsilon) \tilde{\rho}_g^\varepsilon R_g(p_g^\varepsilon)] - (1 - S^\varepsilon) \frac{\partial p_g^\varepsilon}{\partial t} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} [S^\varepsilon P_w^\varepsilon] + \frac{\partial}{\partial t} [(1 - S^\varepsilon) \tilde{\rho}_g^\varepsilon R_g(p_g^\varepsilon)] - \left[S^\varepsilon \frac{\partial p_w^\varepsilon}{\partial t} + (1 - S^\varepsilon) \frac{\partial p_g^\varepsilon}{\partial t} \right]. \end{aligned}$$

Puis, en utilisant la relation (1.66), on peut écrire que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial S^\varepsilon}{\partial t} p_w^\varepsilon + \frac{\partial}{\partial t} [p_g^\varepsilon (1 - S^\varepsilon)] R_g(p_g^\varepsilon) &= \frac{\partial}{\partial t} [S^\varepsilon p_w^\varepsilon] + \frac{\partial}{\partial t} [(1 - S^\varepsilon) \tilde{\rho}_g^\varepsilon R_g(p_g^\varepsilon)] \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial t} \{ S^\varepsilon p_w^\varepsilon + (1 - S^\varepsilon) p_g^\varepsilon + F(S^\varepsilon) \} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} [S^\varepsilon p_w^\varepsilon] + \frac{\partial}{\partial t} [(1 - S^\varepsilon) \tilde{\rho}_g^\varepsilon R_g(p_g^\varepsilon)] - \frac{\partial}{\partial t} [S^\varepsilon p_w^\varepsilon] \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial t} [(1 - S^\varepsilon) p_g^\varepsilon] - \frac{\partial}{\partial t} F(S^\varepsilon) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} [(1 - S^\varepsilon) \tilde{\rho}_g^\varepsilon R_g(p_g^\varepsilon) - (1 - S^\varepsilon) P^\varepsilon - F(S^\varepsilon)]. \end{aligned} \quad (1.67)$$

On obtient alors

$$\frac{\partial S^\varepsilon}{\partial t} p_w^\varepsilon + \frac{\partial}{\partial t} [(1 - S^\varepsilon) p_g^\varepsilon] R_g(p_g^\varepsilon) = \frac{\partial \zeta^\varepsilon}{\partial t}, \quad (1.68)$$

où

$$\zeta^\varepsilon = (1 - S^\varepsilon) \rho_g(p_g^\varepsilon) R_g(p_g^\varepsilon) - (1 - S^\varepsilon) p_g^\varepsilon - F(S^\varepsilon) \quad \text{avec } F(s) = \int_1^s P_c(\xi) d\xi. \quad (1.69)$$

On a le lemme suivant :

Lemme 1.7.1 *La fonction ζ^ε satisfait la condition suivante*

$$\zeta^\varepsilon \geq -P_{\max} \left(1 - \frac{\rho_{\min}}{\rho_{\max}} \right). \quad (1.70)$$

Avec ces nouveaux éléments, nous sommes en mesure de réécrire le problème (1.63) de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Phi^\varepsilon(x) \frac{\partial \zeta^\varepsilon}{\partial t} dx + \int_{\Omega} \{ K^\varepsilon(x) \lambda_w(S^\varepsilon) \nabla p_w^\varepsilon \cdot \nabla p_w^\varepsilon + K^\varepsilon(x) \lambda_g(S^\varepsilon) \nabla p_g^\varepsilon \cdot \nabla p_g^\varepsilon \} dx \\ - \int_{\Omega} \{ K^\varepsilon(x) \lambda_w(S^\varepsilon) \vec{g} \cdot \nabla p_w^\varepsilon + K^\varepsilon(x) \lambda_g(S^\varepsilon) \tilde{\rho}_g^\varepsilon \vec{g} \cdot \nabla p_g^\varepsilon \} dx = 0 \end{aligned} \quad (1.71)$$

puis, en intégrant (1.71) sur l'intervalle $(0, t)$ avec $t \in (0, T)$, on trouve :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Phi^\varepsilon(x) \left(\int_0^t \frac{\partial \zeta^\varepsilon}{\partial t} dt \right) dx + \int_{\Omega_t} \{ K^\varepsilon(x) \lambda_w(S^\varepsilon) \nabla p_w^\varepsilon \cdot \nabla p_w^\varepsilon + K^\varepsilon(x) \lambda_g(S^\varepsilon) \nabla p_g^\varepsilon \cdot \nabla p_g^\varepsilon \} dx d\tau \\ - \int_{\Omega_t} \{ K^\varepsilon(x) \lambda_w(S^\varepsilon) \vec{g} \cdot \nabla p_w^\varepsilon + K^\varepsilon(x) \lambda_g(S^\varepsilon) \tilde{\rho}_g^\varepsilon \vec{g} \cdot \nabla p_g^\varepsilon \} dx d\tau = 0, \end{aligned}$$

où $\Omega_t = \Omega \times [0, t]$. Ce qui veut dire que :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Phi^\varepsilon(x) \zeta^\varepsilon + \int_{\Omega_t} \{ K^\varepsilon(x) \lambda_w(S^\varepsilon) \nabla p_w^\varepsilon \cdot \nabla p_w^\varepsilon + K^\varepsilon(x) \lambda_g(S^\varepsilon) \nabla p_g^\varepsilon \cdot \nabla p_g^\varepsilon \} dx d\tau \\ - \int_{\Omega_t} \{ K^\varepsilon(x) \lambda_w(S^\varepsilon) \vec{g} \cdot \nabla p_w^\varepsilon + K^\varepsilon(x) \lambda_g(S^\varepsilon) \tilde{\rho}_g^\varepsilon \vec{g} \cdot \nabla p_g^\varepsilon \} dx d\tau = \int_{\Omega} \Phi^\varepsilon(x) \zeta^0 dx, \end{aligned} \quad (1.72)$$

où

$$\zeta^0 = (1 - S^0) \rho_g (p_g^0) R_g (p_g^0) - (1 - S^0) p_g^0 - F(S^0). \quad (1.73)$$

Maintenant, on fait une estimation pour chaque terme de (1.72).

- Commençons par le terme

$$\int_{\Omega} \Phi^\varepsilon(x) \zeta^\varepsilon dx.$$

On sait par l'hypothèse **(H.1)** qu'il existe deux constantes positives ϕ_1 et ϕ_2 telles que

$$0 < \phi_1 \leq \Phi(y) \leq \phi_2 < 1, \quad \text{p.p. } y \in Y$$

et on a par le relation (1.70) que

$$\zeta^\varepsilon \geq -P_{\max} \left(1 - \frac{\rho_{\min}}{\rho_{\max}} \right).$$

Alors,

$$\int_{\Omega} \Phi^\varepsilon(x) \zeta^\varepsilon dx \geq -P_{\max} \left(1 - \frac{\rho_{\min}}{\rho_{\max}} \right) \int_{\Omega} \Phi^\varepsilon(x) dx.$$

On a par l'hypothèse **(H.1)**,

$$\int_{\Omega} \Phi^\varepsilon(x) \zeta^\varepsilon dx \geq -\text{mes}(\Omega) \phi_2 P_{\max} \left(1 - \frac{\rho_{\min}}{\rho_{\max}} \right). \quad (1.74)$$

- Regardons maintenant le terme :

$$\int_{\Omega_t} \{ K^\varepsilon(x) \lambda_w(S^\varepsilon) \nabla p_w^\varepsilon \cdot \nabla p_w^\varepsilon + K^\varepsilon(x) \lambda_g(S^\varepsilon) \nabla p_g^\varepsilon \cdot \nabla p_g^\varepsilon \} dx d\tau.$$

Pour obtenir l'estimation de ce dernier, on utilise l'hypothèse **(H.2)**, et l'inégalité de Cauchy. On a :

$$\int_{\Omega_t} K^\varepsilon(x) \lambda_w(S^\varepsilon) \nabla p_w^\varepsilon \cdot \nabla p_w^\varepsilon dx d\tau \geq k_0 \int_{\Omega_t} \lambda_w(S^\varepsilon) |\nabla p_w^\varepsilon|^2 dx d\tau,$$

et

$$\int_{\Omega_t} K^\varepsilon(x) \lambda_g(S^\varepsilon) \nabla p_g^\varepsilon \cdot \nabla p_g^\varepsilon dx d\tau \geq k_0 \int_{\Omega_t} \lambda_g(S^\varepsilon) |\nabla p_g^\varepsilon|^2 dx d\tau.$$

On obtient alors par l'inégalité de Cauchy que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_t} \{ K^\varepsilon(x) \lambda_w(S^\varepsilon) \nabla p_w^\varepsilon \cdot \nabla p_w^\varepsilon + K^\varepsilon(x) \lambda_g(S^\varepsilon) \nabla p_g^\varepsilon \cdot \nabla p_g^\varepsilon \} dx d\tau \\ & - \int_{\Omega_t} \{ K^\varepsilon(x) \lambda_w(S^\varepsilon) \vec{g} \cdot \nabla p_w^\varepsilon + K^\varepsilon(x) \lambda_g(S^\varepsilon) \vec{g} \cdot \rho_g(p_g^\varepsilon) \nabla p_g^\varepsilon \} dx d\tau \\ & \geq -C + \frac{k_0}{2} \int_{\Omega_t} \lambda_w(S^\varepsilon) |\nabla p_w^\varepsilon|^2 dx d\tau + \frac{k_0}{2} \int_{\Omega_t} \lambda_g(S^\varepsilon) |\nabla p_g^\varepsilon|^2 dx d\tau. \end{aligned} \quad (1.75)$$

Il ne nous reste plus qu'à estimer le terme

$$\int_{\Omega} \Phi^\varepsilon(x) \zeta^0 dx.$$

On sait par l'hypothèse **(H.1)** que $0 < \phi_1 \leq \Phi(y) \leq \phi_2 < 1$, et puisque S^ε et P^ε sont solutions faibles du problème, alors on a par le point (i) que $0 \leq S^0, S^1 \leq 1$, de plus, on a par hypothèse que $p_g^0 \in L^2(\Omega)$. On conclut alors qu'il existe une constante C telle que :

$$\left| \int_{\Omega} \Phi^\varepsilon(x) \zeta^0 dx \right| \leq C. \quad (1.76)$$

Finalement, les relations (1.72), (1.74), (1.75) et (1.76) impliquent que

$$\int_{\Omega_T} \lambda_w(S^\varepsilon) |\nabla p_w^\varepsilon|^2 dx d\tau + \int_{\Omega_T} \lambda_g(S^\varepsilon) |\nabla p_g^\varepsilon|^2 dx d\tau \leq C. \quad (1.77)$$

On a alors

$$\int_{\Omega_T} \lambda_w(S^\varepsilon) |\nabla p_w^\varepsilon|^2 dx dt + \int_{\Omega_T} \lambda_g(S^\varepsilon) |\nabla p_g^\varepsilon|^2 dx d\tau \leq C.$$

On a :

$$\lambda_g(S^\varepsilon) |\nabla p_g^\varepsilon|^2 + \lambda_w(S^\varepsilon) |\nabla p_w^\varepsilon|^2 = \lambda(S^\varepsilon) |\nabla P^\varepsilon|^2 + |\nabla A_g(S^\varepsilon)|^2 + |\nabla A_w(S^\varepsilon)|^2,$$

ce qui implique que :

$$\int_{\Omega_T} \lambda(S^\varepsilon) |\nabla P^\varepsilon|^2 dx d\tau + \int_{\Omega_T} |\nabla A_g(S^\varepsilon)|^2 dx d\tau + \int_{\Omega_T} |\nabla A_w(S^\varepsilon)|^2 dx d\tau \leq C$$

et par les définitions de A_g et A_w , on a :

$$|\nabla A_w(S^\varepsilon)|^2 = \lambda_w(S^\varepsilon) |\nabla G_w(S^\varepsilon)|^2 \text{ et } |\nabla A_g(S^\varepsilon)|^2 = \lambda_g(S^\varepsilon) |\nabla G_g(S^\varepsilon)|^2.$$

On obtient

$$\int_{\Omega_T} \lambda(S^\varepsilon) |\nabla P^\varepsilon|^2 dx dt + \int_{\Omega_T} \lambda_w(S^\varepsilon) |\nabla G_w(S^\varepsilon)|^2 dx dt + \int_{\Omega_T} \lambda_g(S^\varepsilon) |\nabla G_g(S^\varepsilon)|^2 dx dt \leq C \quad (1.78)$$

de plus, on a par l'hypothèse **(H.5)** qu'il existe une constante $L_0 > 0$ telle que $\lambda(S^\varepsilon) \geq L_0 > 0$ ce qui implique que :

$$L_0 \int_{\Omega_T} |\nabla P^\varepsilon|^2 dx dt \leq \int_{\Omega_T} \lambda(S^\varepsilon) |\nabla P^\varepsilon|^2 dx dt.$$

Finalement, on a l'estimation suivante de ∇P^ε :

$$\int_{\Omega_T} |\nabla P^\varepsilon|^2 dx dt \leq C. \quad (1.79)$$

Nous allons maintenant obtenir une estimation pour la fonction $|\nabla \beta(S^\varepsilon)|$. Par la condition **(H.5)**, (2.66) et (1.78), on a :

$$\int_{\Omega_T} \alpha^2(S^\varepsilon) |\nabla S^\varepsilon|^2 dx dt = \int_{\Omega_T} \lambda_w^2(S^\varepsilon) |\nabla G_w(S^\varepsilon)|^2 dx dt \leq \int_{\Omega_T} \lambda_w(S^\varepsilon) |\nabla G_w(S^\varepsilon)|^2 dx dt \leq C.$$

Alors, on a :

$$\int_{\Omega_T} \alpha^2(S^\varepsilon) |\nabla S^\varepsilon|^2 dx dt = \int_{\Omega_T} |\nabla \beta(S^\varepsilon)|^2 dx dt \leq C. \quad (1.80)$$

1.8 Résultats de compacité pour les suites $\{S^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$, $\{\Theta^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$.

On commence cette section par le lemme de compacité suivant :

Lemme 1.8.1 *Soit la fonction $\Phi = \Phi(y)$ une fonction Y -périodique, $\Phi \in L^\infty(Y)$, et il existe deux constantes positives ϕ_1 et ϕ_2 telles que :*

$$0 < \phi_1 \leq \Phi(y) \leq \phi_2 < 1 \quad \text{dans } Y$$

et soit $\{v_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ une famille de fonctions qui satisfait les propriétés suivantes :

1- La fonction v_ε est uniformément bornée dans l'espace $L^\infty(\Omega_T)$, i.e.,

$$0 \leq v_\varepsilon \leq C. \quad (1.81)$$

2- Il existe une fonction ϖ telle que $\varpi(\xi) \rightarrow 0$ quand $\xi \rightarrow 0$, et telle que l'inégalité suivante est satisfaite :

$$\int_{\Omega_T} |v_\varepsilon(x + \Delta x, \tau) - v_\varepsilon(x, \tau)|^2 dx d\tau \leq C \varpi(|\Delta x|). \quad (1.82)$$

3- La fonction v_ε est telle que :

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} (\Phi^\varepsilon v^\varepsilon) \right\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq C. \quad (1.83)$$

Alors, la famille $\{v^\varepsilon\}_\varepsilon$ forme un ensemble compact dans $L^2(\Omega_T)$.

Compacité de S^ε .

Pour l'étude de la compacité de S^ε , nous allons appliquer directement le Lemme 1.8.1.

1. Prouver que S^ε est uniformément bornée dans $L^\infty(\Omega_T)$.

On a par hypothèse que $0 \leq S^\varepsilon \leq 1$, ce qui veut dire que S^ε est uniformément bornée dans $L^\infty(\Omega_T)$. D'où le point 1.

2. Prouver qu'il existe une fonction ϖ telle que $\varpi(\xi) \rightarrow 0$ quand $\xi \rightarrow 0$ et l'égalité suivante est satisfaite

$$\int_{\Omega_T} |S^\varepsilon(x + \Delta x, t) - S^\varepsilon(x, t)|^2 dx dt \leq C \varpi(|\Delta x|)$$

Si $x + \Delta x \notin \Omega$, alors on pose $S(x + \Delta x, t) = 0$. On a :

$$\int_{\Omega_T} |S^\varepsilon(x + \Delta x, t) - S^\varepsilon(x, t)|^2 dx dt = \int_{\Omega_T} |\beta^{-1}[\beta(S^\varepsilon(x + \Delta x, t))] - \beta^{-1}[\beta(S^\varepsilon(x, t))]|^2 dx dt.$$

Par (H.7), la fonction β^{-1} est θ Hölderienne. Alors, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_T} |S^\varepsilon(x + \Delta x, t) - S^\varepsilon(x, t)|^2 dx dt &\leq \int_{\Omega_T} |\beta(S^\varepsilon(x + \Delta x, t)) - \beta(S^\varepsilon(x, t))|^{2\theta} dx dt \\ &\leq C |\Delta x|^{2\theta} \int_{\Omega_T} |\nabla \beta(S^\varepsilon)|^{2\theta} dx dt \leq C |\Delta x|^{2\theta}. \end{aligned}$$

3. Prouver que la fonction S^ε est telle que

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} (\Phi^\varepsilon S^\varepsilon) \right\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq C.$$

Il s'agit de l'estimation de la dérivée en temps de S^ε . Considérons l'équation (1.25)

$$\Phi^\varepsilon \frac{\partial S^\varepsilon}{\partial t} - \operatorname{div} (K^\varepsilon(x) (\lambda_w(S^\varepsilon) \nabla P^\varepsilon + \alpha(S^\varepsilon) \nabla S^\varepsilon - \lambda_w(S^\varepsilon) \vec{g})) = 0 \quad \text{sur } \Omega_T. \quad (1.84)$$

En multipliant l'équation (1.84) par $\varphi_w \in \mathcal{D}(\Omega_T)$, et en intégrant par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega_T} \Phi^\varepsilon(x) S^\varepsilon \frac{\partial \varphi_w}{\partial t} dx dt &= \int_{\Omega_T} K^\varepsilon(x) \lambda_w(S^\varepsilon) \nabla P^\varepsilon \cdot \nabla \varphi_w dx dt + \int_{\Omega_T} K^\varepsilon(x) \nabla \beta^\varepsilon \cdot \nabla \varphi_w dx dx \\ - \int_{\Omega_T} K^\varepsilon(x) \lambda_w(S^\varepsilon) \vec{g} \cdot \nabla \varphi_w dx dt & \end{aligned} \quad (1.85)$$

On déduit par l'inégalité de Cauchy, l'hypothèse **(H.5)** que

$$\left| \int_{\Omega_T} \Phi^\varepsilon(x) S^\varepsilon \frac{\partial \varphi_w}{\partial t} dx dt \right| \leq C \left(1 + \|\nabla P^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_T)} + \|\nabla \beta^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_T)} \right) \|\nabla \varphi_w\|_{L^2(\Omega_T)}. \quad (1.86)$$

On sait que $\|\nabla \beta^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_T)} \leq C$, et on a par l'estimation (1.79) que $\|\nabla P^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_T)} \leq C$; ce qui implique que

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} (\Phi^\varepsilon S^\varepsilon) \right\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq C \quad (1.87)$$

d'où le point 3.

On conclut par le lemme de compacité, que la famille $\{S^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ est compacte dans $L^2(\Omega_T)$.

En conséquence de la bornitude uniforme de $\{S^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ dans L^∞ , on a le corollaire suivant :

Corollaire 1.8.1 *La famille $\{S^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ est un ensemble compact dans l'espace $L^q(\Omega_T)$ pour tout $q \in [1, +\infty)$.*

Compacité de Θ^ε .

On rappelle que :

$$\Theta^\varepsilon = \Theta^\varepsilon(S^\varepsilon, P^\varepsilon) = (1 - S^\varepsilon) \rho_g(P^\varepsilon + G_g(S^\varepsilon))$$

si $x + \Delta x \notin \Omega$, on pose $\Theta^\varepsilon(x + \Delta x, t) = 0$.

1- Prouver que Θ^ε est uniformément bornée dans $L^\infty(\Omega_T)$.

On déduit de la définition de ρ_g donnée par (2.25) que

$$0 \leq \Theta^\varepsilon \leq \rho_{\max} < +\infty$$

d'où le point 1.

2- Prouver qu'il existe une fonction ϖ telle que $\varpi(\xi) \rightarrow 0$ quand $\xi \rightarrow 0$ et l'égalité suivante est satisfaite

$$\int_{\Omega_T} |\Theta^\varepsilon(x + \Delta x, t) - \Theta^\varepsilon(x, t)|^2 dx dt \leq C \varpi(|\Delta x|).$$

On note

$$J_1 + J_2 =$$

$$\left[(1 - S^\varepsilon)(x + \Delta x, t) \rho_g(P^\varepsilon(x + \Delta x, t)) + G(S^\varepsilon(x + \Delta x, t)) - (1 - S)^\varepsilon(x, t) \rho_g(P^\varepsilon(x + \Delta x, t)) + G(x, t) \right]$$

$$+ \left[(1 - S^\varepsilon(x, t)) \rho_g(P^\varepsilon(x + \Delta x, t) + G(x, t)) + (1 - S^\varepsilon)(x) \rho_g(P^\varepsilon(x, t) + G(x, t)) \right].$$

Après quelques calculs, on obtient le point 2.

3. Prouver que la fonction Θ^ε est telle que

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} (\Phi^\varepsilon \Theta^\varepsilon) \right\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))} \leq C.$$

On procède de la même manière que l'on a suivi pour montrer (1.87).

1.9 Passage à la limite dans (1.38)-(1.39)

Dans cette section, nous allons utiliser les estimations *a priori* de la section précédente, pour obtenir deux résultats de compacité, puis, nous passerons à la limite dans les équations du système (1.38)-(1.39).

Suite de la preuve du Théorème 1.6.3

1. On a par le Corollaire (1.8.1) que la famille $\{S^\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ est un ensemble compact de $L^2(\Omega_T)$, d'où la convergence forte de $\{S^\varepsilon\}_\varepsilon$ dans cet espace. La limite de cette suite est notée par S .

2. Cette convergence est une conséquence de (1.79).

3. Puisque $\{P^\varepsilon\}$ (resp. $\{\nabla P^\varepsilon\}$) est une suite bornée dans $L^2(\Omega_T)$ (resp. dans $[L^2(\Omega_T)]^d$), alors elle converge à deux échelles vers une limite $P_0(t, x, y) \in L^2(\Omega_T \times Y)$ (resp. $\chi_0(t, x, y) \in [L^2(\Omega_T \times Y)]^d$).

Donc, pour tout $\psi(t, x, y) \in \mathcal{D}[\Omega_T; \mathcal{C}_\#^\infty(Y)]$, et pour tout $\Psi(t, x, y) \in \mathcal{D}[\Omega_T; \mathcal{C}_\#^\infty(Y)]^d$, on a :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_T} P^\varepsilon \left(x, t, \frac{x}{\varepsilon} \right) \psi(x, t) dx dt = \int_{\Omega_T} \int_Y P_0(t, x, y) \psi(x, t, y) dx dy dt;$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_T} \nabla P^\varepsilon \left(x, t, \frac{x}{\varepsilon} \right) \cdot \Psi(x, t) dx dt = \int_{\Omega_T} \int_Y \chi_0(x, t, y) \cdot \Psi(x, t, y) dx dy dt.$$
(1.88)

On a par intégration par parties que :

$$\varepsilon \int_{\Omega_T} \nabla P^\varepsilon(x, t) \cdot \Psi(x, t, \frac{x}{\varepsilon}) dx = - \int_{\Omega_T} P^\varepsilon(x, t) \left[\operatorname{div}_y \Psi \left(x, t, \frac{x}{\varepsilon} \right) + \varepsilon \operatorname{div}_x \Psi \left(x, t, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right] dx dt.$$

Alors, en passant à la limite dans l'équation (2.91), on obtient :

$$0 = - \int_{\Omega_T} \int_Y P_0(x, t, y) \operatorname{div}_y \Psi(x, t, y) dt dx dy$$

ce qui signifie que $P_0(x, t, y)$ ne dépend pas de y . On en déduit que P^ε converge à deux échelles vers P .

Maintenant, dans la relation (2.91), on choisit une fonction Ψ telle que $\operatorname{div}_y \Psi(t, x, y) = 0$. On obtient donc par l'intégration par parties que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_T} P^\varepsilon(x, t) \operatorname{div}_x \Psi \left(x, t, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx dt = - \int_{\Omega_T} \int_Y \chi_0(x, t, y) \cdot \Psi(t, x, y) dx dt dy$$

$$= \int_{\Omega_T} \int_Y P(x, t, y) \cdot \operatorname{div}_x \Psi(x, t, y) dt dx dy$$

Donc, pour toute fonction $\Psi \in \mathcal{D} \left[\Omega_T; \mathcal{C}_{\#}^{\infty}(Y) \right]^d$, avec $\operatorname{div}_y \Psi(x, t, y) = 0$, on a

$$\int_{\Omega_T} \int_Y [\chi_0(x, t, y) \cdot \nabla_y P(x, t)] \cdot \Psi(x, t, y) dx dy dt = 0 \quad (1.89)$$

on rappelle que l'orthogonale des fonctions à divergence nulle est exactement leurs gradients. On en déduit donc qu'il existe une fonction unique $w_p(t, x, y) \in L^2 \left[\Omega_T; H^1(Y)/\mathbb{R} \right]$ telle que

$$\chi_0(x, t, y) = \nabla P(x, t) + \nabla_y w_p(x, t, y)$$

4. Prouver que

$$\beta^\varepsilon \longrightarrow \beta \quad \text{fortement dans } L^q(\Omega_T) \quad \text{pour tout } 1 \leq q < +\infty.$$

Puisque la fonction β est continue, et que par (1.53) la fonction S^ε converge fortement vers $S(x, t)$ dans $L^q(\Omega_T)$, on en déduit que $\beta^\varepsilon \longrightarrow \beta$ fortement dans $L^q(\Omega_T)$.

5. Prouver que

$$\nabla \beta^\varepsilon(x, t) \stackrel{2s}{\rightharpoonup} \nabla \beta(x, t) + \nabla_y w_s(t, x, y).$$

On prouve ce point exactement de la même manière que le point 3.

6. Prouver que

$$\Theta^\varepsilon \longrightarrow (1 - S) \widetilde{\rho}_g^H \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega_T).$$

On a pour tout $v \in L^\infty(\Omega_T)$

$$\left((1 - S^\varepsilon) \rho_g (P^\varepsilon + G_g(S^\varepsilon)) - (1 - S^\varepsilon) \rho_g (v + G_g(S^\varepsilon)), P^\varepsilon - v \right)_{L^2(\Omega_T)} \geq 0.$$

On note par $\overline{\Theta}_{\varepsilon > 0}$ la limite de $\{\Theta^\varepsilon\}$. En passant à la limite, quand $\varepsilon \rightarrow 0$, dans la dernière inégalité, on obtient :

$$\left((\overline{\Theta} - (1 - S) \rho_g (v + G_g(S))), (P - v) \right)_{L^2(\Omega_T)} \geq 0.$$

En choisissant $v = P + \delta v_1$ tel que δ tend vers 0, on obtient :

$$(\overline{\Theta} - (1 - S) \rho_g (P + G_g(S)), v_1)_{L^2(\Omega_T)} \geq 0$$

pour tout $v_1 \in L^2(\Omega_T)$. D'où la relation (1.58).

1.9.1 Passage à la limite dans (1.38)

On a prouvé que $P^\varepsilon(x, t)$ converge à deux-échelles vers $P(x, t)$ dans $L^2(\Omega_T)$ et que $\nabla P^\varepsilon(x, t)$ converge à deux-échelles vers $\nabla P(x, t) + \nabla_y w_p(x, t, y)$. On en déduit que le comportement de P^ε approche le comportement de $P(x, t) + \varepsilon w_p(x, t, y)$.

On définit une fonction qui a le même comportement que $S^\varepsilon(x, t)$ par :

$$\varphi_w \left(x, \frac{x}{\varepsilon}, t \right) = \varphi(x, t) + \varepsilon \zeta \left(x, t, \frac{x}{\varepsilon} \right) = \varphi(x, t) + \varepsilon \zeta_1(x, t) \zeta_2 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right), \quad (1.90)$$

où $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_T)$, $\zeta_1 \in \mathcal{D}(\Omega_T)$ et $\zeta_2 \in \mathcal{C}_{\#}^{\infty}(Y)$, et on injecte cette fonction test dans l'équation (1.38). On obtient alors :

$$- \int_{\Omega_T} \Phi^\varepsilon(x) S^\varepsilon \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial \zeta^\varepsilon}{\partial t} \right] dx dt \quad (1.91)$$

$$+ \int_{\Omega_T} K^\varepsilon(x) \{ \lambda_w(S^\varepsilon) \nabla P^\varepsilon + \nabla \beta^\varepsilon - \lambda_w(S^\varepsilon) \vec{g} \} \cdot [\nabla \varphi + \varepsilon \nabla_x \zeta^\varepsilon + \nabla_y \zeta^\varepsilon] dx dt = 0$$

Puis, en passant à la limite à deux-échelles quand $\varepsilon \rightarrow 0$, on obtient :

$$- \int_{\Omega_T \times Y} \Phi(y) S(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial t} dy dx dt \quad (1.92)$$

$$+ \int_{\Omega_T \times Y} K(y) \{ \lambda_w(S) [\nabla P + \nabla_y w_p] + [\nabla \beta + \nabla_y w_g] - \lambda_w(S) \vec{g} \} \cdot [\nabla \varphi + \zeta_1 \nabla_y \zeta_2] dy dx dt = 0$$

1.9.2 Passage à la limite dans (1.39) :

On définit la fonction test

$$\varphi_g(x, \frac{x}{\varepsilon}, t) = \varphi(x, t) + \varepsilon \zeta \left(x, \frac{x}{\varepsilon}, t \right) = \varphi(x, t) + \varepsilon \zeta_1(x, t) \zeta_2 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \quad (1.93)$$

où $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_T)$, $\zeta_1 \in \mathcal{D}(\Omega_T)$ et $\zeta_2 \in \mathcal{C}_\#^\infty(Y)$, on injecte φ_g dans (1.39), et on obtient :

$$- \int_{\Omega_T} \Phi^\varepsilon(x) \Theta^\varepsilon \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial \zeta^\varepsilon}{\partial t} \right] dx dt$$

$$+ \int_{\Omega_T} K^\varepsilon(x) \tilde{\rho}_g^\varepsilon \{ \lambda_g(S^\varepsilon) \nabla P^\varepsilon - \nabla \beta^\varepsilon - \tilde{\rho}_g^\varepsilon \lambda_g(S^\varepsilon) \vec{g} \} \cdot [\nabla \varphi + \varepsilon \nabla_x \zeta^x + \nabla_y \zeta^x] dx dt = 0. \quad (1.94)$$

Puis, en passant à la limite à deux-échelles dans (1.94), et en utilisant le fait que la relation (1.58) implique que $\tilde{\rho}_g^\varepsilon \lambda_g(S^\varepsilon) \rightarrow \tilde{\rho}_g^H \lambda_g(S)$, on obtient :

$$- \int_{\Omega_T \times Y} \Phi(y) (1 - S) \tilde{\rho}_g^H \frac{\partial \varphi_g}{\partial t} dy dx dt$$

$$+ \int_{\Omega_T \times Y} K(y) \tilde{\rho}_g^H \left\{ \lambda_g(S) [\nabla P + \nabla_y w_p] - [\nabla \beta + \nabla_y w_s] - \lambda_g(S) \tilde{\rho}_g^H \vec{g} \right\} \cdot [\nabla \varphi + \zeta_1 \nabla_y \zeta_2] dy dx dt = 0 \quad (1.95)$$

1.9.3 Équations de w_p et w_s

Considérons, en premier, l'équation (1.92). En choisissant $\varphi = 0$ on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_Y K(y) \lambda_w(S) [\nabla P + \nabla_y w_p] \cdot \nabla_y \zeta_2 dy + \int_Y K(y) [\nabla \beta + \nabla_y w_s] \cdot \nabla_y \zeta_2 dy - \\ & - \int_Y K(y) \lambda_w(S) \vec{g} \cdot \nabla_y \zeta_2 dy = 0. \end{aligned} \quad (1.96)$$

Par cette équation, on trouve :

$$\begin{aligned} & - \int_Y \operatorname{div}_y (K(y) \lambda_w(S) \nabla_y w_p) \zeta_2 dy - \int_Y \operatorname{div}_y (K(y) \nabla_y w_s) \zeta_2 dy \\ & = \int_Y \operatorname{div}_y (K(y) \lambda_w(S) \nabla P) \zeta_2 dy + \int_Y \operatorname{div}_y (K(y) \nabla \beta) \zeta_2 dy - \int_Y \operatorname{div}_y (K(y) \lambda_w(S) \vec{g}) \zeta_2 dy. \end{aligned}$$

L'équation suivante, est la première équation du problème local :

$$\operatorname{div}_y (K(y)\lambda_w(S)\nabla_y w_p) + \operatorname{div}_y (K(y)\nabla_y w_s) = \mathbf{F}_w^C, \quad (1.97)$$

où \mathbf{F}_w^C ne dépend pas de w_p, w_s et elle est donnée par :

$$\mathbf{F}_w^C \stackrel{\text{def}}{=} -\operatorname{div}_y (K(y)\lambda_w(S)\nabla P + K(y)\nabla\beta - K(y)\lambda_w(S)\vec{g}). \quad (1.98)$$

Considérons maintenant, l'équation (1.95). En choisissant $\varphi = 0$, on a :

$$\begin{aligned} & \int_Y K(y)\lambda_g(S)\varrho_g(P + G_g(S))[\nabla P + \nabla_y w_p] \cdot \nabla_y \zeta_2 \, dy - \\ & - \int_Y K(y)\varrho_g(P + G_g(S))[\nabla\beta + \nabla_y w_s] \cdot \nabla_y \zeta_2 \, dy - \int_Y K(y)\lambda_g(S)[\varrho_g(P + G_g(S))]^2 \vec{g} \cdot \nabla_y \zeta_2 \, dy = 0. \end{aligned} \quad (1.99)$$

On trouve par cette équation :

$$\begin{aligned} & - \int_Y \operatorname{div}_y \left(K(y)\lambda_g(S)\varrho_g(P + G_g(S))[\nabla P + \nabla_y w_p] \right) \zeta_2 \, dy + \\ & + \int_Y \operatorname{div}_y \left(K(y)\varrho_g(P + G_g(S))[\nabla\beta + \nabla_y w_s] \right) \zeta_2 \, dy + \\ & + \int_Y \operatorname{div}_y \left(K(y)\lambda_g(S)[\varrho_g(P + G_g(S))]^2 \vec{g} \right) \zeta_2 \, dy = 0. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} & - \int_Y \operatorname{div}_y \left(K(y)\lambda_g(S)\varrho_g^H \nabla_y w_p \right) \zeta_2 \, dy + \int_Y \operatorname{div}_y \left(K(y)\varrho_g^H \nabla_y w_s \right) \zeta_2 \, dy = \\ & = \int_Y \operatorname{div}_y \left(K(y)\lambda_g(S)\varrho_g^H \nabla_y P \right) \zeta_2 \, dy - \int_Y \operatorname{div}_y \left(K(y)\varrho_g^H \nabla_y \beta \right) \zeta_2 \, dy - \\ & - \int_Y \operatorname{div}_y \left(K(y)\lambda_g(S)[\varrho_g^H]^2 \vec{g} \right) \zeta_2 \, dy, \end{aligned} \quad (1.100)$$

où

$$\varrho_g^H \stackrel{\text{def}}{=} \varrho_g(P + G_g(S)). \quad (1.101)$$

Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} & -\operatorname{div}_y (K(y)\lambda_g(S)\varrho_g^H \nabla_y w_p) + \operatorname{div}_y (K(y)\varrho_g^H \nabla_y w_s) = \\ & = \operatorname{div}_y (K(y)\lambda_g(S)\varrho_g^H \nabla P) - \operatorname{div}_y (K(y)\varrho_g^H \alpha(S)\nabla S) - \operatorname{div}_y \left(K(y)\lambda_g(S)[\varrho_g^H]^2 \vec{g} \right). \end{aligned}$$

On réécrit cette équation de la manière suivante :

$$\operatorname{div}_y (K(y)\lambda_g(S)\varrho_g^H \nabla_y w_p) - \operatorname{div}_y (K(y)\varrho_g^H \nabla_y w_s) = \mathbf{F}_g^C, \quad (1.102)$$

où \mathbf{F}_g^C ne dépend pas de w_p, w_s et, elle est donnée par :

$$\mathbf{F}_g^C \stackrel{\text{def}}{=} -\operatorname{div}_y \left(K(y)\lambda_g(S)\varrho_g^H \nabla P - K(y)\varrho_g^H \nabla\beta - K(y)\lambda_g(S)[\varrho_g^H]^2 \vec{g} \right). \quad (1.103)$$

Les équations (1.97) et (1.102) donnent le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \operatorname{div}_y (K(y)\lambda_w(S)\nabla_y w_p) + \operatorname{div}_y (K(y)\nabla_y w_s) = \mathbf{F}_w^C & \text{dans } \Omega_T \times Y; \\ \operatorname{div}_y (K(y)\lambda_g(S)\varrho_g^H \nabla_y w_p) - \operatorname{div}_y (K(y)\varrho_g^H \nabla_y w_s) = \mathbf{F}_g^C & \text{dans } \Omega_T \times Y, \end{cases} \quad (1.104)$$

Maintenant, on découple le système (1.104). Pour cela, on introduit la notation :

$$\mathbf{X} = \operatorname{div}_y (K(y)\nabla_y \mathbf{w}_p) \quad \text{et} \quad \mathbf{Y} = \operatorname{div}_y (K(y)\nabla_y \mathbf{w}_s).$$

Alors, on a par (1.104) :

$$\begin{cases} \lambda_w(S) \mathbf{X} + \mathbf{Y} = \mathbf{F}_w^C; \\ \lambda_g(S) \varrho_g^H \mathbf{X} - \varrho_g^H \mathbf{Y} = \mathbf{F}_g^C. \end{cases} \quad (1.105)$$

Les déterminants de (1.105) sont donnés par :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_w(S) & 1 \\ \lambda_g(S) \varrho_g^H & -\varrho_g^H \end{vmatrix} = -(\lambda_w(S) \varrho_g^H + \lambda_g(S) \varrho_g^H) = -\varrho_g^H \lambda(S) \neq 0; \quad (1.106)$$

$$\Delta_{\mathbf{X}} = \begin{vmatrix} \mathbf{F}_w^C & 1 \\ \mathbf{F}_g^C & -\varrho_g^H \end{vmatrix} = -(\varrho_g^H \mathbf{F}_w^C + \mathbf{F}_g^C); \quad (1.107)$$

$$\Delta_{\mathbf{Y}} = \begin{vmatrix} \lambda_w(S) & \mathbf{F}_w^C \\ \lambda_g(S) \varrho_g^H & \mathbf{F}_g^C \end{vmatrix} = \lambda_w(S) \mathbf{F}_g^C - \lambda_g(S) \varrho_g^H \mathbf{F}_w^C. \quad (1.108)$$

Calculons $\Delta_{\mathbf{X}}$, $\Delta_{\mathbf{Y}}$ explicitement. On a :

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbf{X}} &= -(\varrho_g^H \mathbf{F}_w^C + \mathbf{F}_g^C) = -\left(-\varrho_g^H \operatorname{div}_y \left(K(y)\lambda_w(S)\nabla P + K(y)\nabla\beta - K(y)\lambda_w(S)\vec{g}\right) - \right. \\ &\quad \left. -\operatorname{div}_y \left(K(y)\lambda_g(S)\varrho_g^H\nabla P - K(y)\varrho_g^H\nabla\beta - K(y)\lambda_g(S)[\varrho_g^H]^2\vec{g}\right)\right) = \\ &= \left(\varrho_g^H \operatorname{div}_y \left(K(y)\lambda_w(S)\nabla P + K(y)\nabla\beta - K(y)\lambda_w(S)\vec{g}\right) + \right. \\ &\quad \left. +\operatorname{div}_y \left(K(y)\lambda_g(S)\varrho_g^H\nabla P - K(y)\varrho_g^H\nabla\beta - K(y)\lambda_g(S)[\varrho_g^H]^2\vec{g}\right)\right) = \\ &= \varrho_g^H \lambda(S) \operatorname{div}_y (K(y)\nabla P) - \left(\varrho_g^H \lambda_w(S) + [\varrho_g^H]^2 \lambda_g(S)\right) \operatorname{div}_y (K(y)\vec{g}). \end{aligned} \quad (1.109)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbf{Y}} &= \lambda_w(S) \mathbf{F}_g^C - \lambda_g(S) \varrho_g^H \mathbf{F}_w^C = \\ &= -\lambda_w(S) \operatorname{div}_y \left(K(y)\lambda_g(S)\varrho_g^H\nabla P - K(y)\varrho_g^H\nabla\beta - K(y)\lambda_g(S)[\varrho_g^H]^2\vec{g}\right) + \\ &\quad +\lambda_g(S)\varrho_g^H \operatorname{div}_y \left(K(y)\lambda_w(S)\nabla P + K(y)\nabla\beta - K(y)\lambda_w(S)\vec{g}\right) = \\ &= \varrho_g^H \lambda(S) \operatorname{div}_y (K(y)\nabla\beta) + \left(\lambda_w(S)\lambda_g(S)[\varrho_g^H]^2 - \lambda_w(S)\lambda_g(S)\varrho_g^H\right) \operatorname{div}_y (K(y)\vec{g}). \end{aligned} \quad (1.110)$$

Alors, il vient de (1.106), (1.107) que

$$\mathbf{X} = \frac{\Delta_{\mathbf{X}}}{\Delta} = -\operatorname{div}_y (K(y)\nabla P) + \frac{\lambda_w(S) + \varrho_g^H \lambda_g(S)}{\lambda(S)} \operatorname{div}_y (K(y)\vec{g}). \quad (1.111)$$

De la même manière que pour (1.106), (1.108) on a :

$$\mathbf{Y} = \frac{\Delta_{\mathbf{Y}}}{\Delta} = -\operatorname{div}_y (K(y)\nabla\beta) - \frac{\lambda_w(S)\lambda_g(S)}{\lambda(S)} (\varrho_g^H - 1) \operatorname{div}_y (K(y)\vec{g}). \quad (1.112)$$

Donc, par (1.104) et (1.111), (1.112) on trouve finalement deux équations pour les fonctions w_p, w_s :

$$\operatorname{div}_y \left(K(y) (\nabla P + \nabla_y w_p) \right) = \frac{\lambda_w(S) + \varrho_g^H \lambda_g(S)}{\lambda(S)} \operatorname{div}_y (K(y) \vec{g}) \quad \text{dans } \Omega_T \times Y; \quad (1.113)$$

$$\operatorname{div}_y \left(K(y) (\nabla \beta + \nabla_y w_s) \right) = -\frac{\lambda_w(S) \lambda_g(S)}{\lambda(S)} (\varrho_g^H - 1) \operatorname{div}_y (K(y) \vec{g}) \quad \text{dans } \Omega_T \times Y. \quad (1.114)$$

Les équations (1.113), (1.114) représentent les fonctions w_p, w_s de la manière suivante :

$$w_p = \sum_{j=1}^d \xi_j(y) \frac{\partial P}{\partial x_j}(x, t) + f_p \quad \text{et} \quad w_s = \sum_{j=1}^d \xi_j(y) \frac{\partial \beta}{\partial x_j}(x, t) + f_s, \quad (1.115)$$

où la fonction ξ_j est une solution Y -périodique de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_y \left(K(y) [\nabla_y \xi_j + \vec{e}_j] \right) = 0 & \text{dans } Y; \\ y \mapsto \xi_j(y) & Y\text{-périodique} \end{cases} \quad (1.116)$$

avec \vec{e}_j la j -ème composante du vecteur unité. Les fonctions $f_p = f_p(y, S, P), f_s = f_s(y, S, P)$ sont alors les solutions des équations suivantes :

$$\begin{cases} \operatorname{div}_y (K(y) \nabla_y f_p) = \frac{\lambda_w(S) + \varrho_g^H \lambda_g(S)}{\lambda(S)} \operatorname{div}_y (K(y) \vec{g}) & \text{dans } \Omega_T \times Y; \\ y \mapsto f_p(y, S, P) & Y\text{-périodique;} \end{cases} \quad (1.117)$$

et

$$\begin{cases} \operatorname{div}_y (K(y) \nabla_y f_s) = -\frac{\lambda_w(S) \lambda_g(S)}{\lambda(S)} (\varrho_g^H - 1) \operatorname{div}_y (K(y) \vec{g}) & \text{dans } \Omega_T \times Y; \\ y \mapsto f_s(y, S, P) & Y\text{-périodique.} \end{cases} \quad (1.118)$$

Équations homogénéisées (équations pour les fonctions S, P). Considérons, en premier, l'équation (1.92). En choisissant $\zeta_2 = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega_T} \int_Y \Phi(y) S(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial t} dy dx dt + \int_{\Omega_T} \int_Y K(y) \lambda_w(S) [\nabla P + \nabla_y w_p] \cdot \nabla \varphi dy dx dt + \\ & + \int_{\Omega_T} \int_Y K(y) [\nabla \beta + \nabla_y w_s] \cdot \nabla \varphi dy dx dt - \int_{\Omega_T} \int_Y K(y) \lambda_w(S) \vec{g} \cdot \nabla \varphi dy dx dt = 0. \end{aligned} \quad (1.119)$$

La relation (1.119) nous donne l'équation homogénéisée suivante :

$$\begin{aligned} & \langle \Phi \rangle \frac{\partial S}{\partial t} - \operatorname{div}_x \left\{ \lambda_w(S) \int_Y K(y) [\nabla P + \nabla_y w_p] dy \right\} - \\ & - \operatorname{div}_x \left\{ \int_Y K(y) [\nabla \beta + \nabla_y w_s] dy \right\} + \operatorname{div}_x \left\{ \lambda_w(S) \int_Y K(y) \vec{g} dy \right\} = 0, \end{aligned} \quad (1.120)$$

où $\langle \cdot \rangle$ note la valeur moyenne des fonctions correspondantes, sur la cellule Y .

Réarrangeons le deuxième et le troisième terme de (1.120). Pour cela, on utilise le tenseur homogénéisé \mathbb{K}^* , où les \mathbb{K}_{ij}^* , $1 \leq i, j \leq d$ sont définis par :

$$\mathbb{K}_{ij}^* \stackrel{\text{def}}{=} \int_Y K(y) [\nabla_y \xi_i + \vec{e}_i] [\nabla_y \xi_j + \vec{e}_j] dy. \quad (1.121)$$

Pour l'intégrale du second terme de (1.120), on a :

$$\int_Y K(y) [\nabla P + \nabla_y w_p] dy = \mathbb{K}^* \nabla P + \langle K \nabla_y f_p \rangle.$$

Donc, le second terme de (1.120), s'écrit :

$$\operatorname{div}_x \left\{ \lambda_w(S) \int_Y K(y) [\nabla P + \nabla_y w_p] dy \right\} = \operatorname{div}_x \left(\lambda_w(S) \mathbb{K}^* \nabla P \right) + \operatorname{div}_x \left(\lambda_w(S) \langle K \nabla_y f_p \rangle \right). \quad (1.122)$$

D'une manière similaire, pour le troisième terme de (1.120), on a :

$$\operatorname{div}_x \left\{ \int_Y K(y) [\nabla \beta + \nabla_y w_s] dy \right\} = \operatorname{div}_x \left(\mathbb{K}^* \nabla \beta \right) + \operatorname{div}_x \left(\langle K \nabla_y f_s \rangle \right). \quad (1.123)$$

Finalement, le quatrième terme de (1.120) s'écrit sous la forme :

$$\operatorname{div}_x \left\{ \lambda_w(S) \int_Y K(y) \vec{g} dy \right\} = \operatorname{div}_x \left(\lambda_w(S) \langle K \vec{g} \rangle \right). \quad (1.124)$$

Maintenant, en prenant en compte (1.122)–(1.124), on obtient par l'équation (1.120), l'équation homogénéisée de la phase eau :

Eau :

$$\langle \Phi \rangle \frac{\partial S}{\partial t} - \operatorname{div}_x \left(\lambda_w(S) \mathbb{K}^* \nabla P \right) - \operatorname{div}_x \left(\mathbb{K}^* \nabla \beta \right) - \operatorname{div}_x \mathbf{F}_w(S, P) = 0, \quad (1.125)$$

où la fonction $\mathbf{F}_w(S, P)$ note le terme de plus grand ordre dans l'équation (1.125), et elle est donnée par :

$$\mathbf{F}_w(S, P) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_w(S) \langle K \nabla_y f_p \rangle + \langle K \nabla_y f_s \rangle - \lambda_w(S) \langle K \vec{g} \rangle. \quad (1.126)$$

Considérons maintenant, l'équation (1.95). En choisissant $\zeta_2 = 0$, on a :

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega_T} \int_Y \Phi(y) (1 - S) \varrho_g^H \frac{\partial \varphi}{\partial t} dy dx dt + \int_{\Omega_T} \int_Y K(y) \lambda_g(S) \varrho_g^H [\nabla P + \nabla_y w_p] \cdot \nabla \varphi dy dx dt - \\ & - \int_{\Omega_T} \int_Y K(y) \varrho_g^H [\nabla \beta + \nabla_y w_s] \cdot \nabla \varphi dy dx dt - \int_{\Omega_T} \int_Y K(y) \lambda_g(S) [\varrho_g^H]^2 \vec{g} \cdot \nabla \varphi dy dx dt = 0. \end{aligned} \quad (1.127)$$

La relation (1.127) nous donne l'équation homogénéisée :

$$\begin{aligned} & \langle \Phi \rangle \frac{\partial}{\partial t} (\varrho_g^H (1 - S)) - \operatorname{div}_x \left\{ \lambda_g(S) \varrho_g^H \int_Y K(y) [\nabla P + \nabla_y w_p] dy \right\} + \\ & + \operatorname{div}_x \left\{ \varrho_g^H \int_Y K(y) [\nabla \beta + \nabla_y w_s] dy \right\} + \operatorname{div}_x \left\{ \lambda_g(S) [\varrho_g^H]^2 \int_Y K(y) \vec{g} dy \right\} = 0. \end{aligned} \quad (1.128)$$

Comme dans le cas précédent, on a :

$$\begin{aligned} & \operatorname{div}_x \left\{ \lambda_g(S) \varrho_g^H \int_Y K(y) [\nabla P + \nabla_y w_p] dy \right\} = \\ & = \operatorname{div}_x \left(\lambda_g(S) \varrho_g^H \mathbb{K}^* \nabla P \right) + \operatorname{div}_x \left(\lambda_g(S) \varrho_g^H \langle K \nabla_y f_s \rangle \right); \end{aligned} \quad (1.129)$$

$$\operatorname{div}_x \left\{ \varrho_g^H \int_Y K(y) [\nabla \beta + \nabla_y \mathbf{w}_s] dy \right\} = \operatorname{div}_x \left(\varrho_g^H \mathbb{K}^* \nabla \beta \right) + \operatorname{div}_x \left(\varrho_g^H \langle K \nabla_y \mathbf{f}_s \rangle \right); \quad (1.130)$$

$$\operatorname{div}_x \left\{ \lambda_w(S) [\varrho_g^H]^2 \int_Y K(y) \vec{g} dy \right\} = \operatorname{div}_x \left(\lambda_w(S) [\varrho_g^H]^2 \langle K \vec{g} \rangle \right). \quad (1.131)$$

Maintenant, en prenant en compte (1.129)–(1.131), on obtient par l'équation (1.128), l'équation homogénéisée de la phase gaz :

Gaz :

$$\langle \Phi \rangle \frac{\partial}{\partial t} (\varrho_g^H (1 - S)) - \operatorname{div}_x \left(\lambda_g(S) \varrho_g^H \mathbb{K}^* \nabla P \right) + \operatorname{div}_x \left(\varrho_g^H \mathbb{K}^* \nabla \beta \right) - \operatorname{div}_x \mathbf{F}_g(S, P) = 0, \quad (1.132)$$

où la fonction $\mathbf{F}_g(S, P)$ note le terme de plus grand ordre dans l'équation (1.132), et il est donné par :

$$\mathbf{F}_g(S, P) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_g(S) \varrho_g^H \langle K \nabla_y \mathbf{f}_s \rangle - \varrho_g^H \langle K \nabla_y \mathbf{f}_s \rangle - \lambda_w(S) [\varrho_g^H]^2 \langle K \vec{g} \rangle. \quad (1.133)$$

Chapitre 2

Homogénéisation d'un modèle diphasique compressible en milieu poreux.

2.1 Introduction

Ce chapitre contient un résultat d'homogénéisation pour un système qui modélise un écoulement diphasique immiscible et compressible en milieu poreux dans le cas de deux fluides compressibles. Ce modèle est donné dans la section 2.2. Dans la section 2.3, on donne une formulation du modèle présenté à la section 2.2, à l'aide de la pression globale. Les hypothèses sur les données sont formulées dans la section 2.4, et un théorème d'existence d'au moins une solution faible au problème (2.7) est donné dans la section 2.5. Puis un résultat d'homogénéisation est donné dans la section 2.6. Finalement, nous donnons dans la section 2.7 une justification du résultat d'homogénéisation par une méthode de convergence à deux-échelles et cela, en passant pas des estimations a priori essentiellement basées sur l'égalité d'énergie, des résultats de compacité, et finalement, un passage à la limite dans la formulation faible du problème en terme de la pression globale et de la saturation.

2.2 Modèle physique-mathématique

Dans cette section, nous allons dériver le modèle mathématique qui décrit un écoulement diphasique dans le milieu poreux écrit dans le Chapitre 1. Pour plus de détails, se référer à [12, 24, 56, 58]. On considère un écoulement diphasique immiscible et compressible en milieux poreux. Pour simplifier, nous supposons qu'il n'y a pas de terme source.

Soit $\Phi^\varepsilon(x) = \Phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ la porosité de Ω ; $K^\varepsilon = K\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ le tenseur de perméabilité absolue de Ω ; $S_l^\varepsilon = S_l^\varepsilon(x, t)$, $S_g^\varepsilon = S_g^\varepsilon(x, t)$ les saturations du liquide et du gaz, resp; $p_l^\varepsilon = p_l^\varepsilon(x, t)$, $p_g^\varepsilon = p_g^\varepsilon(x, t)$ es pressions du liquide et du gaz, resp; et ρ_l, ρ_g sont les densités du liquide et du gaz, resp.

L'équation de conservation de masse est décrite par :

$$\begin{cases} \Phi^\varepsilon(x) \frac{\partial}{\partial t} (S_l^\varepsilon \rho_l (p_l^\varepsilon)) + \operatorname{div} (\rho_l (p_l^\varepsilon) \vec{q}_l^\varepsilon) = 0 & \text{dans } \Omega_T; \\ \Phi^\varepsilon(x) \frac{\partial}{\partial t} (S_g^\varepsilon \rho_g (p_g^\varepsilon)) + \operatorname{div} (\rho_g (p_g^\varepsilon) \vec{q}_g^\varepsilon) = 0 & \text{dans } \Omega_T, \end{cases} \quad (2.1)$$

où $T > 0$ est fixé, $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$, et \vec{q}_l^ε et \vec{q}_g^ε sont définies par les lois de Darcy - Muskat (voir [36]) :

$$\vec{q}_l^\varepsilon = -K^\varepsilon(x)\lambda_l(S_l^\varepsilon)(\nabla p_l^\varepsilon - \rho_l(p_l^\varepsilon)\vec{g}), \quad \lambda_l(S_l^\varepsilon) = \frac{k_{r,l}}{\mu_l}(S_l^\varepsilon), \quad (2.2)$$

$$\vec{q}_g^\varepsilon = -K^\varepsilon(x)\lambda_g(S_g^\varepsilon)(\nabla p_g^\varepsilon - \rho_g(p_g^\varepsilon)\vec{g}), \quad \widetilde{\lambda}_g(S_g^\varepsilon) = \frac{k_{r,g}}{\mu_g}(S_g^\varepsilon) \quad (2.3)$$

où \vec{g} , μ_l et μ_g sont resp. le vecteur de gravité, la viscosité de l'eau, et la viscosité du gaz. On suppose que les densités de l'eau et du gaz, sont des fonctions régulières, monotones, telles que :

$$\rho_k(p) = \rho_{\min} \quad \text{pour } p \leq p_{\min}, \quad \rho_k(p) = \rho_{\max} \quad \text{pour } p \geq p_{\max}, \quad (2.4)$$

$$\rho_{\min} < \rho_k(p) < \rho_{\max} \quad \text{pour } p_{\min} < p < p_{\max}.$$

Ici, $k = l$ ou g , et la paire de constantes ρ_{\min} , ρ_{\max} et p_{\min} , p_{\max} satisfont

$$0 < \rho_{\min} < \rho_{\max} < +\infty \quad \text{et} \quad 0 < p_{\min} < p_{\max} < +\infty. \quad (2.5)$$

Pour simplifier les notations, on note

$$S^\varepsilon = S_l^\varepsilon. \quad (2.6)$$

Le système (2.1) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq S^\varepsilon \leq 1 \quad \text{dans } \Omega_T; \\ \Phi^\varepsilon(x) \frac{\partial (S^\varepsilon \rho_l(p_l^\varepsilon))}{\partial t} - \text{div} \{K^\varepsilon(x)\lambda_l(S^\varepsilon)\rho_l(p_l^\varepsilon)[\nabla p_l^\varepsilon - \rho_l(p_l^\varepsilon)\vec{g}]\} = 0 \quad \text{dans } \Omega_T; \\ \Phi^\varepsilon(x) \frac{\partial ((1 - S^\varepsilon)\rho_g(p_g^\varepsilon))}{\partial t} - \text{div} \{K^\varepsilon(x)\lambda_g(S^\varepsilon)\rho_g(p_g^\varepsilon)[\nabla p_g^\varepsilon - \rho_g(p_g^\varepsilon)\vec{g}]\} = 0 \quad \text{dans } \Omega_T; \\ P_c(S^\varepsilon) = p_g^\varepsilon - p_l^\varepsilon \quad \text{dans } \Omega_T, \end{array} \right. \quad (2.7)$$

Nous allons maintenant, spécifier les conditions aux bords et les conditions initiales. Les conditions aux bords, sont

$$S^\varepsilon(x, t) = S^1(x, t) \quad \text{et} \quad p_g^\varepsilon(x, t) = p^1(x, t) \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T); \quad (2.8)$$

$$\vec{q}_l^\varepsilon \cdot \vec{\nu} = \vec{q}_g^\varepsilon \cdot \vec{\nu} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T). \quad (2.9)$$

Les conditions initiales sont

$$S^\varepsilon(x, 0) = S^0(x) \quad \text{et} \quad p_g^\varepsilon(x, 0) = p_g^0(x) \quad \text{dans } \Omega. \quad (2.10)$$

Remarque 2 On trouve les conditions sur Γ_1 et les conditions initiales pour la saturation du gaz, et la pression du liquide, à partir de (2.8) et (2.10).

2.3 Formulation du modèle à l'aide de la pression globale.

En considérant la pression globale et la saturation comme fonctions inconnues, la première et la seconde équation de (2.7) s'écrivent :

$$\Phi^\varepsilon(x) \frac{\partial \Theta_l^\varepsilon}{\partial t} - \operatorname{div} \{ K^\varepsilon(x) \tilde{\rho}_l^\varepsilon [\lambda_l(S^\varepsilon) \nabla P^\varepsilon + \nabla \beta(S^\varepsilon) - \lambda_l(S^\varepsilon) \tilde{\rho}_l^\varepsilon \vec{g}] \} = 0 \quad \text{dans } \Omega_T; \quad (2.11)$$

$$\Phi^\varepsilon(x) \frac{\partial \Theta_g^\varepsilon}{\partial t} - \operatorname{div} \{ K^\varepsilon(x) \tilde{\rho}_g^\varepsilon [\lambda_g(S^\varepsilon) \nabla P^\varepsilon - \nabla \beta(S^\varepsilon) - \lambda_g(S^\varepsilon) \tilde{\rho}_g^\varepsilon \vec{g}] \} = 0 \quad \text{dans } \Omega_T, \quad (2.12)$$

où on a introduit les notations suivantes :

$$\tilde{\rho}_l^\varepsilon = \rho_l(P^\varepsilon + G_l(S^\varepsilon)) \quad \text{et} \quad \tilde{\rho}_g^\varepsilon = \rho_g(P^\varepsilon + G_g(S^\varepsilon)); \quad (2.13)$$

$$\Theta_l^\varepsilon = \Theta_l^\varepsilon(S^\varepsilon, P^\varepsilon) = S^\varepsilon \tilde{\rho}_l^\varepsilon \quad \text{et} \quad \Theta_g^\varepsilon = \Theta_g^\varepsilon(S^\varepsilon, P^\varepsilon) = (1 - S^\varepsilon) \tilde{\rho}_g^\varepsilon. \quad (2.14)$$

On complète le système (2.11)–(2.12) par les conditions aux bords, et les conditions initiales suivantes :

$$S^\varepsilon(x, t) = S^1(x, t) \quad \text{et} \quad P^\varepsilon(x, t) = P^1(x, t) \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T); \quad (2.15)$$

$$\vec{q}_l^\varepsilon \cdot \vec{\nu} = \vec{q}_g^\varepsilon \cdot \vec{\nu} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (2.16)$$

$$S^\varepsilon(x, 0) = S^0(x) \quad \text{et} \quad P^\varepsilon(x, 0) = P^0(x) \quad \text{dans } \Omega. \quad (2.17)$$

Ici, la condition au bord et la condition initiale de la pression globale, i.e., P^1, P^0 sont exprimées en fonction des données sur p_g^ε en utilisant les relations (2.31) et (2.34).

2.4 Hypothèses sur les données

L'étude sera faite sous les hypothèses suivantes :

(H.1) La fonction $\Phi = \Phi(y)$ est une fonction Y -périodique, $\Phi \in L^\infty(Y)$, et il existe deux constantes positives ϕ_1, ϕ_2 telles que $0 < \phi_1 \leq \Phi(y) \leq \phi_2 < 1$ p.p dans Y .

(H.2) Le tenseur $K = K(y)$ est une fonction Y -périodique, et elle appartient à $(L^\infty(Y))^{d \times d}$, de plus, il existe deux constantes positives k_0 et k_∞ telles que

$$k_0 |\xi|^2 \leq (K(y)\xi, \xi) \leq k_\infty |\xi|^2 \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbb{R}^d \quad \text{p.p dans } Y. \quad (2.18)$$

(H.3) La fonction $\rho_k = \rho_k(p)$, ($k = l, g$) donnée par (2.4) est monotone, de classe \mathcal{C}^1 dans \mathbb{R} .

(H.4) La fonction pression-capillaire $s \mapsto P_c(s)$ est positive, localement lipschitzienne dans $(0, 1)$, et $P_c \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$. On suppose aussi que $P_c'(s) < 0$ dans $(0, 1)$.

(H.5) La fonction $\lambda_l \in \mathcal{C}([0, 1])$ et elle satisfait les propriétés suivantes : $0 \leq \lambda_l(s) \leq 1$ pour tout $s \in [0, 1]$ et $\lambda_l(0) = 0$. La fonction $\lambda_g \in \mathcal{C}([0, 1])$ et satisfait les propriétés suivantes : $0 \leq \lambda_g(s) \leq 1$ pour tout $s \in [0, 1]$ et $\lambda_g(1) = 0$. Enfin, il existe une constante positive L_0 telle que $\lambda(s) = \lambda_l(s) + \lambda_g(s) \geq L_0 > 0$ pour tout $s \in [0, 1]$.

(H.6) La fonction α donnée par (1.26) est une fonction continue dans $[0, 1]$, de plus, $\alpha(0) = \alpha(1) = 0$, et $\alpha > 0$ dans $(0, 1)$.

(H.7) La fonction β^{-1} , inverse de la fonction β définie par (1.26) est une fonction de Hölder d'ordre θ avec $\theta \in [0, 1]$, sur l'intervalle $[0, \beta(1)]$. C'est-à-dire qu'il existe une constante positive C_β telle que pour tout $s_1, s_2 \in [0, \beta(1)]$ l'inégalité suivante est satisfaite :

$$|\beta^{-1}(s_1) - \beta^{-1}(s_2)| \leq C_\beta |s_1 - s_2|^\theta. \quad (2.19)$$

(H.8) La condition au bord et la condition initiale de la saturation, i.e., S^0, S^1 , satisfont $0 \leq S^0, S^1 \leq 1$. La donnée initiale de la pression globale est telle que $P^0 \in L^2(\Omega)$ et $P^1 \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$.

2.5 Formulation faible du problème

Définition d'une solution faible pour le problème

On dit que la paire de fonctions $(P^\varepsilon, S^\varepsilon)$ est une solution faible du problème (2.11)–(2.17), si :

(i) $0 \leq S^\varepsilon \leq 1$ p.p dans Ω_T .

(ii) $P^\varepsilon - P^1 \in L^2(0, T; H_{\Gamma_1}^1(\Omega))$.

(iii) Pour tout $\varphi_l, \varphi_g \in C^1([0, T]; H_{\Gamma_1}^1(\Omega))$ telles que $\varphi_l(T) = \varphi_g(T) = 0$, on a :

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega_T} \Phi^\varepsilon(x) \Theta^\varepsilon(x) \frac{\partial \varphi_l}{\partial t} dx dt - \int_{\Omega} \Phi^\varepsilon(x) \Theta_l^0 \varphi_l^0 dx + \\ & + \int_{\Omega_T} K^\varepsilon(x) \tilde{\rho}_l^\varepsilon \{ \lambda_l(S^\varepsilon) (\nabla P^\varepsilon - \tilde{\rho}_l^\varepsilon \vec{g}) + \nabla \beta(S^\varepsilon) \} \cdot \nabla \varphi_l dx dt = 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega_T} \Phi^\varepsilon(x) \Theta^\varepsilon(x) \frac{\partial \varphi_g}{\partial t} dx dt - \int_{\Omega} \Phi^\varepsilon(x) \Theta_g^0 \varphi_g^0 dx + \\ & + \int_{\Omega_T} K^\varepsilon(x) \tilde{\rho}_g^\varepsilon \{ \lambda_g(S^\varepsilon) (\nabla P^\varepsilon - \tilde{\rho}_g^\varepsilon \vec{g}) - \nabla \beta(S^\varepsilon) \} \cdot \nabla \varphi_g dx dt = 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

où $\tilde{\rho}_g^\varepsilon$ et $\tilde{\rho}_l^\varepsilon$ sont définies dans (2.13); $\varphi_l^0 = \varphi_l(0, x)$, $\varphi_g^0 = \varphi_g(0, x)$; $\Theta_l^0 = S^0 \rho_l (P^0 + G_l(S^0))$ et $\Theta_g^0 = (1 - S^0) \rho_g (P^0 + G_g(S^0))$.

Si $\Phi \in W^{1,\infty}(Y)$ et $K \in W^{1,\infty}(Y)^{d \times d}$, alors par [61], si les hypothèses **(H.1)**–**(H.8)** sont satisfaites, pour tout $\varepsilon > 0$, le problème (2.11)–(2.17) admet au moins une solution.

Le résultat d'existence reste vrai dans le cas où $\Phi \in L^\infty(Y)$ et $K \in (L^\infty(Y))^{d \times d}$. Pour le voir, on peut combiner la preuve qu'il y a dans [61] avec le résultat de compacité que l'on donnera un peu plus loin.

Notation conventionnelle. Dans ce qui suit, C, C_1, \dots notent des constantes génériques qui ne dépendent pas de ε .

2.6 Résultat d'homogénéisation

Nous étudions le comportement asymptotique de la solution du problème (2.11)–(2.17) quand $\varepsilon \rightarrow 0$. En particulier, nous allons voir que le problème effectif s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq S \leq 1 \quad \text{dans } \Omega_T; \\ \langle \Phi \rangle \frac{\partial \Theta_l}{\partial t} - \text{div}_x \left\{ \mathbb{K}^* \tilde{\rho}_l^H [\lambda_l(S) \nabla P + \nabla \beta(S)] + F_l \right\} = 0 \quad \text{dans } \Omega_T; \\ \langle \Phi \rangle \frac{\partial \Theta_g}{\partial t} - \text{div}_x \left\{ \mathbb{K}^* \tilde{\rho}_g^H [\lambda_g(S) \nabla P - \nabla \beta(S)] + F_g \right\} = 0 \quad \text{dans } \Omega_T. \end{array} \right. \quad (2.22)$$

Ici, $\langle \cdot \rangle$ désigne la valeur moyenne de la fonction correspondante sur la cellule Y ;

$$\tilde{\rho}_l^H = \rho_l (P + G_l(S)) \quad \text{et} \quad \tilde{\rho}_g^H = \rho_g (P + G_g(S)); \quad (2.23)$$

$$\Theta_l = S \tilde{\rho}_l^H \quad \text{et} \quad \Theta_g = (1 - S) \tilde{\rho}_g^H; \quad (2.24)$$

\mathbb{K}^* est le tenseur homogénéisé, avec les entiers \mathbb{K}_{ij}^* définis par

$$\mathbb{K}_{ij}^* = \int_Y K(y) [\nabla_y \xi_i + \vec{e}_i] [\nabla_y \xi_j + \vec{e}_j] dy, \quad (2.25)$$

où la fonction ξ_j est une solution Y -périodique, de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_y\{K(y)[\nabla_y \xi_j + \vec{e}_j^*]\} = 0 & \text{dans } Y, \\ y \mapsto \xi_j(y) & Y\text{-périodique} \end{cases} \quad (2.26)$$

avec \vec{e}_j^* la j -ème coordonnée du vecteur unité.

Le système (2.22)–(1.10) est complété par les conditions aux bords, et les conditions initiales suivantes :

$$S(x, t) = S^1(x, t) \quad \text{et} \quad P(x, t) = P^1(x, t) \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (2.27)$$

$$\vec{q}_l^* \cdot \vec{\nu} = \vec{q}_g^* \cdot \vec{\nu} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T) \quad (2.28)$$

avec

$$\vec{q}_l^* = -\mathbb{K}^* \tilde{\rho}_l^H \lambda_l(S) \nabla P - \mathbb{K}^* \tilde{\rho}_l^H \nabla \beta(S) + \mathbb{K}^* [\tilde{\rho}_l^H]^2 \lambda_l(S) \vec{g},$$

et

$$\vec{q}_g^* = -\mathbb{K}^* \tilde{\rho}_g^H \lambda_l(S) \nabla P + \mathbb{K}^* \tilde{\rho}_g^H \nabla \beta(S) + \mathbb{K}^* [\tilde{\rho}_g^H]^2 \lambda_g(S) \vec{g},$$

$$S^\varepsilon(x, 0) = S^0(x) \quad \text{et} \quad P^\varepsilon(x, 0) = P^0(x) \quad \text{dans } \Omega. \quad (2.29)$$

Remarque 3 Si on suppose que le liquide est incompressible, et que de plus, $\rho_l(p_l) = 1$, alors le système homogénéisé (2.22) coïncide avec le système homogénéisé (1.40) obtenu dans le Chapitre 1.

Le résultat essentiel de ce Chapitre est le suivant :

Théorème 2.6.1 Soient les hypothèses **(H.1)–(H.8)** satisfaites, et soit la paire de fonctions $(P^\varepsilon, S^\varepsilon)$ une solution faible du problème (2.11)–(2.17). Alors, il existe une sous-suite (notée par ε), telle que

$$S^\varepsilon(x, t) \rightarrow S(x, t) \text{ fortement dans } L^q(\Omega_T) \quad \forall 1 < q < +\infty; \quad (2.30)$$

$$P^\varepsilon(x, t) \rightharpoonup P(x, t) \text{ faiblement dans } L^2(\Omega_T); \quad (2.31)$$

$$\nabla P^\varepsilon(x, t) \xrightarrow{2s} \nabla P(x, t) + \nabla_y w_p(x, t, y); \quad (2.32)$$

$$\beta(S^\varepsilon) \rightarrow \beta(S) \text{ fortement dans } L^q(\Omega_T) \quad \forall 1 < q < +\infty; \quad (2.33)$$

$$\nabla \beta^\varepsilon(x, t) \xrightarrow{2s} \nabla \beta(S) + \nabla_y w_s(x, t, y); \quad (2.34)$$

$$\Theta_l^\varepsilon \rightarrow \Theta_l \text{ fortement dans } L^2(\Omega_T); \quad (2.35)$$

$$\Theta_g^\varepsilon \rightarrow \Theta_g \text{ fortement dans } L^2(\Omega_T). \quad (2.36)$$

Ici,

$$\beta^\varepsilon = \beta(S^\varepsilon), \quad (2.37)$$

$$w_p(x, t, y) = \sum_{j=1}^d \xi_j(y) \left(\frac{\partial P}{\partial x_j}(x, t) - B(S, P) g_j \right), \quad \text{et} \quad w_s = \sum_{j=1}^d \xi_j(y) \left(\frac{\partial \beta}{\partial x_j}(x, t) - E(S, P) g_j \right),$$

où ξ_j est une solution Y -périodique de (2.26), et où les fonctions $B(S, P)$ et $E(S, P)$ sont données par :

$$B(S, P) = \frac{\lambda_l(S) \tilde{\rho}_l^H + \lambda_g(S) \tilde{\rho}_g^H}{\lambda(S)}, \quad \text{et} \quad E(S, P) = \frac{\lambda_l(S) \lambda_g(S)}{\lambda(S)} \left[\tilde{\rho}_l^H - \tilde{\rho}_g^H \right].$$

La preuve du Théorème 2.6.1 sera donnée dans la section 2.7.

2.7 Preuve du Théorème 2.6.1 par une méthode de convergence à deux-échelles

Les grandes lignes de la preuve sont : premièrement, on obtient des estimations uniformes, puis on établit des résultats de compacités pour les suites $\{\Theta_l^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ et $\{\Theta_g^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$

2.7.1 Estimations a priori

Dans cette partie, nous allons obtenir les estimations *a priori* pour la solution du problème (2.7)–(2.10) (ou le problème équivalent (2.11)–(2.17)). Ceci sera fait en deux étapes. Dans la première étape, en utilisant des idées de [10], nous allons établir une égalité d'énergie, et trouver des estimations *a priori* par rapport aux variables spatiale et temporelle. Puis, dans la deuxième étape, on établit un résultat de compacité. Pour simplifier, on suppose ici que $p_l^\varepsilon, p_g^\varepsilon = 0$ sur $\Gamma_1 \times (0, T)$.

étape 1. Égalité d'énergie

Pour obtenir l'égalité d'énergie pour la solution faible du problème (2.7)–(2.10), on introduit les fonctions

$$R_l(p_l^\varepsilon) = \int_0^{p_l^\varepsilon} \frac{d\xi}{\rho_l(\xi)} \quad \text{et} \quad R_g(p_g^\varepsilon) = \int_0^{p_g^\varepsilon} \frac{d\xi}{\rho_g(\xi)}. \quad (2.38)$$

De plus,

$$\nabla R_l(p_l^\varepsilon) = \frac{1}{\tilde{\rho}_l^\varepsilon} \nabla p_l^\varepsilon \quad \text{et} \quad \nabla R_g(p_g^\varepsilon) = \frac{1}{\tilde{\rho}_g^\varepsilon} \nabla p_g^\varepsilon.$$

Nous avons le résultat suivant :

Lemme 2.7.1 (Égalité d'énergie) *Soit $(p_l^\varepsilon, p_g^\varepsilon)$ une solution pour le problème (2.7). Alors*

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \Phi^\varepsilon(x) \zeta^\varepsilon(x, t) dx + \\ & + \int_{\Omega} K^\varepsilon(x) \left\{ \lambda_l(S^\varepsilon) \nabla p_l^\varepsilon \cdot [\nabla p_l^\varepsilon - \rho_l(p_l^\varepsilon) \vec{g}] + \lambda_g(S^\varepsilon) \nabla p_g^\varepsilon \cdot [\nabla p_g^\varepsilon - \rho_g(p_g^\varepsilon) \vec{g}] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (2.39)$$

au sens des distributions. Ici

$$\zeta^\varepsilon = S^\varepsilon \mathcal{R}_k(p_l^\varepsilon) + (1 - S^\varepsilon) \mathcal{R}_g(p_g^\varepsilon) - F(S^\varepsilon), \quad (2.40)$$

où

$$\mathcal{R}_k(p) = \rho_k(p) R_k(p) - p, \quad (k = l, g) \quad \text{et} \quad F(s) = \int_1^s P_c(u) du. \quad (2.41)$$

De plus, $\zeta^\varepsilon \geq 0$ dans Ω_T .

Preuve du Lemme 2.7.1

En multipliant la première équation de (2.7) par $R_l(p_l^\varepsilon)$, et en multipliant la deuxième équation par $R_g(p_g^\varepsilon)$, puis en intégrant par parties, puis en faisant la somme des deux, on trouve :

$$\int_{\Omega} \Phi^\varepsilon(x) \frac{\partial \Theta_l^\varepsilon}{\partial t} R_l(p_l^\varepsilon) dx + \int_{\Omega} \Phi^\varepsilon(x) \frac{\partial \Theta_g^\varepsilon}{\partial t} R_g(p_g^\varepsilon) dx +$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{\Omega} K^{\varepsilon}(x) \lambda_l(S^{\varepsilon}) \tilde{\rho}_l^{\varepsilon} \nabla p_l^{\varepsilon} \cdot \frac{1}{\tilde{\rho}_l^{\varepsilon}} \nabla p_l^{\varepsilon} dx + \int_{\Omega} K^{\varepsilon}(x) \lambda_g(S^{\varepsilon}) \tilde{\rho}_g^{\varepsilon} \nabla p_g^{\varepsilon} \cdot \frac{1}{\tilde{\rho}_g^{\varepsilon}} \nabla p_g^{\varepsilon} dx - \\
 & - \int_{\Omega} K^{\varepsilon}(x) \lambda_l(S^{\varepsilon}) [\tilde{\rho}_l^{\varepsilon}]^2 \vec{g} \cdot \frac{1}{\tilde{\rho}_l^{\varepsilon}} \nabla p_l^{\varepsilon} dx - \int_{\Omega} K^{\varepsilon}(x) \lambda_g(S^{\varepsilon}) [\tilde{\rho}_g^{\varepsilon}]^2 \vec{g} \cdot \frac{1}{\tilde{\rho}_g^{\varepsilon}} \nabla p_g^{\varepsilon} dx = 0.
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

Réarrangeons les deux premiers termes de (2.42). On a

$$\frac{\partial \Theta_l^{\varepsilon}}{\partial t} R_l(p_l^{\varepsilon}) = \frac{\partial}{\partial t} [\tilde{\rho}_l^{\varepsilon} S^{\varepsilon} R_l(p_l^{\varepsilon})] - S^{\varepsilon} \frac{\partial p_l^{\varepsilon}}{\partial t}, \tag{2.43}$$

$$\frac{\partial \Theta_g^{\varepsilon}}{\partial t} R_g(p_g^{\varepsilon}) = \frac{\partial}{\partial t} [(1 - S^{\varepsilon}) \tilde{\rho}_g^{\varepsilon}] R_g(p_g^{\varepsilon}) = \frac{\partial}{\partial t} [(1 - S^{\varepsilon}) \tilde{\rho}_g^{\varepsilon} R_g(p_g^{\varepsilon})] - (1 - S^{\varepsilon}) \frac{\partial p_g^{\varepsilon}}{\partial t}. \tag{2.44}$$

et en utilisant la définition de la pression capillaire, on trouve que

$$S^{\varepsilon} \frac{\partial p_l^{\varepsilon}}{\partial t} + (1 - S^{\varepsilon}) \frac{\partial p_g^{\varepsilon}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \{S^{\varepsilon} p_l^{\varepsilon} + (1 - S^{\varepsilon}) p_g^{\varepsilon} + F(S^{\varepsilon})\}, \tag{2.45}$$

où

$$F(s) = \int_1^s P_c(\xi) d\xi.$$

Maintenant, il vient de (2.7.1) et (2.45), que

$$\frac{\partial \Theta_l^{\varepsilon}}{\partial t} R_l(p_l^{\varepsilon}) + \frac{\partial \Theta_g^{\varepsilon}}{\partial t} R_g(p_g^{\varepsilon}) = \frac{\partial \zeta^{\varepsilon}}{\partial t}, \tag{2.46}$$

où ζ^{ε} est définie dans (2.40)–(2.41). Afin de vérifier (2.46), il suffit de calculer la différentielle du membre de droite dans (2.40), et d'utiliser (1.8) et (2.38). En effet, on sait par la relation (2.40), que

$$\zeta^{\varepsilon} = S^{\varepsilon} \mathcal{R}_l(p_l^{\varepsilon}) + (1 - S^{\varepsilon}) \mathcal{R}_g(p_g^{\varepsilon}) - F(S^{\varepsilon}).$$

Donc,

$$\frac{\partial \zeta^{\varepsilon}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [S^{\varepsilon} \mathcal{R}_l(p_l^{\varepsilon})] + \frac{\partial}{\partial t} [(1 - S^{\varepsilon}) \mathcal{R}_g(p_g^{\varepsilon})] - \frac{\partial}{\partial t} F(S^{\varepsilon}).$$

Regardons le terme $\frac{\partial}{\partial t} [S^{\varepsilon} \mathcal{R}_l(p_l^{\varepsilon})]$. On a

$$\frac{\partial}{\partial t} [S^{\varepsilon} \mathcal{R}_l(p_l^{\varepsilon})] = \frac{\partial}{\partial t} [S^{\varepsilon} (\tilde{\rho}_l^{\varepsilon} R_l(p_l^{\varepsilon}) - p_l^{\varepsilon})] = \frac{\partial}{\partial t} [S^{\varepsilon} \tilde{\rho}_l^{\varepsilon} R_l(p_l^{\varepsilon})] - \frac{\partial}{\partial t} (S^{\varepsilon} p_l^{\varepsilon}).$$

Par conséquent,

$$\frac{\partial}{\partial t} [S^{\varepsilon} \mathcal{R}_l(p_l^{\varepsilon})] = \frac{\partial \Theta_l^{\varepsilon}}{\partial t} R_l(p_l^{\varepsilon}) + S^{\varepsilon} \tilde{\rho}_l^{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial t} R_l(p_l^{\varepsilon}) - \frac{\partial}{\partial t} (S^{\varepsilon} p_l^{\varepsilon}).$$

Aussi,

$$\frac{\partial}{\partial t} R_l(p_l^{\varepsilon}) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{p_l^{\varepsilon}} \frac{d\xi}{\rho_l(\xi)} = \frac{1}{\tilde{\rho}_l^{\varepsilon}} \frac{\partial p_l^{\varepsilon}}{\partial t}.$$

donc,

$$\frac{\partial}{\partial t} [S^{\varepsilon} \mathcal{R}_l(p_l^{\varepsilon})] = \frac{\partial \Theta_l^{\varepsilon}}{\partial t} R_l(p_l^{\varepsilon}) + S^{\varepsilon} \frac{\partial p_l^{\varepsilon}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} (S^{\varepsilon} p_l^{\varepsilon}).$$

Regardons maintenant, le terme $\frac{\partial}{\partial t} [(1 - S^{\varepsilon}) \mathcal{R}_g(p_g^{\varepsilon})]$. On a

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} [(1 - S^{\varepsilon}) \mathcal{R}_g(p_g^{\varepsilon})] &= \frac{\partial}{\partial t} [(1 - S^{\varepsilon}) [\rho_g(p_g^{\varepsilon}) R_g(p_g^{\varepsilon}) - p_g^{\varepsilon}]] \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} [(1 - S^{\varepsilon}) \tilde{\rho}_g^{\varepsilon} R_g(p_g^{\varepsilon})] - \frac{\partial}{\partial t} [(1 - S^{\varepsilon}) p_g^{\varepsilon}].
 \end{aligned}$$

Donc,

$$\frac{\partial}{\partial t} [(1 - S^\varepsilon) \mathcal{R}_g(p_g^\varepsilon)] = \frac{\partial \Theta_g^\varepsilon}{\partial t} R_g(p_g^\varepsilon) + (1 - S^\varepsilon) \tilde{\rho}_g^\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} R_g(p_g^\varepsilon) - \frac{\partial}{\partial t} [(1 - S^\varepsilon) p_g^\varepsilon].$$

Aussi,

$$\frac{\partial}{\partial t} R_g(p_g^\varepsilon) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{p_g^\varepsilon} \frac{\partial d\xi}{\rho_g(\xi)} = \frac{1}{\tilde{\rho}_g^\varepsilon} \frac{\partial p_g^\varepsilon}{\partial t}.$$

Donc,

$$\frac{\partial}{\partial t} [(1 - S^\varepsilon) \mathcal{R}_g(p_g^\varepsilon)] = \frac{\partial \Theta_g^\varepsilon}{\partial t} R_g(p_g^\varepsilon) + (1 - S^\varepsilon) \frac{\partial p_g^\varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} [(1 - S^\varepsilon) p_g^\varepsilon].$$

Alors,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta^\varepsilon}{\partial t} &= \frac{\partial \Theta_l^\varepsilon}{\partial t} R_l(p_l^\varepsilon) + \frac{\partial \Theta_g^\varepsilon}{\partial t} R_g(p_g^\varepsilon) + \\ &+ \left[S^\varepsilon \frac{\partial p_l^\varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} (S^\varepsilon p_l^\varepsilon) + (1 - S^\varepsilon) \tilde{\rho}_g^\varepsilon \frac{\partial p_g^\varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} [(1 - S^\varepsilon) p_g^\varepsilon] - \frac{\partial}{\partial t} F(S^\varepsilon) \right] \end{aligned}$$

Regardons le terme entre crochet dans cette dernière égalité. On a :

$$\frac{\partial}{\partial t} (S^\varepsilon p_l^\varepsilon) = \frac{\partial S^\varepsilon}{\partial t} p_l^\varepsilon + S^\varepsilon \frac{\partial p_l^\varepsilon}{\partial t} \Rightarrow S^\varepsilon \frac{\partial p_l^\varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} (S^\varepsilon p_l^\varepsilon) = -\frac{\partial S^\varepsilon}{\partial t} p_l^\varepsilon,$$

et aussi,

$$\frac{\partial}{\partial t} (1 - S^\varepsilon) p_g^\varepsilon = \frac{\partial (1 - S^\varepsilon)}{\partial t} p_g^\varepsilon + (1 - S^\varepsilon) \frac{\partial p_g^\varepsilon}{\partial t} = -\frac{\partial S^\varepsilon}{\partial t} p_l^\varepsilon - \frac{\partial}{\partial t} (1 - S^\varepsilon) p_g^\varepsilon - \frac{\partial S^\varepsilon}{\partial t} p_g^\varepsilon + \frac{\partial S^\varepsilon}{\partial t} p_l^\varepsilon.$$

On sait que, $P_c(S^\varepsilon) = p_g^\varepsilon - p_l^\varepsilon$, donc

$$-\frac{\partial S^\varepsilon}{\partial t} p_l^\varepsilon + \frac{\partial S^\varepsilon}{\partial t} p_l^\varepsilon + \frac{\partial S^\varepsilon}{\partial t} p_g^\varepsilon - \frac{\partial S^\varepsilon}{\partial t} p_g^\varepsilon = 0.$$

D'où la relation (2.40).

Il nous reste à montrer que $\zeta^\varepsilon \geq 0$ dans Ω_T . On a par (2.40), que

$$\zeta^\varepsilon = S^\varepsilon \mathcal{R}_l(p_l^\varepsilon) + (1 - S^\varepsilon) \mathcal{R}_g(p_g^\varepsilon) - F(S^\varepsilon).$$

Puisque par définition, $F(s) \leq 0$ dans $[0, 1]$, alors

$$\zeta^\varepsilon \geq S^\varepsilon \mathcal{R}_l(p_l^\varepsilon) + (1 - S^\varepsilon) \mathcal{R}_g(p_g^\varepsilon) \quad (2.47)$$

Maintenant, on démontre que $\mathcal{R}_k(p)$ définie dans (2.41) n'est pas négative quelque soit p . Commençons par le cas où $p \geq 0$. On déduit des définition respectives de ρ_k et R_k , ($k = l, g$), que

$$\mathcal{R}'_k(p) = \rho'_l(p) R_l(p) + \frac{1}{\rho_k(p)} \rho_k(p) - 1 = \rho'_k(p) R_k(p) \geq 0.$$

De plus, $\mathcal{R}_k(0) = 0$. Ça signifie que $\mathcal{R}_l(p) \geq 0$ pour tout $p \geq 0$. On suppose maintenant, que $p < 0$. Alors, par les définitions de R_k et ρ_k , on a :

$$\mathcal{R}_k(p) \geq \left[|p| - \rho_{\min} \int_0^{|p|} \frac{du}{\rho_k(-u)} \right] = \left[|p| - \rho_{\min} \int_0^{|p|} \frac{du}{\rho_{\min}} \right] = 0. \quad (2.48)$$

Ici, nous avons utilisé le fait que $\rho_k(p) = \rho_{\min}$ si $p < 0$. Ainsi, puisque les fonctions \mathcal{R}_l et \mathcal{R}_g ne sont pas négatives, on déduit de la relation (2.47) que ζ^ε n'est pas négative dans Ω_T . Ce qui complète la preuve du lemme (2.7.1).

Maintenant, nous allons obtenir des estimations a priori pour $\sqrt{\lambda_l(S^\varepsilon)} \nabla p_l^\varepsilon$ et $\sqrt{\lambda_g(S^\varepsilon)} \nabla p_g^\varepsilon$. On a

Lemme 2.7.2 Soit $(p_l^\varepsilon, p_g^\varepsilon)$ une solution au problème (2.7). Alors

$$\left\| \sqrt{\lambda_l(S^\varepsilon)} \nabla p_l^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega_T)} + \left\| \sqrt{\lambda_g(S^\varepsilon)} \nabla p_g^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega_T)} \leq C. \quad (2.49)$$

Preuve du Lemme 2.7.2

Considérons l'équation (2.42), il est simple de l'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Phi^\varepsilon(x) \frac{\partial \zeta^\varepsilon}{\partial t} dx + \int_{\Omega} \{ K^\varepsilon(x) \lambda_l(S^\varepsilon) \nabla p_l^\varepsilon \cdot \nabla p_l^\varepsilon + K^\varepsilon(x) \lambda_g(S^\varepsilon) \nabla p_g^\varepsilon \cdot \nabla p_g^\varepsilon \} dx - \\ - \int_{\Omega} \{ K^\varepsilon(x) \lambda_l(S^\varepsilon) \tilde{\rho}_l^\varepsilon \vec{g} \cdot \nabla p_l^\varepsilon + K^\varepsilon(x) \lambda_g(S^\varepsilon) \tilde{\rho}_g^\varepsilon \vec{g} \cdot \nabla p_g^\varepsilon \} dx = 0. \end{aligned} \quad (2.50)$$

En intégrant la relation (2.50) sur l'intervalle $(0, t)$, avec $t \in (0, T)$, on trouve :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Phi^\varepsilon(x) \zeta^\varepsilon dx + \int_{\Omega_t} \{ K^\varepsilon(x) \lambda_l(S^\varepsilon) \nabla p_l^\varepsilon \cdot \nabla p_l^\varepsilon + K^\varepsilon(x) \lambda_g(S^\varepsilon) \nabla p_g^\varepsilon \cdot \nabla p_g^\varepsilon \} dx d\tau - \\ - \int_{\Omega_t} \{ K^\varepsilon(x) \lambda_l(S^\varepsilon) \tilde{\rho}_l^\varepsilon \vec{g} \cdot \nabla p_l^\varepsilon + K^\varepsilon(x) \lambda_g(S^\varepsilon) \tilde{\rho}_g^\varepsilon \vec{g} \cdot \nabla p_g^\varepsilon \} dx d\tau = \int_{\Omega} \Phi^\varepsilon(x) \zeta^0 dx, \end{aligned} \quad (2.51)$$

où $\Omega_t = \Omega \times (0, t)$ et

$$\zeta^0 = S^0 \mathcal{R}_l(p_l^0) + (1 - S^0) \mathcal{R}_g(p_g^0) - F(S^0). \quad (2.52)$$

On déduit de l'hypothèse **(H.1)** et de la positivité de la fonction ζ^ε dans Ω_t , que le premier terme du membre de gauche dans (2.51) satisfait

$$\int_{\Omega} \Phi^\varepsilon(x) \zeta^\varepsilon dx \geq 0. \quad (2.53)$$

Pour le second et le troisième terme de (2.51), on obtient en utilisant l'inégalité de Cauchy et les hypothèses **(H.1)** et **(H.4)** que :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t} \{ K^\varepsilon(x) \lambda_l(S^\varepsilon) \nabla p_l^\varepsilon \cdot \nabla p_l^\varepsilon + K^\varepsilon(x) \lambda_g(S^\varepsilon) \nabla p_g^\varepsilon \cdot \nabla p_g^\varepsilon \} dx d\tau - \\ - \int_{\Omega_t} \{ K^\varepsilon(x) \lambda_l(S^\varepsilon) \vec{g} \cdot \rho_l(p_l^\varepsilon) \nabla p_l^\varepsilon + K^\varepsilon(x) \lambda_g(S^\varepsilon) \vec{g} \cdot \rho_g(p_g^\varepsilon) \nabla p_g^\varepsilon \} dx d\tau \geq \\ \geq -C + \frac{\kappa_0}{2} \int_{\Omega_t} \lambda_l(S^\varepsilon) |\nabla p_l^\varepsilon|^2 dx d\tau + \frac{\kappa_0}{2} \int_{\Omega_t} \lambda_g(S^\varepsilon) |\nabla p_g^\varepsilon|^2 dx d\tau. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Considérons le membre de droite de (2.51). On a par la définition de ζ^0 , (2.52), **(H.1)** et **(H.8)** que

$$\left| \int_{\Omega} \Phi^\varepsilon(x) \zeta^0 dx \right| \leq C. \quad (2.55)$$

Finalement, les relations (2.51), (2.53), (2.54) et (2.55) impliquent que

$$\int_{\Omega_t} \lambda_l(S^\varepsilon) |\nabla p_l^\varepsilon|^2 dx d\tau + \int_{\Omega_t} \lambda_g(S^\varepsilon) |\nabla p_g^\varepsilon|^2 dx d\tau \leq C. \quad (2.56)$$

Ce qui achève la preuve du Lemme (2.7.2).

Nous sommes maintenant, en mesure d'obtenir des estimations *a priori* pour P^ε et $\beta(S^\varepsilon)$. On a

Lemme 2.7.3 Soit $(p_g^\varepsilon, p_l^\varepsilon)$ une solution au problème (2.7), et soient $\{P^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ et $\{\beta(S^\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$ les suites de fonctions définies resp. dans (2.31) et (1.26). Alors

$$\|\beta(S^\varepsilon)\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + \|P^\varepsilon\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq C. \quad (2.57)$$

Preuve du Lemme 2.7.3

Premièrement, on note que par l'hypothèse **(H.5)**, on trouve l'inégalité suivante :

$$|\nabla\beta(S^\varepsilon)|^2 \leq \frac{1}{L_0} |\nabla b(S^\varepsilon)|^2, \quad (2.58)$$

où la fonction $b(S^\varepsilon)$ est donnée par

$$b(s) = \int_0^s a(\xi)d\xi \quad \text{avec } a(s) = \sqrt{\frac{\lambda_g(s)\lambda_l(s)}{\lambda(s)}} |P'_c(s)|. \quad (2.59)$$

Alors, par la relation

$$\lambda_g(S^\varepsilon) |\nabla p_g^\varepsilon|^2 + \lambda_l(S^\varepsilon) |\nabla p_l^\varepsilon|^2 = \lambda(S^\varepsilon) |\nabla P^\varepsilon|^2 + |\nabla b(S^\varepsilon)|^2, \quad (2.60)$$

par l'hypothèse **(H.5)**, et par le Lemme 2.7.2, on obtient :

$$\|\nabla\beta(S^\varepsilon)\|_{L^2(\Omega_T)} + \|\nabla P^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_T)} \leq C. \quad (2.61)$$

Ainsi, le résultat du lemme découle immédiatement de l'hypothèse **(H.6)**, l'inégalité de Friedrichs et l'inégalité (2.61). Ce qui achève la preuve du Lemme 2.7.3.

Passons maintenant, aux estimations uniformes des dérivées en temps pour les fonctions Θ_l^ε et Θ_g^ε . La bornitude uniforme des dérivées en temps pour les fonctions Θ_l^ε et Θ_g^ε sont données par le Lemme suivant :

Lemme 2.7.4 *Soit $(p_l^\varepsilon, p_g^\varepsilon)$ une solution pour le problème 2.7. Alors,*

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} (\Phi^\varepsilon \Theta_l^\varepsilon) \right\}_{\varepsilon > 0} \quad \text{est uniformément bornée dans } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)); \quad (2.62)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} (\Phi^\varepsilon \Theta_g^\varepsilon) \right\}_{\varepsilon > 0} \quad \text{est uniformément bornée dans } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)). \quad (2.63)$$

Preuve du Lemme 2.7.4

On commence par monter (2.63). En multipliant (2.11) par $\varphi_l \in \mathcal{D}(\Omega_T)$ puis, on intègre par parties, et trouve :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_T} \Phi^\varepsilon(x) \Theta_l^\varepsilon \frac{\partial \varphi_l}{\partial t} dx dt &= \int_{\Omega_T} K^\varepsilon(x) \lambda_l(S^\varepsilon) \tilde{\rho}_l^\varepsilon \nabla P^\varepsilon \cdot \nabla \varphi_g dx dt \\ &- \int_{\Omega_T} K^\varepsilon(x) \tilde{\rho}_l^\varepsilon \nabla \beta^\varepsilon \cdot \nabla \varphi_l dx dt - \int_{\Omega_T} K^\varepsilon(x) \lambda_l(S^\varepsilon) [\tilde{\rho}_l^\varepsilon]^2 \vec{g} \cdot \nabla \varphi_l dx dt, \end{aligned} \quad (2.64)$$

où la fonction β^ε est définie dans (2.37). Ainsi, il vient par l'inégalité de Cauchy, la définition de la fonction ρ_g , et par l'hypothèse **(H.6)** que

$$\left| \int_{\Omega_T} \Phi^\varepsilon(x) \Theta_l^\varepsilon \frac{\partial \varphi_l}{\partial t} dx dt \right| \leq C \left(1 + \|\nabla P^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_T)} + \|\nabla \beta^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_T)} \right) \|\nabla \varphi_l\|_{L^2(\Omega_T)}. \quad (2.65)$$

Ainsi, on conclut par l'estimation (2.61) que

$$\|\partial_t(\Phi^\varepsilon \Theta_l^\varepsilon)\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))} \leq C. \quad (2.66)$$

La bornitude uniforme de $\{\partial_t(\Phi^\varepsilon \Theta_l^\varepsilon)\}_{\varepsilon > 0}$ dans l'espace $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ s'obtient de la même manière. Ce qui achève la preuve du Lemme (2.7.4).

Étape 2. Résultats de compacité pour les suites $\{\Theta_l^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}, \{\Theta_g^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$

On commence cette partie par le lemme de compacité suivant :

Lemme 2.7.5 (Lemme de compacité) *Soit la fonction $\Phi = \Phi(y)$ une fonction Y -périodique, $\Phi \in L^\infty(Y)$, et telle qu'il existe deux constantes positives ϕ_1, ϕ_2 telles que $0 < \phi_1 \leq \Phi(y) \leq \phi_2 < 1$ p.p dans Y , et soit $\{v^\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subset L^2(\Omega_T)$ une famille de fonctions qui satisfait les propriétés suivantes :*

1. *La fonction v^ε est uniformément bornée dans l'espace $L^\infty(\Omega_T)$, i.e.,*

$$0 \leq v^\varepsilon \leq C. \quad (2.67)$$

2. *Il existe une fonction ϖ telle que $\varpi(\xi) \rightarrow 0$ quand $\xi \rightarrow 0$, et l'inégalité suivante est vérifiée :*

$$\int_{\Omega_T} |v^\varepsilon(x + \Delta x, \tau) - v^\varepsilon(x, \tau)|^2 dx d\tau \leq C\varpi(|\Delta x|). \quad (2.68)$$

3. *La fonction v^ε est telle que*

$$\|\partial_t(\Phi^\varepsilon v^\varepsilon)\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq C. \quad (2.69)$$

Alors la famille $\{v^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ est un ensemble compact dans $L^2(\Omega_T)$.

Remarque 4 *Dans la formulation du lemme de compacité, la périodicité de Φ peut être remplacée par l'hypothèse que $\Phi^\varepsilon \rightharpoonup 1$ faiblement dans $L^2(\Omega)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.*

Preuve du Lemme 2.7.5

Pour cette preuve, et sans perte de généralité, on suppose que $\langle \Phi \rangle = 1$. Alors

$$(\Phi^\varepsilon - 1) \rightharpoonup 0 \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega) \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.70)$$

On note $Q = (0, 2\pi)^d$. Sans perte de généralité, on suppose que $\bar{\Omega} \subset Q$. On prolonge la fonction v^ε à $(Q \setminus \Omega) \times (0, T)$ en posant $v^\varepsilon(x, t) = 0$ pour $x \in Q \setminus \Omega$. Alors, comme conséquence de (2.68), on a

$$\int_{Q_T} |v^\varepsilon(x + y, t) - v^\varepsilon(x, t)|^2 dx dt \leq w_1(y) \quad (2.71)$$

avec la fonction w_1 qui satisfait $\lim_{|y| \rightarrow 0} w_1(y) = 0$. Ici, $Q_T = Q \times (0, T)$.

En posant $w_2(s) = \sup_{|y| \leq s} w_1(y)$, on peut facilement montrer que la fonction $w_2(s)$ est monotone, $w_1(y) \leq w_2(|y|)$, et $\lim_{s \rightarrow 0} w_2(s) = 0$.

Dans l'espace $L^2(Q)$, on introduit la base orthonormale standard $\{\psi_j\}$, où

$$\psi_j(x) = (2\pi)^{-d} \exp(ijx) \quad \text{avec } j \in \mathbb{Z}^d \quad \text{et } i = \sqrt{-1}.$$

Alors $\{|1 + |j|^2|^{-1/2} \psi_j\}$ est une base orthonormale de $H_{per}^1(Q)$, et $\{|1 + |j|^2|^{1/2} \psi_j\}$ est une base orthonormale de $H_{per}^{-1}(Q)$ si cet espace est muni des normes suivantes :

$$\|w\|_{H_{per}^1(Q)}^2 = \sum_j (w, \psi_j)^2 (1 + |j|^2), \quad \|w\|_{H_{per}^{-1}(Q)}^2 = \sum_j \langle w, \psi_j \rangle^2 (1 + |j|^2)^{-1}.$$

Lemme 2.7.6 *Pour tout $\delta > 0$, il existe $N(\delta) \in \mathbb{Z}^+$ telle que*

$$\frac{1}{(2\delta)^d} \int_{[-\delta, \delta]^d} dy \int_Q |\psi_j(x + y) - \psi_j(x)|^2 dx \geq \frac{1}{2(2\pi)^d} \quad \text{pour tout } j \quad \text{avec } |j| \geq N(\delta).$$

Preuve du Lemme 2.7.6

On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\delta)^d} \int_{[-\delta, \delta]^d} dy \int_Q |\exp(ij(x+y)) - \exp(ijx)|^2 dx &= \frac{1}{(2\delta)^d} \int_{[-\delta, \delta]^d} dy \int_Q |\exp(ijy) - 1|^2 dx \\ &= \frac{1}{(2\delta)^d} \int_{[-\delta, \delta]^d} |\exp(ijy) - 1|^2 dy = \frac{1}{2^d} \int_{[-1, 1]^d} |\exp(ij\delta y) - 1|^2 dy. \end{aligned}$$

L'intégrale à droite de cette dernière égalité est supérieure à $\frac{1}{2}$ si $|j| > 2d\delta^{-1}$, ce qui achève la preuve du Lemme .

Nous allons maintenant, représenter la fonction v^ε par sa série de Fourier dans Q avec des coefficients qui dépendent du temps t :

$$v^\varepsilon(x, t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \beta_j^\varepsilon(t) \psi_j(x) \quad \text{avec} \quad \beta_j^\varepsilon(t) = \int_Q v^\varepsilon(x, t) \psi_j(x) dx.$$

Alors,

$$\|v^\varepsilon\|_{L^2(Q_T)}^2 = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \int_0^T |\beta_j^\varepsilon(t)|^2 dt.$$

Ceci nous permet d'obtenir l'estimation suivante sur la fonction w_2 :

$$\begin{aligned} w_2(\delta) &\geq \frac{1}{(2\delta)^d} \int_{[-\delta, \delta]^d} dy \int_{Q_T} |v^\varepsilon(x+y) - v^\varepsilon(x)|^2 dx dt = \\ &= \frac{1}{(2\delta)^d} \int_{[-\delta, \delta]^d} dy \int_{Q_T} |\beta_j^\varepsilon(t)|^2 |\psi_j(x+y) - \psi_j(x)|^2 dx dt \geq \frac{1}{2(2\pi)^d} \sum_{|j| \geq N(\delta)} \int_0^T |\beta_j^\varepsilon(t)|^2 dt. \end{aligned}$$

Puisque $w_2(\delta) \rightarrow 0$ quand $\delta \rightarrow 0$, on conclut que, pour tout $\gamma > 0$, il existe $N(\gamma) > 0$ telle que

$$\left\| \sum_{|j| \geq N(\gamma)} \beta_j^\varepsilon(t) \psi_j(x) \right\|_{L^2(Q_T)}^2 = \sum_{|j| \geq N(\gamma)} \int_0^T |\beta_j^\varepsilon(t)|^2 dt < \gamma.$$

Ceci implique que

$$v^\varepsilon = \sum_{|j| \leq N(\gamma)} \beta_j^\varepsilon(t) \psi_j(x) + V_{res, N}^\varepsilon = V_N^\varepsilon + V_{res, N}^\varepsilon \tag{2.72}$$

avec

$$\|V_{res, N}^\varepsilon\|_{L^2(Q_T)}^2 < \gamma. \tag{2.73}$$

Nous allons maintenant, exploiter l'estimation (2.69). Réécrivons les séries de Fourier de $(\Phi^\varepsilon v^\varepsilon)$ en la variable x . On a

$$\Phi^\varepsilon(x) v^\varepsilon(x, t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \widetilde{\beta}_j^\varepsilon(t) \psi_j(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial t} (\Phi^\varepsilon(x) v^\varepsilon(x, t)) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \frac{d}{dt} \widetilde{\beta}_j^\varepsilon(t) \psi_j(x).$$

Puisque la famille $\{\psi_j\}$ est orthogonale dans $H_{per}^{-1}(Q)$, on obtient

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \int_0^T \left| \frac{d}{dt} \widetilde{\beta}_j^\varepsilon(t) \right|^2 (1 + |j|^2)^{-1} \leq C. \tag{2.74}$$

Faisons l'estimation de la différence

$$\int_0^T \left| \beta_j^\varepsilon(t) - \widetilde{\beta}_j^\varepsilon(t) \right|^2 dt = \int_0^T \left| \int_Q (\Phi^\varepsilon(x) - 1) v^\varepsilon(x) \psi_j(x) dx \right|^2 dt.$$

Lemme 2.7.7 *Pour tout $j \in \mathbb{Z}^d$,*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \left| \int_Q (\Phi^\varepsilon(x) - 1) v^\varepsilon(x) \psi_j(x) dx \right|^2 dx = 0. \quad (2.75)$$

Preuve du Lemme 2.7.7

Pour tout $\gamma > 0$, on choisit $N(\gamma)$ telle que (2.73) soit satisfaite. Alors

$$\int_0^T \left| \int_Q (\Phi^\varepsilon(x) - 1) V_{res,N}^\varepsilon(x) \psi_j(x) dx \right|^2 dt \leq C_\gamma (1 + \|\Phi^\varepsilon\|_{L^\infty(Y)}^2). \quad (2.76)$$

Maintenant, nous allons faire une estimation pour V_N^ε . On a

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left| \int_Q (\Phi^\varepsilon(x) - 1) \left(\sum_{|k| \leq N(\gamma)} \beta_k^\varepsilon(t) \psi_k(x) \right) \psi_j(x) dx \right|^2 dt \leq \\ & \leq N(\gamma) \sum_{|k| \leq N(\gamma)} \int_0^T |\beta_k^\varepsilon(t)|^2 \left| \int_Q (\Phi^\varepsilon(x) - 1) \psi_k(x) \psi_j(x) dx \right|^2 dt. \end{aligned}$$

Puisque $(\Phi^\varepsilon(x) - 1)$ tend vers zéro faiblement dans $L^2(Q)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$ et $\psi_k(x) \psi_j(x)$ ne dépend pas de ε , alors

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_Q \psi_k(x) \psi_j(x) (\Phi^\varepsilon(x) - 1) dx = 0.$$

Ainsi,

$$\sum_k \int_0^T |\beta_k^\varepsilon(t)|^2 dt \leq C$$

Donc

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \left| \int_Q (\Phi^\varepsilon(x) - 1) \left(\sum_{|k| \leq N(\gamma)} \beta_k^\varepsilon(t) \psi_k(x) \right) \psi_j(x) dx \right|^2 dt = 0.$$

En considérant (2.76), on déduit que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \left| \int_Q (\Phi^\varepsilon(x) - 1) v^\varepsilon(x) \psi_j(x) dx \right|^2 dt \leq C_\gamma.$$

pour tout $\gamma > 0$. Ceci implique (2.75), ce qui achève la preuve du Lemme 2.7.7.

On note

$$\widetilde{V}_N^\varepsilon = \sum_{|j| \leq N(\gamma)} \widetilde{\beta}_j^\varepsilon(t) \psi_j(x).$$

Par le Lemme 2.7.7, pour tout $\gamma > 0$, il existe $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\gamma)$ telle que, pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$, on a

$$\|V_N^\varepsilon - \widetilde{V}_N^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_T)} \leq 3\gamma. \quad (2.77)$$

Par (2.74), et l'estimation

$$\sum_j \int_0^T |\widetilde{\beta}_j^\varepsilon(t)|^2 dt \leq C,$$

La famille $\{\widetilde{\beta}_j^\varepsilon(\cdot), |j| \leq N\}$ est un ensemble compact dans $(L^2(0, T))^M$, où M est le nombre de $j \in \mathbb{Z}^d$ tels que $|j| \leq N$. Donc, la famille

$$\left\{ \widetilde{V}_N^\varepsilon = \sum_{|j| \leq N(\gamma)} \widetilde{\beta}_j^\varepsilon(t) \psi_j(x) \right\}_{\varepsilon > 0}$$

est un ensemble compact de l'espace $L^2(\Omega_T)$. Donc, il existe γ -net finis pour cette famille, telles que leurs éléments sont notés par $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_K$. En prenant en compte (2.73) et (2.77), on conclut que, pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, les fonctions $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_K$ forment un 5γ -net pour $\{v^\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ dans $L^2(\Omega_T)$. Ceci implique la compacité recherché, et achève la preuve du Lemme 2.7.5.

Revenons maintenant au résultat de compacité, pour la famille $\{\Theta_g^\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$. Il est assuré par la proposition suivante :

Proposition 2.7.1 *La famille $\{\Theta_g^\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ est un ensemble compact dans l'espace $L^2(\Omega_T)$.*

Preuve de la Proposition 2.7.1

L'idée ici de la preuve de la Proposition 2.7.1, est d'appliquer le lemme de compacité. Pour ça, on s'assure que les conditions du lemme sont satisfaites. Premièrement, il vient de (2.4) et (2.14), que

$$0 \leq \Theta_g^\varepsilon = \rho_g(P^\varepsilon + G_g(S^\varepsilon))(1 - S^\varepsilon) \leq \rho_{\max} < +\infty. \quad (2.78)$$

Il vient du Lemme 2.7.3 et l'hypothèse **(H.7)**, que :

$$\int_{\Omega_T} |\Theta_g^\varepsilon(x + \Delta x, \tau) - \Theta_g^\varepsilon(x, \tau)|^2 dx d\tau \leq C w_1(|\Delta x|) \quad \text{avec } w_1(\xi) \rightarrow 0 \quad \text{quand } \xi \rightarrow 0, \quad (2.79)$$

où on suppose que $\Theta_g^\varepsilon = 0$ quand $x + \Delta x \notin \Omega$. Finalement, il vient du Lemme 2.7.4, que

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} (\Phi^\varepsilon \Theta_g^\varepsilon) \right\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))} \leq C.$$

Maintenant, il est clair que la famille $\{\Theta_g^\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ satisfait toutes les conditions du Lemme de compacité. Donc, la famille $\{\Theta_g^\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ est un ensemble compact dans l'espace $L^2(\Omega_T)$, ce qui achève la preuve de la Proposition 2.7.1.

Comme conséquence de la L^∞ bornitude uniforme de Θ^ε , on a le résultat suivant

Corollaire 2.7.2 *La famille $\{\Theta_g^\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ est un ensemble compact dans l'espace $L^q(\Omega_T)$ pour tout $q \in [1, +\infty)$.*

Par des arguments similaires, on prouve le résultat de compacité pour la famille $\{\Theta_l^\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$. En d'autres termes, nous avons le résultat suivant :

Proposition 2.7.3 *En supposant les hypothèses **(H.1)–(H.8)** satisfaites, la famille $\{\Theta_l^\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ est un ensemble compact dans l'espace $L^q(\Omega_T)$ pour tout $q \in [1, +\infty)$.*

Maintenant, en utilisant des idées de [8], on obtient le résultat important qui suit, et qui concerne la convergence presque partout des suites $\{S^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ et $\{P^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$.

Proposition 2.7.4 *Il existe les fonctions $S \in L^2(\Omega_T)$ et $P \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ telles que, à une sous suite près,*

$$S^\varepsilon \rightarrow S \quad \text{p.p dans } \Omega_T; \quad (2.80)$$

$$P^\varepsilon \rightarrow P \quad \text{p.p dans } \Omega_T. \quad (2.81)$$

2.7.2 Preuve de la Proposition 2.7.4

On conclut par les Propositions 2.7.1 et 2.7.3, qu'il existe deux fonctions Θ_g, Θ_l , telles que,

$$\Theta_l^\varepsilon(\beta^\varepsilon, P^\varepsilon) \rightarrow \Theta_l \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega_T) \text{ et p.p dans } \Omega_T; \quad (2.82)$$

$$\Theta_g^\varepsilon(\beta^\varepsilon, P^\varepsilon) \rightarrow \Theta_g \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega_T) \text{ et p.p dans } \Omega_T, \quad (2.83)$$

où $\beta^\varepsilon = \beta(S^\varepsilon)$. Considérons l'application \mathbb{M} définie par :

$$\mathbb{M}(S^\varepsilon, P^\varepsilon) = (\Theta_l^\varepsilon(\beta^\varepsilon, P^\varepsilon), \Theta_g^\varepsilon(\beta^\varepsilon, P^\varepsilon)).$$

Comme il l'a été démontré dans [10] (voir les Lemmes 1, 2), cette application est un difféomorphisme de $[0, 1] \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{M}([0, 1], \mathbb{R})$, et par conséquent, sa fonction inverse est continue aussi. Donc, la convergence presque partout des fonctions $\Theta_l^\varepsilon, \Theta_g^\varepsilon$, impliquent les résultats de convergence (2.80) et (2.81). Ce qui complète la preuve de la proposition 2.7.4.

2.7.3 Passage à la limite dans (2.20)–(2.21)

Dans cette section, nous allons obtenir des résultats de compacité (voir le Lemme (2.45) qui va suivre) en utilisant les estimations a priori obtenues dans la précédente section, puis, passer à la limite dans (2.20)–(2.21).

Théorème 2.7.5 *Soient les hypothèses (H.1)–(H.8) satisfaites, et soit la paire de fonctions $(P^\varepsilon, S^\varepsilon)$ une solution faible de (2.20)–(2.21). Il existe une fonction S avec $0 \leq S \leq 1$ p.p dans Ω_T , $P \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$, $\beta \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$, w_p et $w_s \in L^2(\Omega_T; H^1_\#(Y))$ telles que, à une sous-suite près, on a :*

$$S^\varepsilon(x, t) \rightarrow S(x, t) \quad \text{fortement dans } L^q(\Omega_T) \quad \forall 1 < q < +\infty \text{ et p.p. dans } \Omega_T; \quad (2.84)$$

$$P^\varepsilon(x, t) \rightharpoonup P(x, t) \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega_T); \quad (2.85)$$

$$\nabla P^\varepsilon(x, t) \xrightarrow{2s} \nabla P(x, t) + \nabla_y w_p(x, t, y); \quad (2.86)$$

$$\beta(S^\varepsilon) \rightarrow \beta(S) \quad \text{fortement dans } L^q(\Omega_T) \quad \forall 1 \leq q < +\infty; \quad (2.87)$$

$$\nabla \beta^\varepsilon(x, t) \xrightarrow{2s} \nabla \beta(x, t) + \nabla_y w_s(x, t, y), \quad (2.88)$$

où la fonction β^ε est définie par (1.26) ;

$$\Theta_g^\varepsilon(\beta^\varepsilon, P^\varepsilon) \rightarrow \Theta_g \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega_T) \text{ et p.p. dans } \Omega_T; \quad (2.89)$$

$$\Theta_l^\varepsilon(\beta^\varepsilon, P^\varepsilon) \rightarrow \Theta_l \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega_T) \text{ et p.p. dans } \Omega_T, \quad (2.90)$$

où

$$\Theta_l = S\rho_l(P + G_l(S)), \quad \text{et } \Theta_g = (1 - S)\rho_g(P + G_g(S)).$$

Preuve du Théorème 2.7.5

1- Prouver que $S^\varepsilon(x, t) \rightarrow S(x, t)$ fortement dans $L^q(\Omega_T)$, $1 \leq q < +\infty$.

La convergence forte de S^ε dans $L^q(\Omega_T)$ est une conséquence directe de la Proposition 2.7.1, sa convergence p.p. dans Ω_T vient de la Proposition 2.7.4.

2- Prouver que $P^\varepsilon(x, t) \rightarrow P(x, t)$ faiblement dans $L^2(0, T; H^1(\Omega))$.

L'espace $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ est réflexif, et on sait par le Lemme 2.7.3 que P^ε est bornée dans $L^2(0, T; H^1(\Omega))$. On conclut qu'on peut extraire de la suite P^ε , une sous-suite faiblement convergente dans $L^2(0, T; H^1(\Omega))$.

On sait par la Proposition 2.7.4 que $P^\varepsilon(x, t)$ converge presque partout vers $P(x, t)$ dans Ω_T .

3- Prouver que

$$\nabla P^\varepsilon(x, t) \xrightarrow{2s} \nabla P(x, t) + \nabla_y w_p(x, t, y)$$

Puisque P^ε (resp. ∇P^ε) est une suite bornée dans $L^2(\Omega_T)$ (resp. dans $[L^2(\Omega_T)]^n$), alors elle converge à deux échelles vers une limite $P_0(t, x, y) \in L^2(\Omega_T \times Y)$ (resp. $\chi_0(t, x, y) \in [L^2(\Omega_T \times Y)]^n$). Donc, pour tout $\psi(t, x, y) \in \mathcal{D}[\Omega_T; \mathcal{C}_\#^\infty(Y)]$, et pour tout $\Psi(t, x, y) \in \mathcal{D}[\Omega_T; \mathcal{C}_\#^\infty(Y)]^n$, on a :

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_T} P^\varepsilon(x, t) \cdot \psi(x, t) dx dt &= \int_{\Omega_T} \int_Y P_0(t, x, y) \cdot \psi(t, x, y) dx dy dt \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_T} \nabla P^\varepsilon(x, t) \cdot \Psi(x, t) dx dx &= \int_{\Omega_T} \int_Y \chi_0(t, x, y) \cdot \Psi(x, t, y) dx dy dt \end{aligned} \quad (2.91)$$

On a par intégration par parties que :

$$\varepsilon \int_{\Omega_T} \nabla P^\varepsilon(x, t) \cdot \Psi\left(x, t, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx = - \int_{\Omega_T} P^\varepsilon(x, t) \left[\operatorname{div}_y \Psi\left(x, t, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon \operatorname{div}_x \Psi\left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right] dx dt$$

Alors, en passant à la limite dans l'équation (2.91), on obtient :

$$0 = - \int_{\Omega_T} \int_Y P_0(t, x, y) \operatorname{div}_y \Psi(t, x, y) dt dx dy$$

ce qui signifie que $P_0(t, x, y)$ ne dépend pas de y . On en déduit que P^ε converge à deux échelles vers P_0 .

Maintenant, dans la relation (2.91), on choisit une fonction Ψ telle que $\operatorname{div}_y \Psi(t, x, y) = 0$. On obtient donc par l'intégration par parties que :

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_T} P^\varepsilon(x, t) \operatorname{div}_x \Psi\left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx dt &= - \int_{\Omega_T} \int_Y \chi_0(t, x, y) \cdot \Psi(t, x, y) dx dt dy \\ &= \int_{\Omega_T} \int_Y P(t, x, y) \cdot \operatorname{div}_x \Psi(t, x, y) dt dx dy \end{aligned}$$

Donc, pour toute fonction $\Psi \in \mathcal{D}[\Omega_T; \mathcal{C}_\#^\infty(Y)]^n$, avec $\operatorname{div}_y \Psi(t, x, y) = 0$, on a :

$$\int_{\Omega_T} \int_Y [\chi_0(t, x, y) \cdot \nabla_y P(x, t)] \cdot \Psi(t, x, y) dx dy dt = 0. \quad (2.92)$$

On rappelle que l'orthogonale des fonctions à divergence nulle est exactement leurs gradients. On en déduit donc qu'il existe une fonction unique $w_p(t, x, y) \in L^2 [\Omega_T; H^1(Y)/\mathbb{R}]$ telle que

$$\chi_0(x, t, y) = \nabla P(x, t) + \nabla_y w_p(t, x, y).$$

4- Prouver que

$$\beta(S^\varepsilon) \longrightarrow \beta(S) \text{ fortement dans } L^q(\Omega_T) \text{ pour tout } 1 \leq q < +\infty.$$

Puisque la fonction β^ε est continue, et que par le point 1, que la fonction S^ε converge fortement vers $S(x, t)$ dans $L^q(\Omega_T)$, on en déduit que $\beta(S^\varepsilon) \longrightarrow \beta(S)$ fortement dans $L^q(\Omega_T)$.

5- Prouver que

$$\nabla \beta^\varepsilon(x, t) \xrightarrow{2s} \nabla \beta(x, t) + \nabla_y w_s(t, x, y).$$

On prouve ce point exactement de la même manière que le point 2.

6. Prouver que

$$\Theta_g^\varepsilon(\beta^\varepsilon, P^\varepsilon) \rightarrow \Theta_g \text{ fortement dans } L^2(\Omega_T) \text{ et p.p. dans } \Omega_T.$$

C'est un résultat direct du Corollaire 2.7.2.

7. Prouver que

$$\Theta_l^\varepsilon(\beta^\varepsilon, P^\varepsilon) \rightarrow \Theta_l \text{ fortement dans } L^2(\Omega_T) \text{ et p.p. dans } \Omega_T.$$

C'est un résultat direct de la Proposition 2.7.3.

Passage à la limite dans (2.20). On pose

$$\varphi_l \left(x, \frac{x}{\varepsilon}, t \right) = \varphi(x, t) + \varepsilon \zeta \left(x, \frac{x}{\varepsilon}, t \right) = \varphi(x, t) + \varepsilon \zeta_1(x, t) \zeta_2 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right), \quad (2.93)$$

où $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_T)$, $\zeta_1 \in \mathcal{D}(\Omega_T)$, et $\zeta_2 \in \mathcal{C}_\#^\infty$, et on injecte la fonction φ_l dans (2.20). Ce qui nous donne

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega_T} \Phi^\varepsilon(x) \Theta_l^\varepsilon \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial \zeta^\varepsilon}{\partial t} \right] dx dt + \\ & + \int_{\Omega_T} K^\varepsilon(x) \tilde{\rho}_l^\varepsilon \{ \lambda_l(S^\varepsilon) \nabla P^\varepsilon + \nabla \beta^\varepsilon - \tilde{\rho}_l^\varepsilon \lambda_l(S^\varepsilon) \vec{g} \} \cdot [\nabla \varphi + \varepsilon \nabla_x \zeta^\varepsilon + \nabla_y \zeta^\varepsilon] dx dt = 0. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Maintenant, en passant à la limite à deux-échelles dans (2.94), on trouve

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega_T \times Y} \Phi(y) \Theta_l \frac{\partial \varphi}{\partial t} dy dx dt + \int_{\Omega_T \times Y} K(y) \tilde{\rho}_l^H \{ \lambda_l(S) [\nabla P + \nabla_y w_p] + \\ & + [\nabla \beta + \nabla_y w_s] - \lambda_l(S) \tilde{\rho}_l^H \vec{g} \} \cdot [\nabla \varphi + \zeta_1 \nabla_y \zeta_2] dy dx dt = 0, \end{aligned} \quad (2.95)$$

où $\tilde{\rho}_l^H = \rho_l(P + G_l(S))$ et $\Theta_l = S \tilde{\rho}_l^H$.

Passage à la limite dans (2.21). On pose

$$\varphi_g \left(x, \frac{x}{\varepsilon}, t \right) = \varphi(x, t) + \varepsilon \zeta \left(x, \frac{x}{\varepsilon}, t \right) = \varphi(x, t) + \varepsilon \zeta_1(x, t) \zeta_2 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right), \quad (2.96)$$

où $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_T)$, $\zeta_1 \in \mathcal{D}(\Omega_T)$, et $\zeta_2 \in \mathcal{C}_\#^\infty$, et on injecte la fonction φ_g dans (2.21). Ce qui nous donne

$$- \int_{\Omega_T} \Phi^\varepsilon(x) \Theta_g^\varepsilon \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial \zeta^\varepsilon}{\partial t} \right] dx dt +$$

$$+ \int_{\Omega_T} K^\varepsilon(x) \tilde{\rho}_g^\varepsilon \left\{ \lambda_g(S^\varepsilon) \nabla P^\varepsilon - \nabla \beta^\varepsilon - \tilde{\rho}_g^\varepsilon \lambda_g(S^\varepsilon) \vec{g} \right\} \cdot [\nabla \varphi + \varepsilon \nabla_x \zeta^\varepsilon + \nabla_y \zeta^\varepsilon] dx dt = 0. \quad (2.97)$$

Maintenant, en passant à la limite à deux-échelles dans (2.97), on trouve

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega_T \times Y} \Phi(y) \Theta_g \frac{\partial \varphi}{\partial t} dy dx dt + \int_{\Omega_T \times Y} K(y) \tilde{\rho}_g^H \left\{ \lambda_g(S) [\nabla P + \nabla_y w_p] - \right. \\ & \left. - [\nabla \beta + \nabla_y w_s] - \lambda_g(S) \tilde{\rho}_g^H \vec{g} \right\} \cdot [\nabla \varphi + \zeta_1 \nabla_y \zeta_2] dy dx dt = 0, \end{aligned} \quad (2.98)$$

où $\tilde{\rho}_g^H = \rho_g(P + G_g(S))$ et $\Theta_g = (1 - S) \tilde{\rho}_g^H$.

Équations pour les fonctions w_p, w_s .

- **Identification de w_p** : Nous allons identifier la fonction w_p . En considérant (2.95) et (2.98), et en posant $\varphi \equiv 0$, on obtient :

$$\int_Y K(y) \tilde{\rho}_l^H \left\{ \lambda_l(S) [\nabla P + \nabla_y w_p - \tilde{\rho}_l^H \vec{g}] + [\nabla \beta + \nabla_y w_s] \right\} \cdot \nabla_y \xi_2 dy = 0, \quad (2.99)$$

et

$$\int_Y K(y) \tilde{\rho}_g^H \left\{ \lambda_g(S) [\nabla P + \nabla_y w_p - \tilde{\rho}_l^H \vec{g}] - [\nabla \beta + \nabla_y w_s] \right\} \cdot \nabla_y \xi_2 dy = 0. \quad (2.100)$$

En prenant en compte le fait que $\tilde{\rho}_l^H$ et $\tilde{\rho}_g^H$ soient strictement positives, et ne dépendent pas de y , on a :

$$\int_Y K(y) \left\{ \lambda_l(S) [\nabla P + \nabla_y w_p - \tilde{\rho}_l^H \vec{g}] + [\nabla \beta + \nabla_y w_s] \right\} \cdot \nabla_y \xi_2 dy = 0, \quad (2.101)$$

et

$$\int_Y K(y) \left\{ \lambda_g(S) [\nabla P + \nabla_y w_p - \tilde{\rho}_g^H \vec{g}] - [\nabla \beta + \nabla_y w_s] \right\} \cdot \nabla_y \xi_2 dy = 0. \quad (2.102)$$

En sommant (2.101) et (2.102), on obtient :

$$\int_Y K(y) \left\{ \lambda(S) [\nabla P + \nabla_y w_p] - [\lambda_l(S) \tilde{\rho}_l^H + \lambda_g(S) \tilde{\rho}_g^H] \vec{g} \right\} \cdot \nabla_y \xi_2 dy = 0. \quad (2.103)$$

En prenant en compte la condition **(H.4)**, on a par (2.103) :

$$\int_Y K(y) \left\{ \nabla P - B(S, P) \vec{g} + \nabla_y w_p \right\} \cdot \nabla \xi_2(y) dy = 0, \quad (2.104)$$

où

$$B(S, P) = \frac{\lambda_l(S) \tilde{\rho}_l^H + \lambda_g(S) \tilde{\rho}_g^H}{\lambda(S)}.$$

On procède maintenant de manière standard (voir par exemple [?]). Soit ξ_j la solution Y -périodique de :

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \{K(y) [\nabla_y \xi_j + \vec{e}_j^\lambda]\} = 0 & \text{dans } Y, \\ y \mapsto \xi_j(y) & Y\text{-périodique,} \end{cases}$$

où \vec{e}_j^λ est la j -ième coordonnée du vecteur unité.

Alors, la fonction w_p peut être représentée par :

$$w_p(x, t, y) = \sum_{j=1}^d \xi_j(y) \left(\frac{\partial P}{\partial x_j}(x, t) - B(S, P) g_j \right). \quad (2.105)$$

-Identification de w_s . Nous allons maintenant identifier la fonction w_s . Par (2.101) et (2.106), on a :

$$\int_Y K(y) \left\{ \lambda_l(S) B(S, P) \vec{g} - \lambda_l(S) \tilde{\rho}_l^H \vec{g} + [\nabla\beta + \nabla_y w_s] \right\} \cdot \nabla_y \xi_2(y) dy = 0.$$

Par cette équation, on a :

$$\int_Y K(y) [\nabla\beta + \nabla_y w_s] \cdot \nabla_y \xi_2(y) dy = - \int_Y K(y) \left\{ \lambda_l(S) [B(S, P) - \tilde{\rho}_l^H] \vec{g} \right\} \cdot \nabla_y \xi_2(y) dy. \quad (2.106)$$

Dans (2.106), on a :

$$\begin{aligned} B(S, P) - \tilde{\rho}_l^H &= \frac{\lambda_l(S) \tilde{\rho}_l^H + \lambda_g(S) \tilde{\rho}_g^H}{\lambda(S)} - \tilde{\rho}_l^H \\ &= \frac{\lambda_l(S) \tilde{\rho}_l^H + \lambda_g(S) \tilde{\rho}_g^H - \lambda_l(S) \tilde{\rho}_l^H - \lambda_g(S) \tilde{\rho}_l^H}{\lambda(S)} = \lambda_g(S) \frac{\tilde{\rho}_g^H - \tilde{\rho}_l^H}{\lambda(S)}. \end{aligned}$$

Ainsi, on pose :

$$E(S, P) = \frac{\lambda_l(S) \lambda_g(S)}{\lambda(S)} [\tilde{\rho}_l^H - \tilde{\rho}_g^H]. \quad (2.107)$$

Maintenant, par (2.106) et (2.107), on a l'équation suivante en fonction de w_s :

$$\int_Y K(y) [\nabla\beta - E(S, P) \vec{g} + \nabla_y w_s] \cdot \nabla_y \xi_2(y) dy = 0. \quad (2.108)$$

Alors, on peut représenter la fonction w_s par :

$$w_s(x, y, t) = \sum_{j=1}^d \xi_j(y) \left(\frac{\partial \beta}{\partial x_j}(x, t) - E(S, P) g_j \right). \quad (2.109)$$

Équations homogénéisées (équations en fonction de S et P). Commençons par considérer l'équation (2.95). En posant $\xi_2 = 0$, on obtient :

$$- \int_{\Omega_T \times Y} \Phi(y) \Theta_l \frac{\partial \varphi}{\partial t} dy dx dt \quad (2.110)$$

$$+ \int_{\Omega_T \times Y} K(y) \tilde{\rho}_l^H \left\{ \lambda_l(S) [\nabla P + \nabla_y w_p] + [\nabla\beta(S) + \nabla_y w_s] - \lambda_l(S) \tilde{\rho}_l^H \vec{g} \right\} \cdot \nabla \varphi dy dx dt = 0.$$

On écrit cette équation de la manière suivante :

$$\langle \Phi \rangle \frac{\partial \Theta_l}{\partial t} - \quad (2.111)$$

$$\begin{aligned} & - \operatorname{div}_x \left\{ \int_Y K(y) \tilde{\rho}_l^H \lambda_l(S) [\nabla P + \nabla_y w_p - B(S, P) \vec{g}] dy + \int_Y K(y) \tilde{\rho}_l^H \lambda_l(S) [B(S, P) - \tilde{\rho}_l^H] \vec{g} dy \right\} \\ & - \operatorname{div}_x \left\{ \int_Y K(y) \tilde{\rho}_l^H [\nabla\beta + \nabla_y w_s - E(S, P) \vec{g}] dy + \int_Y K(y) \tilde{\rho}_l^H E(S, P) \vec{g} dy \right\} dy = 0. \end{aligned}$$

En prenant en compte les définitions de $B(S, P)$ et $E(S, P)$, on a par (2.111) :

$$\langle \Phi \rangle \frac{\partial \Theta_l}{\partial t} -$$

$$\begin{aligned}
 & -\operatorname{div}_x \left\{ \int_Y K(y) \tilde{\rho}_l^H \lambda_l(S) [\nabla P + \nabla_y w_p - B(S, P) \vec{g}] dy \right\} - \\
 & -\operatorname{div}_x \left\{ \int_Y K(y) \tilde{\rho}_l^H [\nabla \beta(S) + \nabla_y w_s - E(S, P) \vec{g}] dy \right\} = 0.
 \end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant les représentations des fonctions correctrices w_p et w_s , on trouve :

$$\langle \Phi \rangle \frac{\partial \Theta_l}{\partial t} - \operatorname{div}_x \left\{ \mathbb{K}^* \lambda_l(S) \tilde{\rho}_l^H [\nabla P - B(S, P) \vec{g}] + \mathbb{K}^* \tilde{\rho}_l^H [\nabla \beta(S) - E(S, P) \vec{g}] \right\} = 0. \quad (2.112)$$

Maintenant, il est simple de voir que

$$\lambda_l(S) B(S, P) + E(S, P) = \lambda_l(S) \tilde{\rho}_l^H.$$

Ainsi, on a par (2.112) :

$$\langle \Phi \rangle \frac{\partial \Theta_l}{\partial t} - \operatorname{div}_x \left\{ \mathbb{K}^* \tilde{\rho}_l^H \left[\lambda_l(S) \nabla P + \nabla \beta(S) - \lambda_l(S) \tilde{\rho}_l^H \vec{g} \right] \right\} = 0. \quad (2.113)$$

Équation homogénéisée de la phase gaz. On passe maintenant à la dérivation de l'équation homogénéisée de la phase gazeuse. En choisissant $\xi_2 = 0$ dans (2.98), on obtient :

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\Omega_T \times Y} \Phi(y) \Theta_g \frac{\partial \varphi}{\partial t} dy dx dt \quad (2.114) \\
 & + \int_{\Omega_T \times Y} K(y) \tilde{\rho}_g^H \left\{ \lambda_g(S) [\nabla P + \nabla w_p] - [\nabla \beta + \nabla_y w_s] - \lambda_g(S) \tilde{\rho}_g^H \vec{g} \right\} \cdot \nabla \varphi dy dx dt.
 \end{aligned}$$

On écrit cette équation de la manière suivante :

$$\langle \Phi \rangle \frac{\partial \Theta_g}{\partial t} - \quad (2.115)$$

$$\begin{aligned}
 & -\operatorname{div}_x \left\{ \int_Y K(y) \tilde{\rho}_g^H \lambda_g(S) [\nabla P + \nabla_y w_p - B(S, P) \vec{g}] dy + \int_Y K(y) \tilde{\rho}_g^H \lambda_g(S) [B(S, P) - \tilde{\rho}_g^H] \vec{g} dy \right\} \\
 & + \operatorname{div}_x \left\{ \int_Y K(y) [\nabla \beta + \nabla_y w_s - E(S, P) \vec{g}] dy + \int_Y K(y) \tilde{\rho}_g^H E(S, P) \vec{g} dy \right\} = 0.
 \end{aligned}$$

Calculons la somme :

$$\begin{aligned}
 & -\lambda_g(S) B(S, P) + \lambda_g(S) \tilde{\rho}_g^H + E(S, P) = -\lambda_g(S) B(S, P) + \lambda_g(S) \tilde{\rho}_g^H - \lambda_g(S) [B(S, P) - \tilde{\rho}_g^H] = \\
 & = -\lambda_g(S) B(S, P) + \lambda_g(S, P) \tilde{\rho}_g^H - \lambda_g(S) B(S, P) + \lambda_g(S) \tilde{\rho}_g^H = -\lambda(S) B(S, P) + \lambda_g(S) \tilde{\rho}_g^H = \\
 & = -\lambda(S) B(S, P) + \lambda(S) B(S, P) = 0. \text{ En prenant en compte les définitions des fonctions } B(S, P) \text{ et } E(S, P), \text{ on a par (2.115) :}
 \end{aligned}$$

$$\langle \Phi \rangle \frac{\partial \Theta_g}{\partial t} \quad (2.116)$$

$$\begin{aligned}
 & -\operatorname{div}_x \left\{ \int_Y K(y) \lambda_g(S) \tilde{\rho}_g^H [\nabla P + \nabla_y w_p - B(S, P) \vec{g}] dy \right\} + \\
 & + \operatorname{div}_x \left\{ \int_Y K(y) \lambda_g(S) \tilde{\rho}_g^H [\nabla \beta + \nabla_y w_s - E(S, P) \vec{g}] dy \right\} = 0.
 \end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant les représentations des fonctions correctrices w_p et w_s , on trouve :

$$\langle \Phi \rangle \frac{\partial \Theta_g}{\partial t} - \operatorname{div}_x \left\{ \mathbb{K}^* \lambda_g(S) \tilde{\rho}_g^H [\nabla P - B(S, P) \vec{g}] - \mathbb{K}^* \tilde{\rho}_g^H [\nabla \beta - E(S, P) \vec{g}] \right\} = 0. \quad (2.117)$$

Il est simple de voir, que :

$$\begin{aligned} -\lambda_g(S)B(S, P) + E(S, P) &= -\lambda_g(S)B(S, P) - \lambda_l(S) \left[B(S, P) - \tilde{\rho}_g^H \right] = -\lambda(S)B(S, P) + \lambda_l(S) \tilde{\rho}_l^H \\ &= -\lambda_g(S) \tilde{\rho}_g^H - \lambda_g^H + \lambda_l(S) \tilde{\rho}_l^H = -\lambda_g(S) \tilde{\rho}_g^H. \end{aligned}$$

Finalement, on trouve par (2.117) :

$$\langle \Phi \rangle \frac{\partial \Theta_g}{\partial t} - \operatorname{div}_x \left\{ \mathbb{K}^* \tilde{\rho}_g^H \left[\lambda_g(S) \nabla P - \nabla \beta(S) - \lambda_g(S) \tilde{\rho}_g^H \vec{g} \right] \right\} = 0. \quad (2.118)$$

2.8 Modèle homogénéisé en terme de *pressions phasiques*

Nous allons maintenant, écrire le problème homogénéisé en fonction de la saturation et *pressions phasiques homogénéisées*.

Considérons l'équation homogénéisée (2.95) :

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega_T \times Y} \Phi(y) \Theta_l \frac{\partial \varphi}{\partial t} dy dx dt + \int_{\Omega_T \times Y} K(Y) \tilde{\rho}_l^H \{ \lambda_l(S) [\nabla P + \nabla_y w_p] \\ + [\nabla \beta + \nabla_y w_s] - \lambda_l(S) \tilde{\rho}_l^H \vec{g} \} \cdot [\nabla \varphi + \zeta_1 \nabla_y \zeta_2] dy dx dt = 0 \end{aligned} \quad (2.119)$$

et introduisons les fonctions dites *pressions phasiques homogénéisées*. On pose :

$$p_l = P + G_l(S) \quad \text{et} \quad p_g = P + G_g(S) \quad (2.120)$$

Maintenant, on réécrit l'équation (2.119) de la manière suivante :

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega_T \times Y} \Phi(y) \Theta_l \frac{\partial \varphi}{\partial t} dy dx dt + \\ + \int_{\Omega_T \times Y} K(y) \tilde{\rho}_l^H \{ \lambda_l(S) [\nabla p_l - \tilde{\rho}_l^H \vec{g}] + \lambda_l(S) \nabla_y V_l \} \cdot [\nabla \varphi + \zeta_1 \nabla_y \zeta_2] dy dx dt = 0 \end{aligned} \quad (2.121)$$

avec

$$V_l = w_p + \frac{1}{\lambda_l(S)} w_s. \quad (2.122)$$

D'une manière similaire, en prenant en compte la définition de la fonction P_g , on a par (2.98) :

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega_T \times Y} \Phi(y) \Theta_g \frac{\partial \varphi}{\partial t} dy dx dt + \\ \int_{\Omega_T \times Y} K(y) \tilde{\rho}_g^H \left\{ \lambda_g(S) \left[\nabla P_g - \tilde{\rho}_g^H \vec{g} \right] + \lambda_g(S) \nabla_y V_g \right\} \cdot [\nabla \varphi + \xi_1 \nabla_y \xi_2] dy dx dt = 0, \end{aligned} \quad (2.123)$$

où

$$V_g = w_p - \frac{1}{\lambda_g(S)} w_s. \quad (2.124)$$

De manière standard, on représente les fonctions V_l , et V_g en fonction des gradients des fonctions p_l et p_g , par :

$$V_l = \sum_{j=1}^d \xi_j(y) \left(\frac{\partial p_l}{\partial x_j}(x, t) - \tilde{\rho}_l^H g_j \right) \quad \text{et} \quad V_g = \sum_{j=1}^d \xi_j(y) \left(\frac{\partial p_g}{\partial x_j}(x, t) - \tilde{\rho}_g^H g_j \right), \quad (2.125)$$

où $\xi_j(y)$ est la solution du problème local (2.26). De plus, il vient de (2.125) et du Lemme (2.45), que $\sqrt{\lambda_l(S)}V_l, \sqrt{\lambda_g(S)}V_g \in L^2(\Omega_T; H_{per}^1(Y))$.

Maintenant, en prenant en compte la représentation (2.125) et la définition du tenseur homogénéisé (2.25), on obtient le système globale en terme de *pressions phasiques homogénéisées* p_l, p_g :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq S \leq 1 \quad \text{dans } \Omega_T; \\ \langle \Phi \rangle \frac{\partial \Theta_l}{\partial t} - \text{div}_x \left\{ \mathbb{K}^* \tilde{\rho}_l^H \lambda_l(S) \left[\nabla p_l - \tilde{\rho}_l^H \vec{g} \right] \right\} = 0 \quad \text{dans } \Omega_T; \\ \langle \Phi \rangle \frac{\partial \Theta_g}{\partial t} - \text{div}_x \left\{ \mathbb{K}^* \tilde{\rho}_g^H \lambda_g(S) \left[\nabla p_g - \tilde{\rho}_g^H \vec{g} \right] \right\} = 0 \quad \text{dans } \Omega_T; \\ P_c(S) = p_g - p_l \quad \text{dans } \Omega_T. \end{array} \right. \quad (2.126)$$

Le système (2.126) est complété par les conditions au bord et les conditions initiales suivantes :

$$S(x, t) = S^1(x, t) \quad \text{et} \quad p_g(x, t) = p_g^1(x, t) \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (2.127)$$

$$\mathbb{K}^* \tilde{\rho}_l^H \lambda_l(S) \left[\nabla p_l - \tilde{\rho}_l^H \vec{g} \right] \cdot \vec{\nu} = \mathbb{K}^* \tilde{\rho}_g^H \lambda_g(S) \left[\nabla p_g - \tilde{\rho}_g^H \vec{g} \right] \cdot \vec{\nu} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T). \quad (2.128)$$

Finalement, les conditions initiales sont :

$$S(x, 0) = S^0(x) \quad \text{et} \quad p_g(x, 0) = p_g^0(x) \quad \text{dans } \Omega. \quad (2.129)$$

Ainsi, nous avons le théorème suivant :

Théorème 2.8.1 *Soient les hypothèses (H.1)–(H.8) satisfaites. Alors, la solution du problème initiale (2.7)–(2.10) converge à deux-échelles (à une sous-suite près), vers la solution du problème homogénéisé (2.126)–(2.129).*

Chapitre 3

Homogénéisation d'un modèle diphasique compressible en milieu poreux à double porosité.

On reprend ici le texte intégral d'un article publié, dont le titre est

Homogenization Of Immiscible Compressible Two-Phase Flow In Double Porosity Media.

Latifa AIT MAHIOUT, Brahim AMAZIANE, Abdelhafid MOKRANE, Leonid PANKRATOV.

Résumé. Ce chapitre présente l'étude d'un écoulement diphasique immiscible et compressible liquide-gaz, dans un milieu poreux à double porosité. Le modèle microscopique est obtenu par les équations de conservation de la masse de chaque phase, et la loi standard de Darcy-Muskat. Le problème est écrit sous une formulation telle que les inconnues primaires sont la pression et la saturation du liquide. Le milieu est constitué de fractures et de blocs répartis de manière périodique, telle que la perméabilité absolue du milieu est discontinue. Par conséquent, le modèle comprend des caractéristiques très oscillantes. La principale difficulté dans l'étude de ce modèle est la dégénérescence de ses équations couplées et non linéaires. On obtient la convergence des solutions, ainsi que le modèle macroscopique, en utilisant la notion de convergence à deux échelles, et la technique de dilatation.

HOMOGENIZATION OF IMMISCIBLE COMPRESSIBLE TWO-PHASE FLOW IN DOUBLE POROSITY MEDIA

LATIFA AIT MAHIOUT, BRAHIM AMAZIANE,
ABDELHAFID MOKRANE, LEONID PANKRATOV

ABSTRACT. A double porosity model of multidimensional immiscible compressible two-phase flow in fractured reservoirs is derived by the mathematical theory of homogenization. Special attention is paid to developing a general approach to incorporating compressibility of both phases. The model is written in terms of the phase formulation, i.e. the saturation of one phase and the pressure of the second phase are primary unknowns. This formulation leads to a coupled system consisting of a doubly nonlinear degenerate parabolic equation for the pressure and a doubly nonlinear degenerate parabolic diffusion-convection equation for the saturation, subject to appropriate boundary and initial conditions. The major difficulties related to this model are in the doubly nonlinear degenerate structure of the equations, as well as in the coupling in the system. Furthermore, a new nonlinearity appears in the temporal term of the saturation equation. The aim of this paper is to extend the results of [9] to this more general case. With the help of a new compactness result and uniform a priori bounds for the modulus of continuity with respect to the space and time variables, we provide a rigorous mathematical derivation of the upscaled model by means of the two-scale convergence and the dilatation technique.

1. INTRODUCTION

The modeling of displacement process involving two immiscible fluids is of considerable importance in groundwater hydrology and reservoir engineering such as petroleum and environmental problems. More recently, modeling multiphase flow received an increasing attention in connection with gas migration in a nuclear waste repository and sequestration of CO_2 . Furthermore, fractured rock domains corresponding to the so-called Excavation Damaged Zone (EDZ) receives increasing attention in connection with the behaviour of geological isolation of radioactive waste after the drilling of the wells or shafts, see, e.g., [50].

A fissured medium is a structure consisting of a porous and permeable matrix which is interlaced on a fine scale by a system of highly permeable fissures. The majority of fluid transport will occur along flow paths through the fissure system, and the relative volume and storage capacity of the porous matrix is much larger

2010 *Mathematics Subject Classification*. 35B27, 35K65, 76S05, 76T10.

Key words and phrases. Compressible immiscible; double porous media; two-phase flow; fractured media homogenization; two-scale convergence.

©2016 Texas State University.

Submitted February 2, 2016. Published February 18, 2016.

than that of the fissure system. When the system of fissures is so well developed that the matrix is broken into individual blocks or cells that are isolated from each other, there is consequently no flow directly from cell to cell, but only an exchange of fluid between each cell and the surrounding fissure system. Therefore the large-scale description will have to incorporate the two different flow mechanisms. For some permeability ratios and fissure widths, the large-scale description is achieved by introducing the so-called double porosity model. It was introduced first for describing the global behaviour of fractured porous media by Barenblatt et al. [16]. It has been since used in a wide range of engineering specialties related to geohydrology, petroleum reservoir engineering, civil engineering or soil science. For more details on the physical formulation of such problems see, e.g., [17, 49, 51].

During recent decades mathematical analysis and numerical simulation of multiphase flows in porous media have been the subject of investigation of many researchers owing to important applications in reservoir simulation. There is an extensive literature on this subject. We will not attempt a literature review here but will merely mention a few references. Here we restrict ourselves to the mathematical analysis of such models. We refer, for instance, to the books [13, 27, 31, 36, 43, 45, 52] and the references therein. The mathematical analysis and the homogenization of the system describing the flow of two incompressible immiscible fluids in porous media is quite understood. Existence, uniqueness of weak solutions to these equations, and their regularity has been shown under various assumptions on physical data; see for instance [3, 13, 14, 25, 27, 28, 29, 36, 48] and the references therein. A recent review of the mathematical homogenization methods developed for incompressible immiscible two-phase flow in porous media and compressible miscible flow in porous media can be viewed in [4, 44, 45]. We refer for instance to [18, 19, 20, 21, 22, 41, 42] for more information on the homogenization of incompressible, single phase flow through heterogeneous porous media in the framework of the geological disposal of radioactive waste.

The double porosity problem was first studied in [15], and was then revisited in the mathematical literature by many other authors. Here we restrict myself to the mathematical homogenization method as described in [45] for flow and transport in porous media. For a recent review of the methods developed for flow through double porosity media, we refer for instance to [12, 15, 23, 30, 32, 34, 53] and the references therein.

However, as reported in [9], the situation is quite different for immiscible compressible two-phase flow in porous media, where, only recently few results have been obtained. In the case of immiscible two-phase flows with one (or more) compressible fluids without any exchange between the phases, some approximate models were studied in [37, 38, 39]. Namely, in [37] certain terms related to the compressibility are neglected, and in [38, 39] the mass densities are assumed not to depend on the physical pressure, but on Chavent's global pressure. In the articles [26, 40, 46, 47], a more general immiscible compressible two-phase flow model in porous media is considered for fields with a single rock type and [10] treated the case with several types of rocks. In [4, 11] homogenization results were obtained for water-gas flow in porous media using the phase formulation, i.e. where the phase pressures and the phase saturations are primary unknowns.

Let us also mention that, recently, a different approach based on a new global pressure concept was introduced in [5, 7] for modeling immiscible, compressible

two-phase flow in porous media without any simplifying assumptions. The resulting equations are written in a fractional flow formulation and lead to a coupled system which consists of a nonlinear parabolic equation (the global pressure equation) and a nonlinear diffusion-convection one (the saturation equation). This new formulation is fully equivalent to the original phase equations formulation, i.e. where the phase pressures and the phase saturations are primary unknowns. For this model, an existence result is obtained in [8] and homogenization results in [6].

Let us note that all the aforementioned homogenization works are restricted to the case where the wetting phase (water) is incompressible while the non-wetting phase (gas) is compressible, contrarily to the present work. In this paper we extend our previous results obtained in [9] to the more complex case where both phases are compressible which is more reasonable in gas reservoir engineering. The major difficulties related to this model are in the nonlinear degenerate structure of the equations, as well as in the coupling in the system. In this case a new nonlinearity appears in the temporal term of the saturation equation. The compactness result used in [9] is no longer valid. To obtain these results we elaborated a new approach based on the ideas from [24, 35] to establish a new compactness result and uniform a priori bounds for the modulus of continuity with respect to the space and time variables.

In this paper, we will be concerned with a degenerate nonlinear system of diffusion-convection equations in a periodic domain modeling the flow and transport of immiscible compressible fluids through heterogeneous porous media, taking into account capillary and gravity effects. We consider double porosity media, i.e. we consider a porous medium made up of a set of porous blocks with permeability of order ε^2 surrounded by a system of connected fissures, ε , is a small parameter which characterizes the periodicity of the blocks. There are two kinds of degeneracy in the studied system. The first one is the classical degeneracy of the capillary diffusion term and the second one represents the evolution terms degeneracy. In both cases the presence of degeneracy weakens the energy estimates and makes a proof of compactness results more involved.

The outline of the rest of the paper is as follows. In Section 2 we describe the physical model and formulate the corresponding mathematical problem. We also provide the assumptions on the data and a weak formulation of the problem in terms of the global pressure and the saturation. Section 3 is devoted to the presentation of some *a priori* estimates for the solutions of the problem. They are essentially based on an energy equality. In Section 4, firstly we construct the extensions of the saturation and the global pressure functions defined in the fissures system and secondly we prove a compactness result adapted to our model. It's based on the compactness criterion of Kolmogorov–Riesz–Fréchet (see, e.g., [24, 35]). Finally, we formulate the corresponding two-scale convergence results. In Section 5 we are dealing with the dilations of the functions defined in the matrix part. Firstly, we introduce the notion of the dilation operator and describe its properties. Secondly, we derive the system of equations for the dilated functions and obtain the corresponding uniform estimates for them. Finally, we formulate the convergence results for the dilated functions. The main result of the paper is formulated in Section 6 and its proof is given in Section 7. The proof is based on the two-scale convergence and the dilation techniques.

2. FORMULATION OF THE PROBLEM

The outline of the section is as follows. First, in subsection 2.1 we present the model equations which are valid in fractures and rock matrix. A fractional flow formulation using the notion of the global pressure is discussed in subsection 2.2. Then in the last subsection 2.3, we give the definition of a weak solution to our system.

2.1. Microscopic model. We consider a reservoir $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) which is assumed to be a bounded, connected Lipschitz domain with a periodic microstructure. More precisely, we will scale this periodic structure by a parameter ε which represents the ratio of the cell size to the whole region Ω and we assume that $0 < \varepsilon \ll 1$ is a small parameter tending to zero. Let $Y := (0, 1)^d$ be a periodicity cell; we pave \mathbb{R}^d with Y . We assume that Y_m is an open set with piecewise smooth boundary ∂Y_m such that $Y_m \Subset Y$ and we reproduce Y_m by periodicity, obtaining a periodic open set M in \mathbb{R}^d . We denote by F the periodic set $F := \mathbb{R}^d \setminus M$, which is obtained from the set $Y_f := Y \setminus Y_m$. Thus $Y = Y_m \cup Y_f \cup \Gamma_{fm}$, where Γ_{fm} denotes the interface between the two media. Finally, we denote by χ_f and χ_m the characteristic functions of the sets F and M . Then $\chi_m(\frac{x}{\varepsilon})$ is the periodic function of period εY which takes the value 1 in the set M^ε , union of the sets obtained from εY_m by translations of vectors $\varepsilon \sum_{i=1}^n k_i \vec{e}_i$, where $k_i \in \mathbb{Z}$ and \vec{e}_i , $1 \leq i \leq d$, is the canonical basis of \mathbb{R}^d , and which takes the value 0 in the set F^ε , complementary in \mathbb{R}^d of this union. In other words, $\chi_m(\frac{x}{\varepsilon})$ is the characteristic function of the set M^ε , while $\chi_f(\frac{x}{\varepsilon})$ is the characteristic function of F^ε . Now we can define the subdomains Ω_r^ε with $r = "f"$ or $"m"$ corresponding to the porous medium with the index $"r"$. We set:

$$\Omega_m^\varepsilon := \{x \in \Omega : \chi_m^\varepsilon(x) = 1\} \quad \text{and} \quad \Omega_f^\varepsilon := \{x \in \Omega : \chi_f^\varepsilon(x) = 1\}.$$

Then $\Omega = \Omega_m^\varepsilon \cup \Gamma_{fm}^\varepsilon \cup \Omega_f^\varepsilon$, where $\Gamma_{fm}^\varepsilon := \partial\Omega_f^\varepsilon \cap \partial\Omega_m^\varepsilon \cap \Omega$ and the subscript m and f refer to the matrix and fracture, respectively. For the sake of simplicity, we assume that $\Omega_m^\varepsilon \cap \partial\Omega = \emptyset$. We also set:

$$\Omega_T := \Omega \times (0, T), \quad \Omega_{r,T}^\varepsilon := \Omega_r^\varepsilon \times (0, T), \quad \text{and} \quad \Gamma_{f,m}^{\varepsilon,T} := \Gamma_{f,m}^\varepsilon \times (0, T), \quad (2.1)$$

where $T > 0$ is fixed.

We consider an immiscible compressible two-phase flow system in a porous medium which fills the domain Ω . We focus here on the general case where both phases are compressible, the phases being ℓ and g . Let $\Phi^\varepsilon(x)$ be the porosity of the reservoir Ω ; $K^\varepsilon(x)$ be the absolute permeability tensor of Ω ; $S_\ell^\varepsilon = S_\ell^\varepsilon(x, t)$, $S_g^\varepsilon = S_g^\varepsilon(x, t)$ be the phase saturations; $k_{r,\ell} = k_{r,\ell}(S_\ell^\varepsilon)$, $k_{r,g} = k_{r,g}(S_g^\varepsilon)$ be the relative permeabilities of the phases; $p_\ell^\varepsilon = p_\ell^\varepsilon(x, t)$, $p_g^\varepsilon = p_g^\varepsilon(x, t)$ be the phase pressures; ρ_ℓ , ρ_g be the phase densities and P_c the capillary pressure.

In what follows, for the sake of presentation simplicity we neglect the source terms, and we denote $S^\varepsilon = S_\ell^\varepsilon$. The model for the two-phase flow is described by

(see, e.g., [27, 31, 43]):

$$\begin{aligned}
 &0 \leq S^\varepsilon \leq 1 \quad \text{in } \Omega_T; \\
 &\Phi^\varepsilon(x) \frac{\partial \Xi_\ell^\varepsilon}{\partial t} - \operatorname{div} \left\{ K^\varepsilon(x) \lambda_\ell(S^\varepsilon) \rho_\ell(p_\ell^\varepsilon) (\nabla p_\ell^\varepsilon - \rho_\ell(p_\ell^\varepsilon) \vec{g}) \right\} = 0 \quad \text{in } \Omega_T; \\
 &\Phi^\varepsilon(x) \frac{\partial \Xi_g^\varepsilon}{\partial t} - \operatorname{div} \left\{ K^\varepsilon(x) \lambda_g(S^\varepsilon) \rho_g(p_g^\varepsilon) (\nabla p_g^\varepsilon - \rho_g(p_g^\varepsilon) \vec{g}) \right\} = 0 \quad \text{in } \Omega_T; \\
 &P_c(S^\varepsilon) = p_g^\varepsilon - p_\ell^\varepsilon \quad \text{in } \Omega_T,
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

where $\lambda_g(S^\varepsilon) = \tilde{\lambda}_g(1 - S^\varepsilon)$; $\Xi_\ell^\varepsilon := S^\varepsilon \rho_\ell(p_\ell^\varepsilon)$ and $\Xi_g^\varepsilon := (1 - S^\varepsilon) \rho_g(p_g^\varepsilon)$; each function $\gamma^\varepsilon := S^\varepsilon, p_\ell, p_g, \Xi_\ell^\varepsilon$, and Ξ_g^ε is defined as:

$$\gamma^\varepsilon(x, t) = \chi_f^\varepsilon(x) \gamma_f^\varepsilon(x, t) + \chi_m^\varepsilon(x) \gamma_m^\varepsilon(x, t). \tag{2.3}$$

The velocities of the phases $\vec{q}_\ell^\varepsilon, \vec{q}_g^\varepsilon$ are defined by Darcy–Muskat’s law:

$$\vec{q}_\ell^\varepsilon := -K^\varepsilon(x) \lambda_\ell(S_\ell^\varepsilon) (\nabla p_\ell^\varepsilon - \rho_\ell(p_\ell^\varepsilon) \vec{g}) \quad \text{with } \lambda_\ell(S_\ell^\varepsilon) := \frac{k_{r,\ell}(S_\ell^\varepsilon)}{\mu_\ell}; \tag{2.4}$$

$$\vec{q}_g^\varepsilon := -K^\varepsilon(x) \tilde{\lambda}_g(S_g^\varepsilon) (\nabla p_g^\varepsilon - \rho_g(p_g^\varepsilon) \vec{g}) \quad \text{with } \tilde{\lambda}_g(S_g^\varepsilon) := \frac{k_{r,g}(S_g^\varepsilon)}{\mu_g} \tag{2.5}$$

with \vec{g}, μ_ℓ, μ_g being the gravity vector and the viscosities, respectively.

Now we specify the boundary and initial conditions. We suppose that the boundary $\partial\Omega$ consists of two parts Γ_1 and Γ_2 such that $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset, \partial\Omega = \overline{\Gamma_1} \cup \overline{\Gamma_2}$. The boundary conditions are given by

$$p_g^\varepsilon(x, t) = 0 = p_\ell^\varepsilon(x, t) \quad \text{on } \Gamma_1 \times (0, T); \tag{2.6}$$

$$\vec{q}_\ell^\varepsilon \cdot \vec{\nu} = \vec{q}_g^\varepsilon \cdot \vec{\nu} = 0 \quad \text{on } \Gamma_2 \times (0, T). \tag{2.7}$$

Finally, the initial conditions read

$$S^\varepsilon(x, 0) = S^0(x) \quad \text{and} \quad p_g^\varepsilon(x, 0) = p_g^0(x) \quad \text{in } \Omega. \tag{2.8}$$

2.2. A fractional flow formulation. In the sequel, we use a formulation obtained after transformation using the concept of the global pressure introduced in [13, 27]. The global pressure is defined as follows:

$$P^\varepsilon = p_\ell^\varepsilon - G_\ell(S^\varepsilon) = p_g^\varepsilon - G_g(S^\varepsilon), \tag{2.9}$$

where the functions $G_\ell(S^\varepsilon), G_g(S^\varepsilon)$ are given by:

$$G_g(S^\varepsilon) := G_g(0) + \int_0^{S^\varepsilon} \frac{\lambda_\ell(s)}{\lambda(s)} P'_c(s) ds, \tag{2.10}$$

$$G_\ell(S^\varepsilon) = G_g(S^\varepsilon) - P_c(S^\varepsilon), \tag{2.11}$$

with $\lambda(s) := \lambda_\ell(s) + \lambda_g(s)$, the total mobility.

Performing some simple calculations, we obtain the following properties for the global pressure which will be used in the sequel:

$$\lambda_\ell(S^\varepsilon) \nabla p_\ell^\varepsilon + \lambda_g(S^\varepsilon) \nabla p_g^\varepsilon = \lambda(S^\varepsilon) \nabla P^\varepsilon, \tag{2.12}$$

$$\nabla G_\ell(S^\varepsilon) = -\frac{\lambda_g(S^\varepsilon)}{\lambda(S^\varepsilon)} P'_c(S^\varepsilon) \nabla S^\varepsilon. \tag{2.13}$$

Notice that from (2.10), (2.13) we obtain

$$\lambda_\ell(S^\varepsilon) \nabla G_\ell(S^\varepsilon) = \nabla \beta(S^\varepsilon) \quad \text{and} \quad \lambda_g(S^\varepsilon) \nabla G_g(S^\varepsilon) = -\nabla \beta(S^\varepsilon), \tag{2.14}$$

where

$$\beta(S^\varepsilon) := \int_0^{S^\varepsilon} \alpha(u) du \quad \text{with } \alpha(s) := \frac{\lambda_g(s)\lambda_\ell(s)}{\lambda(s)} |P'_c(s)|. \quad (2.15)$$

Furthermore, we have the important relation

$$\lambda_g(S^\varepsilon) |\nabla p_g^\varepsilon|^2 + \lambda_\ell(S^\varepsilon) |\nabla p_\ell^\varepsilon|^2 = \lambda(S^\varepsilon) |\nabla P^\varepsilon|^2 + |\nabla b(S^\varepsilon)|^2, \quad (2.16)$$

where

$$b(s) := \int_0^s a(\xi) d\xi \quad \text{with } a(s) := \sqrt{\frac{\lambda_g(s)\lambda_\ell(s)}{\lambda(s)}} |P'_c(s)|. \quad (2.17)$$

If we use the global pressure and the saturation as new unknown functions, then problem (2.2) reads

$$\begin{aligned} 0 &\leq S^\varepsilon \leq 1 \quad \text{in } \Omega_T; \\ \Phi^\varepsilon(x) \frac{\partial \Theta_\ell^\varepsilon}{\partial t} - \operatorname{div} \left\{ K^\varepsilon(x) \tilde{\rho}_\ell^\varepsilon [\lambda_\ell(S^\varepsilon) \nabla P^\varepsilon + \nabla \beta(S^\varepsilon) - \lambda_\ell(S^\varepsilon) \tilde{\rho}_\ell^\varepsilon \vec{g}] \right\} &= 0 \quad \text{in } \Omega_T; \\ \Phi^\varepsilon(x) \frac{\partial \Theta_g^\varepsilon}{\partial t} - \operatorname{div} \left\{ K^\varepsilon(x) \tilde{\rho}_g^\varepsilon [\lambda_g(S^\varepsilon) \nabla P^\varepsilon - \nabla \beta(S^\varepsilon) - \lambda_g(S^\varepsilon) \tilde{\rho}_g^\varepsilon \vec{g}] \right\} &= 0 \quad \text{in } \Omega_T, \end{aligned} \quad (2.18)$$

we introduced the notation

$$\tilde{\rho}_\ell^\varepsilon := \rho_\ell(P^\varepsilon + G_\ell(S^\varepsilon)) \quad \text{and} \quad \tilde{\rho}_g^\varepsilon := \rho_g(P^\varepsilon + G_g(S^\varepsilon)); \quad (2.19)$$

$$\Theta_\ell^\varepsilon = \Theta_\ell(S^\varepsilon, P^\varepsilon) := S^\varepsilon \tilde{\rho}_\ell^\varepsilon \quad \text{and} \quad \Theta_g^\varepsilon = \Theta_g(S^\varepsilon, P^\varepsilon) := (1 - S^\varepsilon) \tilde{\rho}_g^\varepsilon. \quad (2.20)$$

The system (2.18) is completed by the following boundary and initial conditions.

$$P^\varepsilon = 0 \quad \text{on } \Gamma_1 \times (0, T); \quad (2.21)$$

$$Q_\ell^\varepsilon \cdot \vec{\nu} = Q_g^\varepsilon \cdot \vec{\nu} \quad \text{on } = 0\Gamma_2 \times (0, T) \quad (2.22)$$

where Q_ℓ^ε and Q_g^ε are defined by:

$$\begin{aligned} Q_\ell^\varepsilon &:= -K^\varepsilon(x) \tilde{\rho}_\ell^\varepsilon [\lambda_\ell(S^\varepsilon) \nabla P^\varepsilon + \nabla \beta(S^\varepsilon) - \lambda_\ell(S^\varepsilon) \tilde{\rho}_\ell^\varepsilon \vec{g}], \\ Q_g^\varepsilon &:= -K^\varepsilon(x) \tilde{\rho}_g^\varepsilon [\lambda_g(S^\varepsilon) \nabla P^\varepsilon - \nabla \beta(S^\varepsilon) - \lambda_g(S^\varepsilon) \tilde{\rho}_g^\varepsilon \vec{g}]. \end{aligned}$$

Finally, the initial conditions read

$$S^\varepsilon(x, 0) = S^0(x) \quad \text{and} \quad P^\varepsilon(x, 0) = P^0(x) \quad \text{in } \Omega. \quad (2.23)$$

2.3. A weak formulation of the problem. Let us begin this section by stating the following assumptions.

(A1) The porosity $\Phi = \Phi(y)$ is a Y -periodic function defined by: $\Phi^\varepsilon(x) = \chi_f^\varepsilon(x) \Phi_f + \chi_m^\varepsilon(x) \Phi_m$ with $0 < \Phi_f, \Phi_m < 1$, where Φ_f and Φ_m are constant that do not depend on ε .

(A2) The absolute permeability tensor K^ε is given by:

$$K^\varepsilon(x) := K_f \chi_f^\varepsilon(x) \mathbb{I} + \varepsilon^2 K_m \chi_m^\varepsilon(x) \mathbb{I},$$

where \mathbb{I} is the unit tensor and K_f, K_m are positive constants that do not depend on ε .

(A3) The density $\rho_k = \rho_k(p)$, ($k = \ell, g$) is a monotone C^1 -function in \mathbb{R} such that

$$\begin{aligned} \rho_k(p) &= \rho_{\min} \quad \text{for } p \leq p_{\min}; \quad \rho_k(p) = \rho_{\max} \quad \text{for } p \geq p_{\max}; \\ \rho_{\min} &< \rho_k(p) < \rho_{\max} \quad \text{for } p_{\min} < p < p_{\max}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

$\rho_{\min}, \rho_{\max}, p_{\min}, p_{\max}$ are constants such that $0 < \rho_{\min} < \rho_{\max} < +\infty$ and $0 < p_{\min} < p_{\max} < +\infty$.

(A4) The capillary pressure function $P_c \in C^1([0, 1]; \mathbb{R}^+)$. Moreover, $P'_c(s) < 0$ in $[0, 1]$ and $P_c(1) = 0$.

(A5) The functions λ_ℓ, λ_g belong to the space $C([0, 1]; \mathbb{R}^+)$ and satisfy the following properties:

- (i) $0 \leq \lambda_\ell, \lambda_g \leq 1$ in $[0, 1]$;
- (ii) $\lambda_\ell(0) = 0$ and $\lambda_g(1) = 0$;
- (iii) there is a positive constant L_0 such that $\lambda_\ell(s) = \lambda_\ell(s) + \lambda_g(s) \geq L_0 > 0$ in $[0, 1]$.

Moreover, $\lambda_\ell(s) \sim s^{\varkappa_\ell}$ as $s \rightarrow 0$ and $\lambda_g(s) \sim (1-s)^{\varkappa_g}$ as $s \rightarrow 1$ ($\varkappa_\ell, \varkappa_g > 0$).

(A6) The function α given by (2.15) is a continuous function in $[0, 1]$. Moreover, $\alpha(0) = \alpha(1) = 0$ and $\alpha > 0$ in $(0, 1)$.

(A7) The function β^{-1} , inverse of β defined in (2.15) is a Hölder function of order θ with $\theta \in (0, 1)$ on the interval $[0, \beta(1)]$. Namely, there exists a positive constant C_β such that for all $s_1, s_2 \in [0, \beta(1)]$, $|\beta^{-1}(s_1) - \beta^{-1}(s_2)| \leq C_\beta |s_1 - s_2|^\theta$.

(A8) The initial data for the global pressure and the saturation defined in (2.23) are such that $P^0 \in L^2(\Omega)$ and $0 \leq S^0 \leq 1$.

Assumptions (A1)–(A8) are classical and physically meaningful for existence results and homogenization problems of two-phase flow in porous media. They are similar to the assumptions made in [10] that dealt with the existence of a weak solution of the studied problem.

Next we introduce the Sobolev space

$$H^1_{\Gamma_1} := \{u \in H^1(\Omega) : u = 0 \text{ on } \Gamma_1\},$$

which is a Hilbert space when it is equipped with the norm

$$\|u\|_{H^1_{\Gamma_1}(\Omega)} = \|\nabla u\|_{(L^2(\Omega))^d}.$$

Definition 2.1. We say that the pair of functions $\langle P^\varepsilon, S^\varepsilon \rangle$ is a weak solution to problem (2.18)–(2.23) if

- (i) $0 \leq S^\varepsilon \leq 1$ a.e in Ω_T .
- (ii) $P^\varepsilon \in L^2(0, T; H^1_{\Gamma_1}(\Omega))$.
- (iii) The boundary conditions (2.21)–(2.22) are satisfied.
- (iv) For any $\varphi_\ell, \varphi_g \in C^1([0, T]; H^1_{\Gamma_1}(\Omega))$ satisfying $\varphi_\ell(T) = \varphi_g(T) = 0$, we have

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega_T} \Phi^\varepsilon(x) \Theta_\ell^\varepsilon \frac{\partial \varphi_\ell^\varepsilon}{\partial t} dx dt + \int_{\Omega} \Phi^\varepsilon(x) \Theta_\ell^0 \varphi_\ell^0 dx \\ & + \int_{\Omega_T} K^\varepsilon(x) \tilde{\rho}_\ell^\varepsilon \left\{ \lambda_\ell(S^\varepsilon) (\nabla P^\varepsilon - \tilde{\rho}_\ell^\varepsilon \vec{g}) + \nabla \beta(S^\varepsilon) \right\} \cdot \nabla \varphi_\ell^\varepsilon dx dt = 0; \end{aligned} \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega_T} \Phi^\varepsilon(x) \Theta_g^\varepsilon \frac{\partial \varphi_g^\varepsilon}{\partial t} dx dt + \int_{\Omega} \Phi^\varepsilon(x) \Theta_g^0 \varphi_g^0 dx \\ & + \int_{\Omega_T} K^\varepsilon(x) \tilde{\rho}_g^\varepsilon \left\{ \lambda_g(S^\varepsilon) (\nabla P^\varepsilon - \tilde{\rho}_g^\varepsilon \vec{g}) - \nabla \beta(S^\varepsilon) \right\} \cdot \nabla \varphi_\ell^\varepsilon dx dt = 0, \end{aligned} \tag{2.26}$$

where $\tilde{\rho}_g^\varepsilon$ and $\tilde{\rho}_\ell^\varepsilon$ are defined in (2.19); $\varphi_\ell^0 = \varphi_\ell(0, x)$, $\varphi_g^0 = \varphi_g(0, x)$; $\Theta_\ell^0 = S^0 \rho_\ell(P^0 + G_\ell(S^0))$ and $\Theta_g^0 = (1 - S^0) \rho_g(P^0 + G_g(S^0))$.

According to [10], under conditions (A1)–(A8), for each $\varepsilon > 0$, problem (2.25)–(2.26) has at least one weak solution.

In what follows C, C_1, \dots denote generic constants that do not depend on ε .

3. A PRIORI ESTIMATES

To obtain the needed uniform estimates for the solution of problem (2.2) (or the equivalent problem (2.18)), we follow the choice of the test functions as in [9]:

$$R_\ell(p_\ell^\varepsilon) = \int_0^{p_\ell^\varepsilon} \frac{d\xi}{\rho_\ell(\xi)} \quad \text{and} \quad R_g(p_g^\varepsilon) = \int_0^{p_g^\varepsilon} \frac{d\xi}{\rho_g(\xi)}. \quad (3.1)$$

Then, as in [9], the following results hold.

Lemma 3.1. *Let $\langle p_g^\varepsilon, p_\ell^\varepsilon \rangle$ be a solution to (2.2). Then we have the energy equality*

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_\Omega \Phi^\varepsilon(x) \zeta^\varepsilon(x, t) dx + \int_\Omega K^\varepsilon(x) \left\{ \lambda_\ell(S^\varepsilon) \nabla p_\ell^\varepsilon \cdot [\nabla p_\ell^\varepsilon - \rho_\ell(p_\ell^\varepsilon) \vec{g}] \right. \\ & \left. + \lambda_g(S^\varepsilon) \nabla p_g^\varepsilon \cdot [\nabla p_g^\varepsilon - \rho_g(p_g^\varepsilon) \vec{g}] \right\} dx = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

in the sense of distributions. Here

$$\zeta^\varepsilon := S^\varepsilon \mathcal{R}_\ell(p_\ell^\varepsilon) + (1 - S^\varepsilon) \mathcal{R}_g(p_g^\varepsilon) + F(S^\varepsilon),$$

where $\mathcal{R}_k(p) := \rho_k(p) R_k(p) - p$, ($k = \ell, g$) and $F(s) := \int_1^s P_c(u) du$. Moreover, $\zeta^\varepsilon \geq 0$ in Ω_T .

Lemma 3.2. *Let $\langle p_g^\varepsilon, p_\ell^\varepsilon \rangle$ be a solution to (2.2). Then*

$$\|\sqrt{K^\varepsilon(x) \lambda_\ell(S^\varepsilon)} \nabla p_\ell^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_T)} + \|\sqrt{K^\varepsilon(x) \lambda_g(S^\varepsilon)} \nabla p_g^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_T)} \leq C. \quad (3.3)$$

Corollary 3.3. *Let $\langle p_g^\varepsilon, p_\ell^\varepsilon \rangle$ be a solution to (2.2). Then*

$$\begin{aligned} & \|\sqrt{\lambda_\ell(S_f^\varepsilon)} \nabla p_{\ell,f}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_{f,T}^\varepsilon)} + \|\sqrt{\lambda_g(S_f^\varepsilon)} \nabla p_{g,f}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_{f,T}^\varepsilon)} \\ & + \varepsilon \|\sqrt{\lambda_\ell(S_m^\varepsilon)} \nabla p_{\ell,m}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_{m,T}^\varepsilon)} + \varepsilon \|\sqrt{\lambda_g(S_m^\varepsilon)} \nabla p_{g,m}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_{m,T}^\varepsilon)} \leq C. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Then we obtain the following uniform *a priori* estimates for the functions P^ε and $\beta(S^\varepsilon)$.

Lemma 3.4. *Let the pair of functions $\langle P^\varepsilon, S^\varepsilon \rangle$ be a solution to (2.18). Then*

$$\begin{aligned} & \|\nabla \beta(S_f^\varepsilon)\|_{L^2(\Omega_{f,T}^\varepsilon)} + \|\nabla P_f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_{f,T}^\varepsilon)} + \varepsilon \|\nabla \beta(S_m^\varepsilon)\|_{L^2(\Omega_{m,T}^\varepsilon)} \\ & + \varepsilon \|\nabla P_m^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_{m,T}^\varepsilon)} \leq C. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Moreover,

$$\|P_f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_{f,T}^\varepsilon)} + \|\beta(S^\varepsilon)\|_{L^2(\Omega_T)} \leq C, \quad (3.6)$$

$$\|P_m^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_{m,T}^\varepsilon)} \leq C. \quad (3.7)$$

Now we pass to the uniform bounds for the time derivatives of the functions Θ_g^ε and S^ε . In a standard way (see, e.g., [4, 9]) we can prove the following lemma.

Lemma 3.5. *Let the pair of functions $\langle P^\varepsilon, S^\varepsilon \rangle$ be a solution to (2.18). Then for $r = f, m$,*

$$\{\partial_t(\Phi_r \Theta_{\ell,r}^\varepsilon)\}_{\varepsilon>0} \text{ is uniformly bounded in } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega_r^\varepsilon)); \quad (3.8)$$

$$\{\partial_t(\Phi_r \Theta_{g,r}^\varepsilon)\}_{\varepsilon>0} \text{ is uniformly bounded in } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega_r^\varepsilon)). \quad (3.9)$$

4. CONVERGENCE OF $\{P_f^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$, $\{S_f^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$, $\{\Theta_{\ell,f}^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$, $\{\Theta_{g,f}^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$

In this section, we obtain compactness results that will be used in passing to the limit as ε tends to zero in the weak formulation. The compactness result used in [9] is no longer valid. To obtain these results we elaborated a new approach based on the ideas from [24, 35] to establish a new compactness result and uniform a priori bounds for the modulus of continuity with respect to the space and time variables. It is achieved in several steps. First, in subsection 4.1 we extend the function S_f^ε from the subdomain Ω_f^ε to the whole Ω and obtain uniform estimates for the extended function \tilde{S}_f^ε . Then in Section 4.2, using the uniform estimates for the function \tilde{P}_f^ε which follow from Lemma 3.4, the definition of the extension operator, and the corresponding bounds for \tilde{S}_f^ε , we prove the compactness result for the families $\{\tilde{\Theta}_{\ell,f}^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ and $\{\tilde{\Theta}_{g,f}^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$, where $\tilde{\Theta}_{\ell,f}^\varepsilon$, $\tilde{\Theta}_{g,f}^\varepsilon$ are extensions of the functions $\Theta_{\ell,f}^\varepsilon$, $\Theta_{g,f}^\varepsilon$ from the subdomain Ω_f^ε to the whole Ω which will be specified at the end of subsection 4.1. Finally, in subsection 4.3 we formulate the two-scale convergence which will be used in the derivation of the homogenized system.

4.1. Extensions of the functions S_f^ε , $\Theta_{\ell,f}^\varepsilon$, $\Theta_{g,f}^\varepsilon$. Consider the function S_f^ε . To extend S_f^ε , following the ideas of [23], we use the monotone function β defined in (2.15). Let us introduce the function

$$\beta_f^\varepsilon(x, t) := \beta(S_f^\varepsilon) = \int_0^{S_f^\varepsilon} \alpha(u) du. \tag{4.1}$$

Then it follows from condition (A6) that $0 \leq \beta_f^\varepsilon \leq \max_{s \in [0,1]} \alpha(s)$ a.e. in $\Omega_{f,T}^\varepsilon$. Furthermore, from (3.5) we have

$$\|\nabla \beta_f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_{f,T}^\varepsilon)} \leq C. \tag{4.2}$$

Let $\Pi^\varepsilon : H^1(\Omega_f^\varepsilon) \rightarrow H^1(\Omega)$ be the standard extension operator cf. [1]. Then we have

$$0 \leq \tilde{\beta}_f^\varepsilon := \Pi^\varepsilon \beta_f^\varepsilon \leq \max_{s \in [0,1]} \alpha(s) \quad \text{a.e. in } \Omega_T, \quad \|\nabla \tilde{\beta}_f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_T)} \leq C.$$

Now we can extend the function S_f^ε from the subdomain Ω_f^ε to the whole Ω . We denote this extension by \tilde{S}_f^ε and define it as:

$$\tilde{S}_f^\varepsilon := (\beta)^{-1}(\tilde{\beta}_f^\varepsilon).$$

This implies that

$$\int_{\Omega_T} |\nabla \beta(\tilde{S}_f^\varepsilon)|^2 dx dt \leq C, \quad 0 \leq \tilde{S}_f^\varepsilon \leq 1 \quad \text{a.e. in } \Omega_T. \tag{4.3}$$

Finally consider the sequences $\{\Theta_{\ell,f}^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ and $\{\Theta_{g,f}^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$. We recall that $\Theta_{\ell,f}^\varepsilon := \rho_\ell (P_f^\varepsilon + G_\ell(S_f^\varepsilon))S_f^\varepsilon$ and $\Theta_{g,f}^\varepsilon := \rho_g (P_f^\varepsilon + G_g(S_f^\varepsilon))(1 - S_f^\varepsilon)$. Then we define the extension of the function $\Theta_{\ell,f}^\varepsilon$ to the whole Ω by

$$\tilde{\Theta}_{\ell,f}^\varepsilon := \rho_\ell (\tilde{P}_f^\varepsilon + G_\ell(\tilde{S}_f^\varepsilon))\tilde{S}_f^\varepsilon \quad \text{and} \quad \tilde{\Theta}_{g,f}^\varepsilon := \rho_g (\tilde{P}_f^\varepsilon + G_g(\tilde{S}_f^\varepsilon))(1 - \tilde{S}_f^\varepsilon), \tag{4.4}$$

where $\tilde{P}_f^\varepsilon := \Pi^\varepsilon P_f^\varepsilon$ is the extension of the function P_f^ε .

4.2. **Compactness of the sequences** $\{\tilde{\Theta}_{\ell,f}^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$, $\{\tilde{\Theta}_{g,f}^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$. The following convergence result is valid.

Proposition 4.1. *Under our standing assumptions there exist the functions L_1, L_2 such that*

$$\tilde{\Theta}_{\ell,f}^\varepsilon \rightarrow L_1 \text{ strongly in } L^2(\Omega_T), \tag{4.5}$$

$$\tilde{\Theta}_{g,f}^\varepsilon \rightarrow L_2 \text{ strongly in } L^2(\Omega_T). \tag{4.6}$$

Proof. We will prove the convergence result for the sequence $\{\tilde{\Theta}_{\ell,f}^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$, the corresponding result for the sequence $\{\tilde{\Theta}_{g,f}^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ can be obtained by similar arguments.

The scheme of the proof is as follows. We apply the compactness criterion of Kolmogorov-Riesz-Fréchet (see, e.g., [24, 35]) in the space $L^1(\Omega_T)$. To this end we have to obtain the moduli of continuity with respect to the space and temporal variables (see Lemmata 4.2, 4.6 below). Finally, the uniform boundedness of the function $\tilde{\Theta}_{\ell,f}^\varepsilon$ imply the desired convergence result (4.5) in the space $L^2(\Omega_T)$. \square

We start with the following result which can be proved by arguments similar to those from Lemma 4.2 in [9].

Lemma 4.2 (Modulus of continuity with respect to the space variable). *Let conditions (A1)–(A8) be fulfilled. Then for $|\Delta x|$ sufficiently small,*

$$\int_0^T \int_\Omega |\tilde{\Theta}_{\ell,f}^\varepsilon(x + \Delta x, t) - \tilde{\Theta}_{\ell,f}^\varepsilon(x, t)|^2 dx dt \leq C |\Delta x|^\theta, \tag{4.7}$$

where $\theta \in (0, 1)$ is defined in condition (A7).

Now we turn to the derivation of the modulus of continuity with respect to the temporal variable. To do this, for any $\delta > 0$, we introduce the functions

$$S_r^{\varepsilon,\delta} := \min \{1 - \delta, \max(\delta, S_r^\varepsilon)\} \quad \text{with } r = f, m.$$

Let us estimate the norm of the function $S_r^{\varepsilon,\delta}$ ($r = f, m$) in $L^2(0, T; H^1(\Omega_{r,T}^\varepsilon))$.

Lemma 4.3. *Under our standing assumptions,*

$$\|S_f^{\varepsilon,\delta}\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega_{f,T}^\varepsilon))} + \varepsilon \|S_m^{\varepsilon,\delta}\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega_{m,T}^\varepsilon))} \leq C \delta^{-\eta}, \tag{4.8}$$

where $\eta := (\varkappa_\ell + \varkappa_g)$ and C is a constant that does not depend on ε, δ .

Proof. We consider the function $S_f^{\varepsilon,\delta}$, the estimate for the function $S_m^{\varepsilon,\delta}$ can be obtained in a similar way. It is evident that $S_f^{\varepsilon,\delta}$ (as well as S_f^ε) belongs to the space $L^2(\Omega_{f,T}^\varepsilon)$. Now we are going to estimate $\nabla S_f^{\varepsilon,\delta}$. From Lemma 3.4 we know that

$$\|\nabla \beta(S_f^\varepsilon)\|_{L^2(\Omega_{f,T}^\varepsilon)} \leq C.$$

Then it is clear that

$$\|\nabla \beta(S_f^{\varepsilon,\delta})\|_{L^2(\Omega_{f,T}^\varepsilon)} \leq \|\nabla \beta(S_f^\varepsilon)\|_{L^2(\Omega_{f,T}^\varepsilon)} \leq C, \tag{4.9}$$

where C is a constant that does not depend on ε, δ . Moreover, condition (A5) implies the inequalities:

$$\lambda_\ell(S_f^{\varepsilon,\delta}) \geq C_1 \delta^{\varkappa_\ell} \quad \text{and} \quad \lambda_g(S_f^{\varepsilon,\delta}) \geq C_2 \delta^{\varkappa_g}. \tag{4.10}$$

Then taking into account the definition of the functions β and α (see (2.15)) and conditions (A4), (A5), from (4.10), we have that

$$\alpha(S_f^{\varepsilon,\delta}) \geq C_1 \delta^{(\varkappa_\ell + \varkappa_g)} \quad \text{with } C_1 := \frac{C_1 C_2}{2} \min_{s \in [0,1]} |P'_c(s)|. \tag{4.11}$$

Then from (4.9), (4.11)

$$\begin{aligned} C &\geq \|\nabla \beta(S_f^{\varepsilon,\delta})\|_{L^2(\Omega_{f,T}^\varepsilon)}^2 = \int_0^T \int_{\Omega_f^\varepsilon} \alpha^2(S_f^{\varepsilon,\delta}) |\nabla S_f^{\varepsilon,\delta}|^2 dx dt \\ &\geq C_1^2 \delta^{2(\varkappa_\ell + \varkappa_g)} \int_0^T \int_{\Omega_f^\varepsilon} |\nabla S_f^{\varepsilon,\delta}|^2 dx dt \\ &= C_1^2 \delta^{2(\varkappa_\ell + \varkappa_g)} \|\nabla S_f^{\varepsilon,\delta}\|_{L^2(\Omega_{f,T}^\varepsilon)}^2. \end{aligned} \tag{4.12}$$

The inequality (4.11) implies that

$$\|\nabla S_f^{\varepsilon,\delta}\|_{L^2(\Omega_{f,T}^\varepsilon)}^2 \leq C \delta^{-2(\varkappa_\ell + \varkappa_g)} \tag{4.13}$$

and inequality (4.8) is proved. This completes the proof of Lemma 4.3. \square

In what follows we use a technical lemma which can be proved using the Fubini theorem.

Lemma 4.4. *For h sufficiently small, $0 < h < \frac{T}{2}$ and for integrable functions $\mathcal{G}_1(t), \mathcal{G}_2(t)$ it holds:*

$$\int_0^T \mathcal{G}_1(t) \left(\int_{\max(t,h)}^{\min(t+h,T)} \mathcal{G}_2(\tau) d\tau \right) dt = \int_h^T \mathcal{G}_2(t) \left(\int_{t-h}^t \mathcal{G}_1(\tau) d\tau \right) dt.$$

Now, for $\varepsilon > 0$ and $0 < h < \frac{T}{2}$, let us introduce the function

$$\varphi^{\varepsilon,\delta,h}(x,t) := \int_{\max(t,h)}^{\min(t+h,T)} h \partial^{-h} \Theta_\ell^{\varepsilon,\delta}(x,\tau) d\tau, \tag{4.14}$$

$$\text{with } \partial^{-h} v(t) := \frac{v(t) - v(t-h)}{h},$$

where

$$\Theta_\ell^{\varepsilon,\delta}(x,t) := \rho_\ell(P^\varepsilon + G_\ell(S^{\varepsilon,\delta})) S^{\varepsilon,\delta}. \tag{4.15}$$

The properties of $\varphi^{\varepsilon,\delta,h}$ are described by the next lemma.

Lemma 4.5. *Let $\varepsilon > 0$, $0 < \delta < 1$, and let $h > 0$ be small enough. There exist a constant C which does not depend on ε, δ , and h such that for the sequence of functions defined by (4.14) it holds*

$$\varphi^{\varepsilon,\delta,h} \in L^2(0,T; H_{\Gamma_1}^1(\Omega)); \tag{4.16}$$

$$\varphi^{\varepsilon,\delta,h}(x,T) = 0; \tag{4.17}$$

$$\|\varphi^{\varepsilon,\delta,h}\|_{L^2(\Omega_T)} \leq C h; \tag{4.18}$$

$$\|\nabla \varphi^{\varepsilon,\delta,h}\|_{L^2(\Omega_{f,T}^\varepsilon)} \leq C h \delta^{-\eta}; \tag{4.19}$$

$$\varepsilon \|\nabla \varphi^{\varepsilon,\delta,h}\|_{L^2(\Omega_{m,T}^\varepsilon)} \leq C h \delta^{-\eta}. \tag{4.20}$$

Here

$$\eta := (\varkappa_\ell + \varkappa_g). \tag{4.21}$$

Proof. The regularity property (4.16) follows immediately from Lemma 3.4 and Lemma 4.3. Moreover, taking into account that $S^\varepsilon = 1$ and $P^\varepsilon = \text{const}$ on $\Gamma_1 \times (0, T)$ (see Section 2), according to the definition of the function $S^{\varepsilon, \delta}$, we have that $\varphi^{\varepsilon, \delta, h} = 0$ on $\Gamma_1 \times (0, T)$.

Result (4.17) follows directly from the definition of the function $\varphi^{\varepsilon, \delta, h}$. In fact,

$$\varphi^{\varepsilon, \delta, h}(x, T) = \int_{\max(T, h)}^{\min(T+h, T)} h \partial^{-h} \Theta_{\ell}^{\varepsilon, \delta}(x, \tau) d\tau = \int_T^T h \partial^{-h} \Theta_{\ell}^{\varepsilon, \delta}(x, \tau) d\tau = 0.$$

Bound (4.18) also follows immediately from the definition of $\varphi^{\varepsilon, \delta, h}$ since $\min(t+h, T) - \max(t, h) \leq h$ and the function $\Theta_{\ell}^{\varepsilon, \delta}$ is uniformly bounded in $L^\infty(\Omega_T)$.

For bound (4.19), we have

$$\begin{aligned} & \|\nabla \varphi^{\varepsilon, \delta, h}\|_{L^2(\Omega_{f, T}^\varepsilon)}^2 \\ & \leq \int_{\Omega_{f, T}^\varepsilon} \left[\int_{\max(t, h)}^{\min(t+h, T)} |\nabla \Theta_{\ell, f}^{\varepsilon, \delta}(x, \tau) - \nabla \Theta_{\ell, f}^{\varepsilon, \delta}(x, \tau - h)| d\tau \right]^2 dx dt := \mathcal{J}^{\varepsilon, \delta}. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Let us estimate the right-hand side of (4.22). Since $[\min(t+h, T) - \max(t, h)] \leq h$, from Cauchy's inequality, for a.e. $(x, t) \in \Omega_{f, T}^\varepsilon$ we obtain

$$\begin{aligned} & \int_{\max(t, h)}^{\min(t+h, T)} |\nabla \Theta_{\ell, f}^{\varepsilon, \delta}(x, \tau) - \nabla \Theta_{\ell, f}^{\varepsilon, \delta}(x, \tau - h)| d\tau \\ & \leq h^{1/2} \left[\int_{\max(t, h)}^{\min(t+h, T)} |\nabla \Theta_{\ell, f}^{\varepsilon, \delta}(x, \tau) - \nabla \Theta_{\ell, f}^{\varepsilon, \delta}(x, \tau - h)|^2 d\tau \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Therefore, from this inequality we obtain

$$\mathcal{J}^{\varepsilon, \delta} \leq Ch \int_0^T \int_{\Omega_f^\varepsilon} \left[\int_{\max(t, h)}^{\min(t+h, T)} |\nabla \Theta_{\ell, f}^{\varepsilon, \delta}(x, \tau) - \nabla \Theta_{\ell, f}^{\varepsilon, \delta}(x, \tau - h)|^2 d\tau \right] dx dt. \tag{4.23}$$

Now we apply Lemma 4.4 with $\mathcal{G}_1(t) := 1$ and $\mathcal{G}_2(t) := |\nabla \Theta_{\ell, f}^{\varepsilon, \delta}(x, \tau) - \nabla \Theta_{\ell, f}^{\varepsilon, \delta}(x, \tau - h)|^2$ in the right-hand side of (4.23). We have:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left[\int_{\max(t, h)}^{\min(t+h, T)} |\nabla \Theta_{\ell, f}^{\varepsilon, \delta}(x, \tau) - \nabla \Theta_{\ell, f}^{\varepsilon, \delta}(x, \tau - h)|^2 d\tau \right] dt \\ & = \int_h^T |\nabla \Theta_{\ell, f}^{\varepsilon, \delta}(x, t) - \nabla \Theta_{\ell, f}^{\varepsilon, \delta}(x, t - h)|^2 \left[\int_{t-h}^t 1 d\tau \right] dt \\ & = h \int_h^T |\nabla \Theta_{\ell, f}^{\varepsilon, \delta}(x, t) - \nabla \Theta_{\ell, f}^{\varepsilon, \delta}(x, t - h)|^2 dt. \end{aligned}$$

Then, by (4.23), we deduce that

$$\begin{aligned} & \mathcal{J}^{\varepsilon, \delta} \\ & \leq Ch^2 \int_{\Omega_f^\varepsilon} \int_h^T |\nabla \Theta_{\ell, f}^{\varepsilon, \delta}(x, t) - \nabla \Theta_{\ell, f}^{\varepsilon, \delta}(x, t - h)|^2 dt dx \\ & \leq Ch^2 \left[\int_{\Omega_f^\varepsilon} \int_h^T |\nabla \Theta_{\ell, f}^{\varepsilon, \delta}(x, t)|^2 dt dx + \int_{\Omega_f^\varepsilon} \int_h^T |\nabla \Theta_{\ell, f}^{\varepsilon, \delta}(x, t - h)|^2 dt dx \right] \\ & \leq Ch^2 \|\nabla \Theta_{\ell, f}^{\varepsilon, \delta}\|_{L^2(\Omega_{f, T}^\varepsilon)}^2. \end{aligned} \tag{4.24}$$

It remains to estimate the right-hand side of (4.24). To this end we rewrite $\nabla\Theta_{\ell,f}^{\varepsilon,\delta}$ as follows:

$$\nabla\Theta_{\ell,f}^{\varepsilon,\delta} = \rho_\ell (P^\varepsilon + G_\ell(S^{\varepsilon,\delta})) \nabla S^{\varepsilon,\delta} + \rho'_\ell S^{\varepsilon,\delta} \nabla P^\varepsilon + \rho'_\ell S^{\varepsilon,\delta} \nabla G_\ell(S^{\varepsilon,\delta}). \tag{4.25}$$

Then, from (4.25), conditions (A3), (A5), and the definition of the function G_ℓ , we have

$$\begin{aligned} & \|\nabla\Theta_{\ell,f}^{\varepsilon,\delta}\|_{L^2(\Omega_{f,T}^\varepsilon)}^2 \\ & \leq \rho_{\max}^2 \|\nabla S^{\varepsilon,\delta}\|_{L^2(\Omega_{f,T}^\varepsilon)}^2 + C \left[\|\nabla P^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_{f,T}^\varepsilon)}^2 + \|P'_c \nabla S^{\varepsilon,\delta}\|_{L^2(\Omega_{f,T}^\varepsilon)}^2 \right]. \end{aligned} \tag{4.26}$$

To estimate the right-hand side of (4.26), we make use of condition (A4), bound (4.8), and Lemma 4.3. Taking into account that δ is sufficiently small, we obtain

$$\|\nabla\Theta_{\ell,f}^{\varepsilon,\delta}\|_{L^2(\Omega_{f,T}^\varepsilon)}^2 \leq C \delta^{-2(\varkappa_\ell + \varkappa_g)}. \tag{4.27}$$

Now, from (4.22), (4.24), and (4.27), for δ sufficiently small, we obtain

$$\|\nabla\varphi^{\varepsilon,\delta,h}\|_{L^2(\Omega_{f,T}^\varepsilon)}^2 \leq C h^2 \delta^{-2(\varkappa_\ell + \varkappa_g)} \tag{4.28}$$

and the bound (4.19) is proved.

The proof of the bound (4.20) can be done by arguments similar to ones used in the proof of (4.19). This completes the proof of Lemma 4.5. \square

Now we are in a position to estimate the modulus of continuity of the function $\tilde{\Theta}_{\ell,f}^\varepsilon$.

Lemma 4.6 (Modulus of continuity with respect to time). *Under our standing assumptions, for all $h \in (0, T)$ and δ sufficiently small, we have*

$$\int_h^T \int_\Omega |\tilde{\Theta}_{\ell,f}^\varepsilon(x, t) - \tilde{\Theta}_{\ell,f}^\varepsilon(x, t - h)|^2 dx dt \leq Ch^\sigma \quad \text{with } \sigma := \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2\eta} \right\}, \tag{4.29}$$

where η is defined in (4.21) and C is a constant which does not depend on ε and h .

Proof. Let us insert the function $\varphi^{\varepsilon,\delta,h} = \varphi^{\varepsilon,\delta,h}(x, t)$ in equation (2.25). We have

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_T} \Phi^\varepsilon(x) \frac{\partial \Theta_\ell^\varepsilon}{\partial t} \varphi^{\varepsilon,\delta,h} dx dt \\ & + \int_{\Omega_T} K^\varepsilon(x) \tilde{\rho}_\ell^\varepsilon \left\{ \lambda_\ell(S^\varepsilon) (\nabla P^\varepsilon - \tilde{\rho}_\ell^\varepsilon \bar{g}) + \nabla \beta(S^\varepsilon) \right\} \cdot \nabla \varphi^{\varepsilon,\delta,h} dx dt = 0. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Taking into account the definition of the function $\varphi^{\varepsilon,\delta,h}$ and condition (A1), for the first term in the left-hand side of (4.30), we have

$$\begin{aligned} I_1^\varepsilon(\varphi^{\varepsilon,\delta,h}) & := \int_{\Omega_T} \Phi^\varepsilon(x) \frac{\partial \Theta_\ell^\varepsilon}{\partial t} \varphi^{\varepsilon,\delta,h} dx dt \\ & = \int_0^T \int_{\Omega_f^\varepsilon} \Phi_f \frac{\partial \Theta_{\ell,f}^\varepsilon}{\partial t} \left[\int_{\max(t,h)}^{\min(t+h,T)} h \partial^{-h} \Theta_{\ell,f}^{\varepsilon,\delta}(x, \tau) d\tau \right] dx dt \\ & \quad + \int_0^T \int_{\Omega_m^\varepsilon} \Phi_m \frac{\partial \Theta_{\ell,m}^\varepsilon}{\partial t} \left[\int_{\max(t,h)}^{\min(t+h,T)} h \partial^{-h} \Theta_{\ell,m}^{\varepsilon,\delta}(x, \tau) d\tau \right] dx dt. \end{aligned}$$

Now Lemma 4.4 implies

$$\begin{aligned}
I_1^\varepsilon(\varphi^{\varepsilon,\delta,h}) &= \int_h^T \int_{\Omega_f^\varepsilon} \Phi_f h \partial^{-h} \Theta_{\ell,f}^{\varepsilon,\delta}(x,t) \left[\int_{t-h}^t \frac{\partial \Theta_{\ell,f}^\varepsilon}{\partial \tau} d\tau \right] dx dt \\
&\quad + \int_h^T \int_{\Omega_m^\varepsilon} \Phi_m h \partial^{-h} \Theta_{\ell,m}^{\varepsilon,\delta}(x,t) \left[\int_{t-h}^t \frac{\partial \Theta_{\ell,m}^\varepsilon}{\partial \tau} d\tau \right] dx dt \\
&= \Phi_f \int_h^T \int_{\Omega_f^\varepsilon} \{ \Theta_{\ell,f}^\varepsilon(x,t) - \Theta_{\ell,f}^\varepsilon(x,t-h) \} \\
&\quad \times \{ \Theta_{\ell,f}^{\varepsilon,\delta}(x,t) - \Theta_{\ell,f}^{\varepsilon,\delta}(x,t-h) \} dx dt \\
&\quad + \Phi_m \int_h^T \int_{\Omega_m^\varepsilon} \{ \Theta_{\ell,m}^\varepsilon(x,t) - \Theta_{\ell,m}^\varepsilon(x,t-h) \} \\
&\quad \times \{ \Theta_{\ell,m}^{\varepsilon,\delta}(x,t) - \Theta_{\ell,m}^{\varepsilon,\delta}(x,t-h) \} dx dt \\
&:= \mathcal{J}_f^{\varepsilon,\delta} + \mathcal{J}_m^{\varepsilon,\delta}.
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Considering the integrand in the first term of (4.31), we have

$$\begin{aligned}
&[\Theta_{\ell,f}^\varepsilon(x,t) - \Theta_{\ell,f}^\varepsilon(x,t-h)] [\Theta_{\ell,f}^{\varepsilon,\delta}(x,t) - \Theta_{\ell,f}^{\varepsilon,\delta}(x,t-h)] \\
&= |\Theta_{\ell,f}^\varepsilon(x,t) - \Theta_{\ell,f}^\varepsilon(x,t-h)|^2 \\
&\quad + [\Theta_{\ell,f}^\varepsilon(x,t) - \Theta_{\ell,f}^\varepsilon(x,t-h)] [\Theta_{\ell,f}^{\varepsilon,\delta}(x,t) - \Theta_{\ell,f}^\varepsilon(x,t)] \\
&\quad - [\Theta_{\ell,f}^\varepsilon(x,t) - \Theta_{\ell,f}^\varepsilon(x,t-h)] [\Theta_{\ell,f}^{\varepsilon,\delta}(x,t-h) - \Theta_{\ell,f}^\varepsilon(x,t-h)] \\
&:= |\Theta_{\ell,f}^\varepsilon(x,t) - \Theta_{\ell,f}^\varepsilon(x,t-h)|^2 + \mathbb{T}_1^{\varepsilon,\delta,h}(x,t) - \mathbb{T}_2^{\varepsilon,\delta,h}(x,t).
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Then the first term in the right-hand side of (4.31) can be rewritten as

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_f^{\varepsilon,\delta} &= \Phi_f \int_h^T \int_{\Omega_f^\varepsilon} |\Theta_{\ell,f}^\varepsilon(x,t) - \Theta_{\ell,f}^\varepsilon(x,t-h)|^2 dx dt \\
&\quad + \Phi_f \int_h^T \int_{\Omega_f^\varepsilon} \mathbb{T}_1^{\varepsilon,\delta,h}(x,t) dx dt - \Phi_f \int_h^T \int_{\Omega_f^\varepsilon} \mathbb{T}_2^{\varepsilon,\delta,h}(x,t) dx dt.
\end{aligned} \tag{4.33}$$

It is easy to see that

$$|\Theta_{\ell,f}^{\varepsilon,\delta}(x,t) - \Theta_{\ell,f}^\varepsilon(x,t)| \leq C \delta \quad \text{and} \quad |\Theta_{\ell,f}^{\varepsilon,\delta}(x,t-h) - \Theta_{\ell,f}^\varepsilon(x,t-h)| \leq C \delta,$$

where C is a constant that does not depend on ε, δ, h . Let us consider, for example, the first bound, the second one can be obtained by similar arguments. We have

$$\begin{aligned}
&|\Theta_{\ell,f}^\varepsilon(x,t) - \Theta_{\ell,f}^{\varepsilon,\delta}(x,t)| \\
&\leq |\rho_\ell(P^\varepsilon + G_\ell(S_f^\varepsilon))S_f^\varepsilon - \rho_\ell(P^\varepsilon + G_\ell(S_f^\varepsilon))S_f^{\varepsilon,\delta}| \\
&\quad + |\rho_\ell(P^\varepsilon + G_\ell(S_f^\varepsilon))S_f^{\varepsilon,\delta} - \rho_\ell(P^\varepsilon + G_\ell(S_f^{\varepsilon,\delta}))S_f^{\varepsilon,\delta}| \\
&\leq \rho_{\max} |S_f^\varepsilon - S_f^{\varepsilon,\delta}| + |\rho_\ell(P^\varepsilon + G_\ell(S_f^\varepsilon)) - \rho_\ell(P^\varepsilon + G_\ell(S_f^{\varepsilon,\delta}))| \\
&\leq \rho_{\max} \delta + \rho'_\ell |G_\ell(S_f^\varepsilon) - G_\ell(S_f^{\varepsilon,\delta})| \\
&\leq \rho_{\max} \delta + \rho'_\ell |P_c(S_f^\varepsilon) - P_c(S_f^{\varepsilon,\delta})| \\
&\leq \rho_{\max} \delta + \rho'_\ell P'_c |S_f^\varepsilon - S_f^{\varepsilon,\delta}| \leq C \delta.
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Since the function $\Theta_{\ell,f}^\varepsilon$ is uniformly bounded in Ω_T , from (4.33) and (4.34) we have

$$\mathcal{J}_f^{\varepsilon,\delta} = \Phi_f \int_h^T \int_{\Omega_f^\varepsilon} |\Theta_{\ell,f}^\varepsilon(x,t) - \Theta_{\ell,f}^\varepsilon(x,t-h)|^2 dx dt + j_f^{\varepsilon,\delta} \quad (4.35)$$

with $|j_f^{\varepsilon,\delta}| \leq C\delta$, where C is a constant that does not depend on ε, δ, h .

In a similar way, one obtains

$$\mathcal{J}_m^{\varepsilon,\delta} = \Phi_m \int_h^T \int_{\Omega_m^\varepsilon} |\Theta_{\ell,m}^\varepsilon(x,t) - \Theta_{\ell,m}^\varepsilon(x,t-h)|^2 dx dt + j_m^{\varepsilon,\delta} \quad (4.36)$$

with $|j_m^{\varepsilon,\delta}| \leq C\delta$, where C is a constant that does not depend on ε, δ, h . Then we obtain

$$I_1^\varepsilon(\varphi^{\varepsilon,\delta,h}) \geq \Phi_f \int_h^T \int_{\Omega_f^\varepsilon} |\Theta_{\ell,f}^\varepsilon(x,t) - \Theta_{\ell,f}^\varepsilon(x,t-h)|^2 dx dt + j_f^{\varepsilon,\delta} + j_m^{\varepsilon,\delta}. \quad (4.37)$$

Next, we estimate the right-hand side of (4.30). To this end we use the notation:

$$\int_{\Omega_T} K^\varepsilon(x) \tilde{\rho}_\ell^\varepsilon \left\{ \lambda_\ell(S^\varepsilon) (\nabla P^\varepsilon - \tilde{\rho}_\ell^\varepsilon \vec{g}) + \nabla \beta(S^\varepsilon) \right\} \cdot \nabla \varphi^{\varepsilon,\delta,h} dx dt =: I_f^\varepsilon(\varphi^{\varepsilon,\delta,h}) + I_m^\varepsilon(\varphi^{\varepsilon,\delta,h}).$$

We have

$$\begin{aligned} & |I_f^\varepsilon(\varphi^{\varepsilon,\delta,h})| + |I_m^\varepsilon(\varphi^{\varepsilon,\delta,h})| \\ & \leq \|K_f \tilde{\rho}_\ell^\varepsilon \{ \lambda_\ell(S_f^\varepsilon) \nabla P_f^\varepsilon + \nabla \beta(S_f^\varepsilon) - \tilde{\rho}_\ell^\varepsilon \lambda_\ell(S_f^\varepsilon) \vec{g} \}\|_{L^2(\Omega_{f,T}^\varepsilon)} \|\nabla \varphi^{\varepsilon,\delta,h}\|_{L^2(\Omega_{f,T}^\varepsilon)} \\ & \quad + \varepsilon \|K_m \tilde{\rho}_\ell^\varepsilon \{ \lambda_\ell(S_m^\varepsilon) \nabla P_m^\varepsilon + \nabla \beta(S_m^\varepsilon) - \tilde{\rho}_\ell^\varepsilon \lambda_\ell(S_m^\varepsilon) \vec{g} \}\|_{L^2(\Omega_{m,T}^\varepsilon)} \\ & \quad \times \varepsilon \|\nabla \varphi^{\varepsilon,\delta,h}\|_{L^2(\Omega_{m,T}^\varepsilon)}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Then for $I_f^\varepsilon(\varphi^{\varepsilon,\delta,h})$, $I_m^\varepsilon(\varphi^{\varepsilon,\delta,h})$ from (A3), (A5), the *a priori* estimates (3.5), (4.19), and (4.20) we obtain

$$|I_f^\varepsilon(\varphi^{\varepsilon,\delta,h})| + |I_m^\varepsilon(\varphi^{\varepsilon,\delta,h})| \leq C_1 h \delta^{-\eta}. \quad (4.39)$$

From (4.30), (4.37), and (4.39), we obtain the bound

$$\int_h^T \int_{\Omega_f^\varepsilon} |\Theta_{\ell,f}^\varepsilon(x,t) - \Theta_{\ell,f}^\varepsilon(x,t-h)|^2 dx dt \leq C_1 h \delta^{-\eta} + C_2 \delta. \quad (4.40)$$

Now we set: $\delta = \delta(h) = h^{1/2\eta}$. Then from (4.40) we have

$$\int_h^T \int_{\Omega_f^\varepsilon} |\Theta_{\ell,f}^\varepsilon(x,t) - \Theta_{\ell,f}^\varepsilon(x,t-h)|^2 dx dt \leq C h^\sigma \quad \text{with } \sigma := \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2\eta}\right\}. \quad (4.41)$$

Finally, taking into account the fact that the extension is by reflection, from (4.41), we obtain the desired estimate (4.29) and Lemma 4.6 is proved. \square

By the Kolmogorov-Riesz-Fréchet compactness criterion, the compactness of the sequences $\{\tilde{\Theta}_{\ell,f}^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$, $\{\tilde{\Theta}_{g,f}^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ is a consequence of Lemmata 4.2, 4.6 (evidently, with the corresponding change of the index "l" by "g" for the sequence $\{\tilde{\Theta}_{g,f}^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$). It assures the following convergence results:

$$\tilde{\Theta}_{\ell,f}^\varepsilon \rightarrow \mathbf{L}_1 \text{ strongly in } L^1(\Omega_T), \quad (4.42)$$

$$\tilde{\Theta}_{g,f}^\varepsilon \rightarrow \mathbf{L}_2 \text{ strongly in } L^1(\Omega_T). \quad (4.43)$$

Now taking into account the L^∞ -boundedness of the functions $\tilde{\Theta}_{\ell,f}^\varepsilon, \tilde{\Theta}_{g,f}^\varepsilon$ we, finally, arrive to the desired convergence results (4.5), (4.6). This completes the proof of Proposition 4.1.

Corollary 4.7. *There exist the functions $P, S \in L^2(\Omega_T)$ such that (up to a subsequence), we have*

$$\tilde{P}_f^\varepsilon \rightarrow P \quad \text{a.e in } \Omega_T; \tag{4.44}$$

$$\tilde{S}_f^\varepsilon \rightarrow S \quad \text{a.e in } \Omega_T. \tag{4.45}$$

Proof. By Proposition 4.1 we conclude that there exist the functions L_1, L_2 such that

$$\tilde{\Theta}_{\ell,f}^\varepsilon \rightarrow L_1 \text{ strongly in } L^2(\Omega_T) \text{ and a.e. in } \Omega_T;$$

$$\tilde{\Theta}_{g,f}^\varepsilon \rightarrow L_2 \text{ strongly in } L^2(\Omega_T) \text{ and a.e. in } \Omega_T.$$

Now, we will use the fact that the function \mathcal{D} given by

$$\mathcal{D}(\tilde{S}_f^\varepsilon, \tilde{P}_f^\varepsilon) = (\tilde{\Theta}_{\ell,f}^\varepsilon(\tilde{S}_f^\varepsilon, \tilde{P}_f^\varepsilon), \tilde{\Theta}_{g,f}^\varepsilon(\tilde{S}_f^\varepsilon, \tilde{P}_f^\varepsilon))$$

is a diffeomorphism from $[0, 1] \times \mathbb{R}$ to $\mathcal{D}([0, 1] \times \mathbb{R})$ (for more details see [7]) so it has continuous inverse. Therefore, almost everywhere in Ω_T convergence of $\tilde{\Theta}_{r,f}^\varepsilon(\tilde{S}_f^\varepsilon, \tilde{P}_f^\varepsilon)$ ($r \in \{\ell, g\}$) implies (4.44) and (4.45). Corollary 4.7 is proved.

4.3. Two-scale convergence results. In this section, taking into account the compactness results from the previous section, we formulate the convergence results for the sequences $\{\tilde{P}_f^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}, \{\tilde{S}_f^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}, \{\tilde{\Theta}_{r,f}^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ with $r \in \{\ell, g\}$. In this paper the homogenization process for the problem is rigorously obtained by using the two-scale approach, see, e.g., [2]. For reader’s convenience, let us recall the definition of the two-scale convergence.

Definition 4.8. A sequence of functions $\{v^\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subset L^2(\Omega_T)$ two-scale converges to $v \in L^2(\Omega_T \times Y)$ if $\|v^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_T)} \leq C$, and for any test function $\varphi \in C^\infty(\Omega_T; C_{\text{per}}(Y))$ the following relation holds

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_T} v^\varepsilon(x, t) \varphi(x, \frac{x}{\varepsilon}, t) dx dt = \int_{\Omega_T \times Y} v(x, y, t) \varphi(x, y, t) dy dx dt.$$

This convergence is denoted by $v^\varepsilon(x, t) \xrightarrow{2s} v(x, y, t)$.

Now we summarize the convergence results for the sequences $\{\tilde{P}_f^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}, \{\tilde{S}_f^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}, \{\tilde{\Theta}_{r,f}^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ ($r \in \{\ell, g\}$). They are given by the following lemma.

Lemma 4.9. *There exist a function S such that $0 \leq S \leq 1$ a.e. in Ω_T , and functions $P \in L^2(0, T; H^1(\Omega)), P_1, \beta_1 \in L^2(\Omega_T; H^1_{\text{per}}(Y))$ such that up to a subsequence,*

$$\tilde{S}_f^\varepsilon \rightarrow S \text{ strongly in } L^2(\Omega_T) \text{ and a.e. in } \Omega_T; \tag{4.46}$$

$$\beta(\tilde{S}_f^\varepsilon) \rightarrow \beta(S) \text{ strongly in } L^2(\Omega_T); \tag{4.47}$$

$$\tilde{P}_f^\varepsilon \rightarrow P \text{ strongly in } L^2(\Omega_T) \text{ and a.e. in } \Omega_T; \tag{4.48}$$

$$\tilde{P}_f^\varepsilon \rightharpoonup P \text{ weakly in } L^2(0, T; H^1(\Omega)); \tag{4.49}$$

$$\tilde{\Theta}_{\ell,f}^\varepsilon \rightarrow \rho_\ell(P + G_\ell(S))S \text{ strongly in } L^2(\Omega_T); \tag{4.50}$$

$$\tilde{\Theta}_{g,f}^\varepsilon \rightarrow \rho_g(P + G_g(S))(1 - S) \text{ strongly in } L^2(\Omega_T); \tag{4.51}$$

$$\nabla \tilde{P}_f^\varepsilon(x, t) \stackrel{2.8}{=} \nabla P(x, t) + \nabla_y P_1(x, t, y); \quad (4.52)$$

$$\nabla \beta(\tilde{S}_f^\varepsilon)(x, t) \stackrel{2.8}{=} \nabla \beta(S)(x, t) + \nabla_y \beta_1(x, t, y). \quad (4.53)$$

The proof of the above lemma is based on the a priori estimates obtained in Section 3, Proposition 4.1, Corollary 4.7, and two-scale convergence arguments similar to those in [2] (see also Lemma 4.8 from [4] for similar arguments).

5. DILATION OPERATOR AND CONVERGENCE RESULTS

It is known that by the nonlinearities and the strong coupling of the problem, the two-scale convergence does not provide an explicit form for the source terms appearing in the homogenized model, see for instance [23, 32, 53]. To overcome this difficulty the authors make use of the dilation operator. Here we refer to [15, 23, 32, 53] for the definition and main properties of the dilation operator. Let us also notice that the notion of the dilation operator is closely related to the notion of the unfolding operator. We refer here, e.g., to [33] for the definition and the properties of this operator.

The outline of the section is as follows. First, in Section 5.1 we introduce the definition of the dilation operator and describe its main properties. Then in Section 5.2 we obtain the equations for the dilated saturation and the global pressure functions and the corresponding uniform estimates. Finally, in Section 5.3 we consider the convergence results for the dilated functions.

5.1. Definition of the dilation operator and its main properties.

Definition 5.1. For a given $\varepsilon > 0$, we define a dilation operator D^ε mapping measurable functions defined in $\Omega_{m,T}^\varepsilon$ to measurable functions defined in $\Omega_T \times Y_m$ by

$$(D^\varepsilon \psi)(x, y, t) := \begin{cases} \psi(c^\varepsilon(x) + \varepsilon y, t), & \text{if } c^\varepsilon(x) + \varepsilon y \in \Omega_m^\varepsilon; \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (5.1)$$

where $c^\varepsilon(x) := \varepsilon k$ if $x \in \varepsilon(Y_m + k)$. Here $k \in \mathbb{Z}^d$ denotes the lattice translation point of the ε -cell domain which contains x .

The basic properties of the dilation operator are given by the following lemma (see [15, 53]).

Lemma 5.2. *Let $v, w \in L^2(0, T; H^1(\Omega_m^\varepsilon))$. Then we have*

$$\begin{aligned} \nabla_y D^\varepsilon v &= \varepsilon D^\varepsilon(\nabla_x v) \quad \text{a.e. in } \Omega_T \times Y_m; \\ \|D^\varepsilon v\|_{L^2(\Omega_T \times Y_m)} &= \|v\|_{L^2(\Omega_T)}; \\ \|\nabla_y D^\varepsilon v\|_{L^2(\Omega_T \times Y_m)} &= \varepsilon \|D^\varepsilon \nabla_x v\|_{L^2(\Omega_{m,T}^\varepsilon)}; \\ (D^\varepsilon v, D^\varepsilon w)_{L^2(\Omega_T \times Y_m)} &= (v, w)_{L^2(\Omega_{m,T}^\varepsilon)}; \\ (D^\varepsilon v, w)_{L^2(\Omega_T \times Y_m)} &= (v, D^\varepsilon w)_{L^2(\Omega_T \times Y_m)}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

The following lemma gives the link between the two-scale and the weak convergence (see, e.g., [23]).

Lemma 5.3. *Let $\{v^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ be a uniformly bounded sequence in $L^2(\Omega_{m,T}^\varepsilon)$ that satisfies the conditions:*

- (i) $D^\varepsilon v^\varepsilon \rightharpoonup v^0$ weakly in $L^2(\Omega_T; L^2_{\text{per}}(Y_m))$;

(ii) $\mathbf{1}_m^\varepsilon(x)v^\varepsilon \xrightarrow{2s} v^* \in L^2(\Omega_T; L^2_{\text{per}}(Y_m))$.

Then $v^0 = v^*$ a.e. in $\Omega_T \times Y_m$.

Also we have the following result (see, e.g., [32, 53]).

Lemma 5.4. *If $v^\varepsilon \in L^2(\Omega_{m,T}^\varepsilon)$ and $\mathbf{1}_m^\varepsilon(x)v^\varepsilon \xrightarrow{2s} v \in L^2(\Omega_T; L^2_{\text{per}}(Y_m))$ then $D^\varepsilon v^\varepsilon$ converges to v strongly in $L^q(\Omega_T \times Y_m)$, where " $\xrightarrow{2s}$ " denotes the strong two-scale convergence. If $v \in L^2(\Omega_T)$ is considered as an element of $L^2(\Omega_T \times Y_m)$ constant in y , then $D^\varepsilon v$ converges strongly to v in $L^2(\Omega_T \times Y_m)$.*

5.2. Dilated functions $D^\varepsilon S_m^\varepsilon, D^\varepsilon P_m^\varepsilon$ and their properties. Let us introduce the following notation for the dilated functions defined on the matrix part of the reservoir Ω :

$$p_m^\varepsilon := D^\varepsilon P_m^\varepsilon, \quad s_m^\varepsilon := D^\varepsilon S_m^\varepsilon, \quad \vartheta_m^\varepsilon := D^\varepsilon \beta_m^\varepsilon = \beta(s_m^\varepsilon), \quad (5.3)$$

and

$$\begin{aligned} \theta_{\ell,m}^\varepsilon &:= D^\varepsilon \Theta_{\ell,m}^\varepsilon = \rho_\ell(p_m^\varepsilon + G_\ell(s_m^\varepsilon)) s_m^\varepsilon, \\ \theta_{g,m}^\varepsilon &:= D^\varepsilon \Theta_{g,m}^\varepsilon = \rho_g(p_m^\varepsilon + G_g(s_m^\varepsilon)) (1 - s_m^\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.4)$$

The goal of this section is to derive the equations for the dilated functions $s_m^\varepsilon, p_m^\varepsilon$ and using Lemma 5.2 to obtain the corresponding uniform estimates.

First, we establish the following result.

Lemma 5.5. *For any $\varepsilon > 0$ and for a.e. $x \in \Omega$, the dilated functions $s_m^\varepsilon, p_m^\varepsilon$ defined by (5.3) are the solutions of the system*

$$\begin{aligned} 0 &\leq s_m^\varepsilon \leq 1; \\ \Phi_m \frac{\partial \theta_{\ell,m}^\varepsilon}{\partial t} - \operatorname{div}_y \left\{ K_m \rho_\ell(s_m^\varepsilon, p_m^\varepsilon) [\lambda_\ell(s_m^\varepsilon) \nabla p_m^\varepsilon \right. \\ &\quad \left. + \nabla \vartheta_m^\varepsilon - \varepsilon \lambda_\ell(s_m^\varepsilon) \rho_\ell(s_m^\varepsilon, p_m^\varepsilon) \vec{g}] \right\} = 0; \\ \Phi_m \frac{\partial \theta_{g,m}^\varepsilon}{\partial t} - \operatorname{div}_y \left\{ K_m \rho_g(s_m^\varepsilon, p_m^\varepsilon) [\lambda_g(s_m^\varepsilon) \nabla p_m^\varepsilon \right. \\ &\quad \left. - \nabla \vartheta_m^\varepsilon - \varepsilon \lambda_g(s_m^\varepsilon) \rho_g(s_m^\varepsilon, p_m^\varepsilon) \vec{g}] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

in $L^2(0, T; H^{-1}(Y_m))$. Here $\rho_k(s_m^\varepsilon, p_m^\varepsilon) := \rho_k(p_m^\varepsilon + G_k(s_m^\varepsilon))$ ($k = \ell, g$).

The proof of the above can be done by the arguments similar to those used in the proof of [53, Lemma 6.7].

We complete system (5.5) with the boundary and initial conditions. The boundary conditions are

$$p_m^\varepsilon(x, y, t) = P_f^\varepsilon(\varepsilon y + c^\varepsilon(x), t), \quad \vartheta_m^\varepsilon(x, y, t) = \beta_f^\varepsilon(\varepsilon y + c^\varepsilon(x), t) \quad (5.6)$$

in $H^{1/2}(\Gamma_{f_m})$ for $(x, t) \in \Omega_{m,T}^\varepsilon$, where $\beta_f^\varepsilon := \beta(S_f^\varepsilon)$. The initial conditions are

$$p_m^\varepsilon(x, y, 0) = D^\varepsilon P_m^0(x, y), \quad s_m^\varepsilon(x, y, 0) = D^\varepsilon S_m^0(x, y) \quad \text{in } \Omega \times Y_m. \quad (5.7)$$

For x outside the matrix part by the definition (5.1), we set

$$p_m^\varepsilon(x, y, t) = s_m^\varepsilon(x, y, t) = 0 \quad \text{in } H^{1/2}(\Gamma_{f_m}) \quad \text{for } x \in \Omega \setminus \Omega_m^\varepsilon, \quad t \in (0, T). \quad (5.8)$$

Remark 5.6. There is no confusion that in (5.7) we use again the notation D^ε , for the dilatation operator defined for $L^2(\Omega)$ -functions which maps them to the functions in $L^2(\Omega \times Y_m)$ by the formula

$$(D^\varepsilon \varphi)(x, y) := \varphi(\varepsilon y + c^\varepsilon(x)). \tag{5.9}$$

Remark 5.7. We note that problem (5.5) with non-homogeneous Dirichlet boundary conditions (5.6) and initial conditions (5.7) corresponds to a family of problems in $Y_m \times (0, T)$ parameterized by the slow variable x and depending on it through the boundary data (5.6).

The following lemma contains the uniform *a priori* estimates for the dilated solutions $s_m^\varepsilon, p_m^\varepsilon$ of (5.5).

Lemma 5.8. *Let $(p_m^\varepsilon, s_m^\varepsilon)$ be a solution to (5.5)-(5.7). There exists a constant C that does not depend on ε and such that*

$$0 \leq s_m^\varepsilon \leq 1 \quad \text{a.e. in } \Omega_T \times Y_m; \tag{5.10}$$

$$\|p_m^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_T; H^1_{\text{per}}(Y_m))} + \|\vartheta_m^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_T; H^1_{\text{per}}(Y_m))} \leq C; \tag{5.11}$$

$$\|\partial_t(\Phi_m \theta_{\ell, m}^\varepsilon)\|_{L^2(\Omega_T; H^{-1}(Y_m))} + \|\partial_t(\Phi_m \theta_{g, m}^\varepsilon)\|_{L^2(\Omega_T; H^{-1}(Y_m))} \leq C; \tag{5.12}$$

where $\vartheta_m^\varepsilon := D^\varepsilon \beta_m^\varepsilon = \beta(s_m^\varepsilon)$.

Proof. Statement (5.10) is evident. The uniform estimate (5.11) easy follow from the uniform bounds (3.5), (3.7), and Lemma 5.2. The bound (5.12) follows from Lemmata 5.2, 3.5. The proof is complete. \square

5.3. Convergence results for the dilated functions $p_m^\varepsilon, s_m^\varepsilon, \theta_{\ell, m}^\varepsilon, \theta_{g, m}^\varepsilon$. In this section we establish convergence results which will be used below to obtain the homogenized system. From Lemmata 5.3, 5.8 we get the following convergence results.

Lemma 5.9. *Let $(p_m^\varepsilon, s_m^\varepsilon)$ be a solution to (5.5)-(5.7). Then (up to a subsequence),*

$$\chi_m^\varepsilon S_m^\varepsilon \xrightarrow{2s} s \in L^2(\Omega_T; L^2_{\text{per}}(Y_m)), \quad s_m^\varepsilon \rightharpoonup s \text{ weakly in } L^2(\Omega_T \times Y_m); \tag{5.13}$$

$$\chi_m^\varepsilon P_m^\varepsilon \xrightarrow{2s} p \in L^2(\Omega_T; L^2_{\text{per}}(Y_m)), \quad p_m^\varepsilon \rightharpoonup p \text{ weakly in } L^2(\Omega_T; H^1(Y_m)); \tag{5.14}$$

$$\varepsilon \nabla_x P_m^\varepsilon \xrightarrow{2s} \nabla_y p \in L^2(\Omega_T; L^2_{\text{per}}(Y_m)); \tag{5.15}$$

$$\chi_m^\varepsilon \beta(S_m^\varepsilon) \xrightarrow{2s} \vartheta^*; \quad \beta(s_m^\varepsilon) \rightharpoonup \vartheta^* \text{ weakly in } L^2(\Omega_T; H^1(Y_m)); \tag{5.16}$$

$$\varepsilon \nabla_x \beta(S_m^\varepsilon) \xrightarrow{2s} \nabla_y \vartheta^*,$$

where $\chi_m^\varepsilon = \chi_m^\varepsilon(x)$ is the characteristic function of the subdomain Ω_m^ε .

Remark 5.10. The limit ϑ^* will be identified below. More precisely, it will be shown that $\vartheta^* = \beta(s)$.

It is clear that the convergence results of Lemma 5.9 above are not sufficient for derivation of the equations for the limit functions s, p . In order to overcome this difficulty, we introduce the restrictions of the dilated functions $s_m^\varepsilon, p_m^\varepsilon$ which are defined below. The key feature of the newly introduced functions is that they possess more compactness properties than the dilated functions introduced in (5.3), (5.4). To this end, following [32], we fix $x = x_0 \in \Omega$ and define the restrictions of $s_m^\varepsilon, p_m^\varepsilon$ to the ε -cell containing the point x_0 . These functions are defined in the

domain $Y_m \times (0, T)$ and are constants in the slow variable x . In order to obtain the uniform estimates for the restricted functions (they are similar to the corresponding estimates for $P_f^\varepsilon, S_f^\varepsilon$ from Section 3) we make use of the estimates (5.10)–(5.11). Then we proceed as follows. First, we define the restrictions of $s_m^\varepsilon, p_m^\varepsilon$ to a cell $K_{x_0}^\varepsilon$ which is a cube containing $x_0 \in \Omega$ and the length ε . We denote by $k(x_0, \varepsilon) \in \mathbb{Z}^d$ such that $K_{x_0}^\varepsilon := \varepsilon(Y + k(x_0, \varepsilon))$. Due to the definition of the dilation operator, the functions $s_m^\varepsilon, p_m^\varepsilon$ are constant in x in $K_{x_0}^\varepsilon$. The restricted functions are given by:

$$s_{m,x_0}^\varepsilon(y, t) := \begin{cases} s_m^\varepsilon, & \text{if } x \in K_{x_0}^\varepsilon; \\ 0, & \text{otherwise;} \end{cases} \quad p_{m,x_0}^\varepsilon(y, t) := \begin{cases} p_m^\varepsilon, & \text{if } x \in K_{x_0}^\varepsilon; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (5.17)$$

For any $\varepsilon > 0$, the pair of functions $(s_{m,x_0}^\varepsilon, p_{m,x_0}^\varepsilon)$ is a solution to (5.5)–(5.7) in $Y_m \times (0, T)$.

Now we obtain the uniform, in ε , for the functions $s_{m,x_0}^\varepsilon, p_{m,x_0}^\varepsilon$ defined in (5.17), for a.e. $x_0 \in \Omega$. We have.

Lemma 5.11. *For a.e. $x_0 \in \Omega$, there is a constant $C = C(x_0)$ which does not depend on ε and such that*

$$\|p_{m,x_0}^\varepsilon\|_{L^2(0,T;H_{\text{per}}^1(Y_m))} + \|\vartheta_{m,x_0}^\varepsilon\|_{L^2(0,T;H_{\text{per}}^1(Y_m))} \leq C(x_0), \quad (5.18)$$

$$\|\partial_t(\Phi_m \theta_{\ell,m,x_0}^\varepsilon)\|_{L^2(0,T;H_{\text{per}}^{-1}(Y_m))} + \|\partial_t(\Phi_m \theta_{g,m,x_0}^\varepsilon)\|_{L^2(0,T;H_{\text{per}}^{-1}(Y_m))} \leq C; \quad (5.19)$$

where

$$\begin{aligned} \theta_{\ell,m,x_0}^\varepsilon &:= \rho_\ell(p_{m,x_0}^\varepsilon + G_\ell(s_{m,x_0}^\varepsilon)) s_{m,x_0}^\varepsilon, \\ \theta_{g,m,x_0}^\varepsilon &:= \rho_g(p_{m,x_0}^\varepsilon + G_g(s_{m,x_0}^\varepsilon)) (1 - s_{m,x_0}^\varepsilon). \end{aligned}$$

Next we establish a compactness for the families $\{\theta_{\ell,m,x_0}^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ and $\{\theta_{g,m,x_0}^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$. We obtain this compactness result by applying [4, Lemma 4.2].

Proposition 5.12. *Under our standing assumptions, for a.e. $x_0 \in \Omega$, the families $\{\theta_{w,m,x_0}^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ and $\{\theta_{g,m,x_0}^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ are compact sets in $L^2(Y_m \times (0, T))$.*

6. FORMULATION OF THE MAIN RESULT

We study the asymptotic behavior of the solution to problem (2.2) (through the equivalent problem (2.18)) as $\varepsilon \rightarrow 0$. In particular, we are going to show that the effective model is

$$\begin{aligned} 0 \leq S \leq 1 \quad & \text{in } \Omega_T; \\ \Phi^* \frac{\partial \Xi_\ell^*}{\partial t} - \text{div}_x \left\{ \mathbb{K}^* \rho_\ell \lambda_\ell(S) [\nabla P_\ell - \rho_\ell \vec{g}] \right\} &= \mathcal{Q}_\ell \quad \text{in } \Omega_T; \\ \Phi^* \frac{\partial \Xi_g^*}{\partial t} - \text{div}_x \left\{ \mathbb{K}^* \rho_g \lambda_g(S) [\nabla P_g - \rho_g \vec{g}] \right\} &= \mathcal{Q}_g \quad \text{in } \Omega_T; \\ P_c(S) &= P_g - P_\ell \quad \text{in } \Omega_T. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Here we use the following notation:

- S, P_ℓ, P_g denote the homogenized water saturation, water pressure, and gas pressure, respectively.
- Φ^* denotes the effective porosity and is given by

$$\Phi^* := \Phi_f \frac{|Y_f|}{|Y_m|}, \quad (6.2)$$

where $|Y_r|$ is the measure of the set Y_r , $r = f, m$.

- \mathbb{K}^* is the homogenized tensor with the entries \mathbb{K}_{ij}^* defined by:

$$\mathbb{K}_{ij}^* := \frac{K_f}{|Y_m|} \int_{Y_f} [\nabla_y \xi_i + \vec{e}_i][\nabla_y \xi_j + \vec{e}_j] dy, \tag{6.3}$$

where ξ_j is a solution of the auxiliary problem

$$\begin{aligned} -\Delta_y \xi_j &= 0 \quad \text{in } Y_f; \\ \nabla_y \xi_j \cdot \vec{\nu} &= -\vec{e}_j \cdot \vec{\nu} \quad \text{on } \Gamma_{fm}; \\ y &\mapsto \xi_j(y) \quad Y\text{-periodic.} \end{aligned} \tag{6.4}$$

- The functions Ξ_ℓ^*, Ξ_g^* are

$$\Xi_\ell^* := S \rho_\ell(P_\ell) \quad \text{and} \quad \Xi_g^* := (1 - S) \rho_g(P_g). \tag{6.5}$$

For almost all point $x \in \Omega$ a matrix block $Y_m \subset \mathbb{R}^d$ is suspended topologically. Equations for flow in a matrix block are given by

$$\begin{aligned} 0 \leq s \leq 1 \quad &\text{in } \Omega_T \times Y_m; \\ \Phi_m \frac{\partial \theta_\ell^*}{\partial t} - \operatorname{div}_y \left\{ K_m \rho_\ell(p_\ell) \lambda_\ell(s) \nabla_y p_\ell \right\} &= 0 \quad \text{in } \Omega_T \times Y_m; \\ \Phi_m \frac{\partial \theta_g^*}{\partial t} - \operatorname{div}_y \left\{ K_m \rho_g(p_g) \lambda_g(s) \nabla_y p_g \right\} &= 0 \quad \text{in } \Omega_T \times Y_m; \\ P_c(s) = p_g - p_\ell \quad &\text{in } \Omega_T \times Y_m. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Here we use the following notation:

- s, p_ℓ, p_g denote the water saturation, the water and gas pressures in the block Y_m , respectively.
- The functions $\theta_\ell^*, \theta_g^*$ are defined by

$$\theta_\ell^* := s \rho_\ell(p_\ell) \quad \text{and} \quad \theta_g^* := (1 - s) \rho_g(p_g). \tag{6.7}$$

For any $x \in \Omega$ and $t > 0$, the matrix-fracture sources are given by

$$\mathcal{Q}_\ell := -\frac{\Phi_m}{|Y_m|} \int_{Y_m} \frac{\partial \theta_\ell^*}{\partial t}(x, y, t) dy \quad \text{and} \quad \mathcal{Q}_g := -\frac{\Phi_m}{|Y_m|} \int_{Y_m} \frac{\partial \theta_g^*}{\partial t}(x, y, t) dy. \tag{6.8}$$

The boundary conditions for the effective system (6.1) are given by

$$\begin{aligned} P_g(x, t) = P_\ell(x, t) &= 0 \quad \text{on } \Gamma_1 \times (0, T); \\ \mathbb{K}^* \rho_g(P_g) \lambda_g(S) (\nabla P_g - \rho_g(P_g) \vec{g}) \cdot \vec{\nu} &= 0 \quad \text{on } \Gamma_2 \times (0, T); \\ \mathbb{K}^* \rho_\ell(P_\ell) \lambda_\ell(S) (\nabla P_\ell - \rho_\ell(P_\ell) \vec{g}) \cdot \vec{\nu} &= 0 \quad \text{on } \Gamma_2 \times (0, T). \end{aligned} \tag{6.9}$$

The interface conditions for the system (6.6) are given by:

$$\begin{aligned} P_\ell(x, t) &= p_\ell(x, y, t) \quad \text{on } \Omega_T \times \Gamma_{fm}; \\ P_g(x, t) &= p_g(x, y, t) \quad \text{on } \Omega_T \times \Gamma_{fm}. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Finally, the initial conditions read

$$S(x, 0) = S^0(x) \quad \text{and} \quad P_g(x, 0) = p_g^0(x) \quad \text{in } \Omega, \tag{6.11}$$

$$s(x, y, 0) = S^0(x) \quad \text{and} \quad p_g(x, y, 0) = p_g^0(x) \quad \text{in } \Omega \times Y_m. \tag{6.12}$$

The main result of the paper reads as follows.

Theorem 6.1. *Let assumptions (A1)–(A8) be fulfilled. Then the solution of initial problem (2.2) converges (up to a subsequence) in the two-scale sense to a weak solution of homogenized problem (6.1).*

7. PROOF OF THEOREM 6.1

The proof of the homogenization result will be done in several steps. Using the convergence and compactness results from Section 4 we pass to the limit in equations (2.25), (2.26). This is done in Section 7.1. The passage to the limit in the matrix blocks makes use of the dilation operator defined in Section 5 above. In the passage to the limit in (2.25), (2.26) we see that the homogenized equations contain, first of all, the corrector functions P_1, β_1 defined in Lemma 4.9 as well as non-explicit limits $L_{\ell,m}, L_{g,m}$ (see Section 7.1). The corrector functions are then identified in Section 7.2. Having obtained the homogenized equations in terms of the global pressure and saturation, we can reformulate these equations in terms of new unknown functions that it is naturally to call the homogenized phase pressures. They are defined as follows: $P_\ell := P + G_\ell(S)$ and $P_g := P + G_g(S)$. However, in these equations the limits $L_{\ell,m}, L_{g,m}$ are still non identified. To obtain the explicit form of these limits we make use of the ideas from [32]. This completes the proof of the main result of the paper.

7.1. Passage to the limit in the equation (2.25), (2.26). We set

$$\begin{aligned} \varphi_\ell(x, \frac{x}{\varepsilon}, t) &:= \varphi(x, t) + \varepsilon \zeta(x, \frac{x}{\varepsilon}, t) \\ &= \varphi(x, t) + \varepsilon \zeta_1(x, t) \zeta_2(\frac{x}{\varepsilon}) \\ &= \varphi(x, t) + \varepsilon \zeta^\varepsilon(x, t), \end{aligned} \tag{7.1}$$

where $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_T), \zeta_1 \in \mathcal{D}(\Omega_T), \zeta_2 \in C_{\text{per}}^\infty(Y)$, and plug the function φ_ℓ in (2.25). This yields

$$\begin{aligned} & - \Phi_f \int_{\Omega_T} \chi_f^\varepsilon(x) \tilde{\Theta}_{\ell,f}^\varepsilon \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial \zeta^\varepsilon}{\partial t} \right] dx dt \\ & + K_f \int_{\Omega_T} \chi_f^\varepsilon(x) \tilde{\rho}_{\ell,f}^\varepsilon \left\{ \lambda_\ell(\tilde{S}_f^\varepsilon) \left[\nabla \tilde{P}_f^\varepsilon - \tilde{\rho}_{\ell,f}^\varepsilon \vec{g} \right] + \nabla \beta(\tilde{S}_f^\varepsilon) \right\} \\ & \times [\nabla \varphi + \varepsilon \nabla_x \zeta^\varepsilon + \nabla_y \zeta^\varepsilon] dx dt \\ & - \Phi_m \int_{\Omega_T} \chi_f^\varepsilon(x) \Theta_{\ell,m}^\varepsilon \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial \zeta^\varepsilon}{\partial t} \right] dx dt \\ & + \varepsilon^2 K_m \int_{\Omega_T} \chi_f^\varepsilon(x) \tilde{\rho}_{\ell,m}^\varepsilon \left\{ \lambda_\ell(S_m^\varepsilon) (\nabla P_m^\varepsilon - \tilde{\rho}_{\ell,m}^\varepsilon \vec{g}) + \nabla \beta(S_m^\varepsilon) \right\} \\ & \times [\nabla \varphi + \varepsilon \nabla_x \zeta^\varepsilon + \nabla_y \zeta^\varepsilon] dx dt = 0, \end{aligned} \tag{7.2}$$

where

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{\ell,f}^\varepsilon &:= \rho_\ell(\tilde{S}_f^\varepsilon, \tilde{P}_f^\varepsilon) := \rho_\ell(\tilde{P}_f^\varepsilon + G_\ell(\tilde{S}_f^\varepsilon)), \\ \tilde{\rho}_{\ell,m}^\varepsilon &:= \rho_\ell(S_m^\varepsilon, P_m^\varepsilon) := \rho_\ell(P_m^\varepsilon + G_\ell(S_m^\varepsilon)). \end{aligned} \tag{7.3}$$

Taking into account the convergence results from Lemmata 4.9, 5.9, we pass to the two-scale limit in (7.2) as $\varepsilon \rightarrow 0$ and get the first homogenized equation

$$\begin{aligned} & - |Y_f| \Phi_f \int_{\Omega_T} \Theta_\ell^* \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx dt \\ & + K_f \int_{\Omega_T \times Y_f} \rho_\ell \left\{ \lambda_\ell(S) [\nabla P + \nabla_y P_1 - \rho_\ell \vec{g}] + [\nabla \beta + \nabla_y \beta_1] \right\} \cdot \Upsilon_\varphi dy dx dt \quad (7.4) \\ & = \Phi_m \int_{\Omega_T \times Y_m} \mathbf{L}_{\ell,m}(x, y, t) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) dy dx dt, \end{aligned}$$

where

$$\rho_\ell := \rho_\ell (P + G_\ell(S)) \quad \text{and} \quad \Theta_\ell^* := S \rho_\ell; \quad (7.5)$$

the function Υ_φ is $\Upsilon_\varphi := [\nabla \varphi + \zeta_1 \nabla_y \zeta_2]$, finally, the function $\mathbf{L}_{\ell,m} = \mathbf{L}_{\ell,m}(x, y, t)$ is defined as a two-scale limit of the sequence $\{\Theta_{\ell,m}^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ as $\varepsilon \rightarrow 0$. Namely,

$$\Theta_{\ell,m}^\varepsilon \xrightarrow{2s} \mathbf{L}_{\ell,m} \in L^2(\Omega_T; L^2_{\text{per}}(Y_m)). \quad (7.6)$$

In a similar way we pass to the two-scale limit in equation (2.26) and get the second homogenized equation

$$\begin{aligned} & - |Y_f| \Phi_f \int_{\Omega_T} \Theta_g^* \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx dt \\ & + K_f \int_{\Omega_T \times Y_f} \rho_g \left\{ \lambda_g(S) [\nabla P + \nabla_y P_1 - \rho_g \vec{g}] - [\nabla \beta + \nabla_y \beta_1] \right\} \cdot \Upsilon_\varphi dy dx dt \quad (7.7) \\ & = \Phi_m \int_{\Omega_T \times Y_m} \mathbf{L}_{g,m}(x, y, t) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) dy dx dt, \end{aligned}$$

where

$$\rho_g := \rho_g (P + G_g(S)) \quad \text{and} \quad \Theta_g^* := (1 - S) \rho_g; \quad (7.8)$$

the function $\mathbf{L}_{g,m} = \mathbf{L}_{g,m}(x, y, t)$ is defined as a two-scale limit of the sequence $\{\Theta_{g,m}^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ as $\varepsilon \rightarrow 0$. Namely,

$$\Theta_{g,m}^\varepsilon \xrightarrow{2s} \mathbf{L}_{g,m} \in L^2(\Omega_T; L^2_{\text{per}}(Y_m)). \quad (7.9)$$

7.2. Identification of the corrector functions P_1, β_1 and homogenized equations. Step 1. Identification of P_1 . Consider the equations (7.4), (7.7).

We set $\varphi \equiv 0$. We get: Taking into account that ρ_ℓ, ρ_g are strictly positive and do not depend on y , we obtain

$$\int_{Y_f} \left\{ \lambda_\ell(S) [\nabla P + \nabla_y P_1 - \rho_\ell \vec{g}] + [\nabla \beta + \nabla_y \beta_1] \right\} \cdot \nabla \zeta_2(y) dy = 0, \quad (7.10)$$

$$\int_{Y_f} \left\{ \lambda_g(S) [\nabla P + \nabla_y P_1 - \rho_g \vec{g}] - [\nabla \beta + \nabla_y \beta_1] \right\} \cdot \nabla \zeta_2(y) dy = 0. \quad (7.11)$$

Now adding (7.10) and (7.11), we obtain

$$\int_{Y_f} \left\{ \lambda(S) [\nabla P + \nabla_y P_1] - [\lambda_\ell(S) \rho_\ell + \lambda_g(S) \rho_g] \vec{g} \right\} \cdot \nabla \zeta_2(y) dy = 0. \quad (7.12)$$

Taking into account condition (A4), from (7.12), we obtain

$$\int_{Y_f} \left\{ \nabla P - \mathbf{X}(S, P) \vec{g} + \nabla_y P_1 \right\} \cdot \nabla \zeta_2(y) dy = 0, \quad (7.13)$$

where

$$\mathbf{X}(S, P) := \frac{\lambda_\ell(S)\rho_\ell + \lambda_g(S)\rho_g}{\lambda(S)}. \quad (7.14)$$

Now we proceed in a standard way (see, e.g., [45]). Let ξ_j be a solution of

$$\begin{aligned} -\Delta_y \xi_j &= 0 \quad \text{in } Y_f; \\ \nabla_y \xi_j \cdot \vec{\nu}_y &= -\vec{e}_j \cdot \vec{\nu}_y \quad \text{on } \Gamma_{fm} \\ y \mapsto \xi_j(y) & \quad Y\text{-periodic.} \end{aligned} \quad (7.15)$$

Then the function P_1 can be represented as

$$P_1(x, y, t) = \sum_{j=1}^d \xi_j(y) \left(\frac{\partial P}{\partial x_j}(x, t) - \mathbf{X}(S, P)g_j \right). \quad (7.16)$$

Step 2. Identification of β_1 . Now we turn to the identification of the function β_1 . From (7.10) and (7.13), we obtain

$$\int_{Y_f} \left\{ \lambda_\ell(S)\mathbf{X}(S, P)\vec{g} - \lambda_\ell(S)\rho_\ell\vec{g} + [\nabla\beta + \nabla_y\beta_1] \right\} \cdot \nabla_y\zeta_2(y) dy = 0.$$

From this equation we have

$$\int_{Y_f} [\nabla\beta + \nabla_y\beta_1] \cdot \nabla_y\zeta_2(y) dy = - \int_{Y_f} \left\{ \lambda_\ell(S) [\mathbf{X}(S, P) - \rho_\ell] \vec{g} \right\} \cdot \nabla_y\zeta_2(y) dy. \quad (7.17)$$

Now, from (7.17) we get the following equation for the function β_1 :

$$\int_{Y_f} [\nabla\beta - \mathbf{Z}(S, P)\vec{g} + \nabla_y\beta_1] \cdot \nabla_y\zeta_2(y) dy = 0, \quad (7.18)$$

where

$$\mathbf{Z}(S, P) := \frac{\lambda_\ell(S)\lambda_g(S)}{\lambda(S)} [\rho_\ell - \rho_g]. \quad (7.19)$$

Then the function β_1 can be represented as

$$\beta_1(x, y, t) = \sum_{j=1}^d \xi_j(y) \left(\frac{\partial \beta(S)}{\partial x_j}(x, t) - \mathbf{Z}(S, P)g_j \right). \quad (7.20)$$

Step 3. Homogenized equation for the l phase. Now we are in position to obtain the first homogenized equation. Choosing $\zeta_2 = 0$, from (7.4), we obtain

$$\begin{aligned} & \Phi_f|_{Y_f} \left| \frac{\partial \Theta_\ell^*}{\partial t} - \operatorname{div}_x \left\{ K_f \lambda_\ell(S) \rho_\ell \int_{Y_f} [\nabla P + \nabla_y P_1 - \mathbf{X}(S, P)\vec{g}] dy \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + K_f \int_{Y_f} \lambda_\ell(S) \rho_\ell [\mathbf{X}(S, P) - \rho_\ell] \vec{g} dy \right\} \right. \\ & \quad \left. - \operatorname{div}_x \left\{ K_f \int_{Y_f} \rho_\ell [\nabla\beta + \nabla_y\beta_1 - \mathbf{Z}(S, P)\vec{g}] dy + K_f \int_{Y_f} \rho_\ell \mathbf{Z}(S, P)\vec{g} dy \right\} \right. \\ & \quad \left. = -\Phi_m \int_{Y_m} \frac{\partial \mathbf{L}^{\ell, m}}{\partial t}(x, y, t) dy. \right. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Then taking into account the definitions of the functions $X(S, P)$ and $Z(S, P)$, from (7.21), we have

$$\begin{aligned} & \Phi_f |Y_f| \frac{\partial \Theta_\ell^*}{\partial t} - \operatorname{div}_x \left\{ K_f \lambda_\ell(S) \rho_\ell \int_{Y_f} [\nabla P + \nabla_y P_1 - X(S, P) \vec{g}] dy \right\} \\ & - \operatorname{div}_x \left\{ K_f \int_{Y_f} \rho_\ell [\nabla \beta + \nabla_y \beta_1 - Z(S, P) \vec{g}] dy \right\} \\ & = -\Phi_m \int_{Y_m} \frac{\partial \mathbf{L}_{\ell,m}}{\partial t}(x, y, t) dy. \end{aligned} \tag{7.22}$$

Now we use the representations for the corrector functions P_1 and β_1 , to obtain

$$\begin{aligned} & \Phi^* \frac{\partial \Theta_\ell^*}{\partial t} - \operatorname{div}_x \left\{ \mathbb{K}^* \lambda_\ell(S) \rho_\ell [\nabla P - X(S, P) \vec{g}] \right. \\ & \left. + \mathbb{K}^* \rho_\ell [\nabla \beta(S) - Z(S, P) \vec{g}] \right\} \\ & = -\frac{\Phi_m}{|Y_m|} \int_{Y_m} \frac{\partial \mathbf{L}_{\ell,m}}{\partial t}(x, y, t) dy, \end{aligned} \tag{7.23}$$

where the effective porosity Φ^* and \mathbb{K}^* , the effective permeability tensor, are given by

$$\Phi^* := \Phi_f \frac{|Y_f|}{|Y_m|} \quad \text{and} \quad \mathbb{K}_{ij}^* := \frac{K_f}{|Y_m|} \int_{Y_f} [\nabla_y \xi_i + \vec{e}_i] \cdot [\nabla_y \xi_j + \vec{e}_j] dy \quad (1 \leq i, j \leq d).$$

Since $\lambda_\ell(S)X(S, P) + Z(S, P) = \lambda_\ell(S)\rho_\ell$, from (7.23) we obtain

$$\begin{aligned} & \Phi^* \frac{\partial \Theta_\ell^*}{\partial t} - \operatorname{div}_x \left\{ \mathbb{K}^* \rho_\ell [\lambda_\ell(S) \nabla P + \nabla \beta(S) - \lambda_\ell(S) \rho_\ell \vec{g}] \right\} \\ & = -\frac{\Phi_m}{|Y_m|} \int_{Y_m} \frac{\partial \mathbf{L}_{\ell,m}}{\partial t}(x, y, t) dy. \end{aligned} \tag{7.24}$$

Step 4. Homogenized equation for the g phase. In a similar way, choosing $\zeta_2 = 0$, from the equation (7.7), we derive the second homogenized equation

$$\begin{aligned} & \Phi^* \frac{\partial \Theta_g^*}{\partial t} - \operatorname{div}_x \left\{ \mathbb{K}^* \rho_g [\lambda_g(S) \nabla P - \nabla \beta(S) - \lambda_g(S) \rho_g \vec{g}] \right\} \\ & = -\frac{\Phi_m}{|Y_m|} \int_{Y_m} \frac{\partial \mathbf{L}_{g,m}}{\partial t}(x, y, t) dy. \end{aligned} \tag{7.25}$$

Let us introduce now the functions that is naturally to call the homogenized phase pressures. Namely, we define

$$P_\ell := P + G_\ell(S) \quad \text{and} \quad P_g := P + G_g(S). \tag{7.26}$$

Then from (7.24)–(7.26) we get the equations

$$\Phi^* \frac{\partial \Xi_\ell^*}{\partial t} - \operatorname{div}_x \left\{ \mathbb{K}^* \rho_\ell \lambda_\ell(S) [\nabla P_\ell - \rho_\ell \vec{g}] \right\} = -\frac{\Phi_m}{|Y_m|} \int_{Y_m} \frac{\partial \mathbf{L}_{\ell,m}}{\partial t}(x, y, t) dy; \tag{7.27}$$

$$\Phi^* \frac{\partial \Xi_g^*}{\partial t} - \operatorname{div}_x \left\{ \mathbb{K}^* \rho_g \lambda_g(S) [\nabla P_g - \rho_g \vec{g}] \right\} = -\frac{\Phi_m}{|Y_m|} \int_{Y_m} \frac{\partial \mathbf{L}_{g,m}}{\partial t}(x, y, t) dy, \tag{7.28}$$

where

$$\Xi_\ell^* := S \rho_\ell (P_\ell) \quad \text{and} \quad \Xi_g^* := (1 - S) \rho_g (P_g).$$

At this stage, the homogenization process is finished by obtaining equations (7.27), (7.28). However, if in addition we want to express the functions $\mathbf{L}_{\ell,m}, \mathbf{L}_{g,m}$

in an explicit form, we need additional assumptions. Here, we assume that the cell problem (6.6) has a unique solution, then following the ideas of [23, 32], we obtain as in [9] these limits explicitly. This completes the proof of Theorem 6.1. \square

Remark 7.1. We conclude this section with a remark about the obtained homogenized model. The scaling is such that, in the final homogenized equations, the less permeable part of the matrix contributes as a nonlinear memory term which we can represent explicitly in the case where the cell problem has a unique solution. A uniqueness proof is not ready to the moment, it is out of the scope of this paper, it remains an open problem even for the incompressible model, but its aspects and their applications must be considered for further achievements for this homogenization approach.

Acknowledgments. This work was done in the framework of the International Research Group of CNRS GDRI LEM2I (Laboratoire Euro-Maghrébin de Mathématiques et de leurs Interactions). Most of the work on this paper was done when L. Ait Mahiout, A. Mokrane and L. Pankratov were visiting the Applied Mathematics Laboratory of the University of Pau & CNRS. They are grateful for the invitations and the hospitality. The work of L. Pankratov was partially supported by the Russian Academic Excellence Project 5top100 and by the Russian Scientific Fund [grant number 15-11-00015].

REFERENCES

- [1] E. Acerbi, V. Chiadò Piat, G. Dal Maso, D. Percival; *An extension theorem from connected sets, and homogenization in general periodic domains*, J. Nonlinear Analysis 18 (1992), 481–496.
- [2] G. Allaire; *Homogenization and two-scale convergence*, SIAM J. Math. Anal. 23 (1992), 1482–1518.
- [3] H. W. Alt, E. di Benedetto; *Nonsteady flow of water and oil through inhomogeneous porous media*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 12 (1985), 335–392.
- [4] B. Amaziane, S. Antontsev, L. Pankratov, A. Piatnitski; *Homogenization of immiscible compressible two-phase flow in porous media: application to gas migration in a nuclear repository*, SIAM J. Multiscale Model. Simul. 8 (5) (2010), 2023–2047.
- [5] B. Amaziane, M. Jurak; *A new formulation of immiscible compressible two-phase flow in porous media*, C. R. Mecanique 336 (2008), 600–605.
- [6] B. Amaziane, M. Jurak, A. Vrbaški; *Homogenization results for a coupled system modeling immiscible compressible two-phase flow in porous media by the concept of global pressure*, Appl. Anal. 92 (7) (2013), 1417–1433.
- [7] B. Amaziane, M. Jurak, A. Žgaljić-Keko; *Modeling and numerical simulations of immiscible compressible two-phase flow in porous media by the concept of global pressure*, Transp. Porous Media 84 (1) (2010), 133–152.
- [8] B. Amaziane, M. Jurak, A. Žgaljić-Keko; *An existence result for a coupled system modeling a fully equivalent global pressure formulation for immiscible compressible two-phase flow in porous media*, J. Differential Equations 250 (2011), 1685–1718.
- [9] B. Amaziane, L. Pankratov; *Homogenization of a model for water-gas flow through double-porosity media*, Math. Meth. Appl. Sci. 39 (2016), 425–451.
- [10] B. Amaziane, L. Pankratov, A. Piatnitski; *The existence of weak solutions to immiscible compressible two-phase flow in porous media: the case of fields with different rock-types*, Discrete Continuous and Dynamical Systems, Ser. B 15 (2013), 1217–1251.
- [11] B. Amaziane, L. Pankratov, A. Piatnitski; *Homogenization of immiscible compressible two-phase flow in highly heterogeneous porous media with discontinuous capillary pressures*, Math. Models Methods Appl. Sci. 24 (7) (2014), 1421–1451.
- [12] B. Amaziane, L. Pankratov, V. Rybalko; *On the homogenization of some double-porosity models with periodic thin structures*, Appl. Anal. 88 (10-11) (2009), 1469–1492.

- [13] S. N. Antontsev, A. V. Kazhikhov, V. N. Monakhov; *Boundary value problems in mechanics of nonhomogeneous fluids*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1990.
- [14] T. J. Arbogast; *The existence of weak solutions to single porosity and simple dual-porosity models of two-phase incompressible flow*, *Nonlinear Anal.* 19 (1992), 1009–1031.
- [15] T. Arbogast, J. Douglas, U. Hornung; *Derivation of the double porosity model of single phase flow via homogenization theory*, *SIAM J. Appl. Math. Anal.* 21 (1990), 823–836.
- [16] G. I. Barenblatt, Y. Zheltov, I. N. Kochina; *Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks*, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* 24 (1960), 1286–1303.
- [17] J. Bear, C.F. Tsang, G. de Marsily; *Flow and contaminant transport in fractured rock*. Academic Press Inc, London, 1993.
- [18] A. Bourgeat, O. Gipouloux, E. Marušić-Paloka; *Mathematical modeling of an under-ground waste disposal site by upscaling*, *Math. Methods Appl. Sci.* 27 (2004), 381–403.
- [19] A. Bourgeat, O. Gipouloux, F. Smai; *Scaling up of source terms with random behavior for modelling transport migration of contaminants in aquifers*, *Nonlinear Anal. Real World Appl.* 11 (2010), 4513–4523.
- [20] A. Bourgeat, E. Marušić-Paloka; *A homogenized model of an underground waste repository including a disturbed zone*, *SIAM J. Multiscale Model. Simul.* 3 (2005), 918–939.
- [21] A. Bourgeat, E. Marušić-Paloka, A. Piatnitski; *Scaling up of an underground nuclear waste repository including a possibly damaged zone*, *Asymptot. Anal.* 67 (2010), 147–165.
- [22] A. Bourgeat, A. Piatnitski; *Averaging of a singular random source term in a diffusion convection equation*, *SIAM J. Math. Anal.* 42 (2010), 2626–2651.
- [23] A. Bourgeat, S. Luckhaus, A. Mikelić; *Convergence of the homogenization process for a double-porosity model of immiscible two-phase flow*, *SIAM J. Appl. Math. Anal.* 27 (1996), 1520–1543.
- [24] H. Brezis; *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Masson, Paris, 1983.
- [25] C. Cancès, P. Michel; *An existence result for multidimensional immiscible two-phase flows with discontinuous capillary pressure field*, *SIAM J. Math. Anal.* 44 (2012), 966–992.
- [26] F. Caro, B. Saad, M. Saad; *Study of degenerate parabolic system modelling the hydrogen displacement in a nuclear waste repository*, *Discrete and Continuous Dynamical Systems, Ser. S* 7 (2014), 191–205.
- [27] G. Chavent, J. Jaffré; *Mathematical models and finite elements for reservoir simulation*. North-Holland, Amsterdam, 1986.
- [28] Z. Chen; *Degenerate two-phase incompressible flow. I. Existence, uniqueness and regularity of a weak solution*, *J. Differential Equations* 171 (2001), 203–232.
- [29] Z. Chen; *Degenerate two-phase incompressible flow. II. Regularity, stability and stabilization*, *J. Differential Equations* 186 (2002), 345–376.
- [30] Z. Chen; *Homogenization and simulation for compositional flow in naturally fractured reservoirs*, *J. Math. Anal. Appl.* 326 (1) (2007), 12–32.
- [31] Z. Chen, G. Huan, Y. Ma; *Computational methods for multiphase flows in porous media*, SIAM, Philadelphia, 2006.
- [32] C. Choquet; *Derivation of the double porosity model of a compressible miscible displacement in naturally fractured reservoirs*, *Appl. Anal.* 83 (2004) 477–500.
- [33] D. Cioranescu, A. Damllamian, G. Griso; *Periodic unfolding and homogenization*, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 335 (2002), 99–104.
- [34] G. W. Clark, R. E. Showalter; *Two-scale convergence of a model for flow in a partially fissured medium*, *Electron. J. Diff. Eqns.* 2 (1999), 1–20.
- [35] R. Eymard, T. Gallouet, R. Herbin; *Finite volume methods. Handbook of Numerical Analysis*, P.G. Ciarlet, J.L. Lions eds., 7 (2000), 713–1020.
- [36] G. Gagneux, M. Madaune-Tort; *Analyse mathématique de modèles non-linéaires de l'ingénierie pétrolière*. Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [37] C. Galusinski, M. Saad; *On a degenerate parabolic system for compressible, immiscible, two-phase flows in porous media*, *Adv. Differential Equations* 9 (2004), 1235–1278.
- [38] C. Galusinski, M. Saad; *Water-gas flow in porous media*, *Discrete Contin. Dyn. Syst., Ser. B*, 9 (2008), 281–308.
- [39] C. Galusinski, M. Saad; *Two compressible immiscible fluids in porous media*, *J. Differential Equations* 244 (2008) 1741–1783.

- [40] C. Galusinski, M. Saad; *Weak solutions for immiscible compressible multifluid flows in porous media*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I 347 (2009), 249–254.
- [41] O. Gipouloux, F. Smai; *Scaling up of an underground waste disposal model with random source terms*, Internat. J. Multiscale Comput. Engin. 6 (2008), 309–325.
- [42] A. Gloria, T. Goudon, S. Krell; *Numerical homogenization of a nonlinearly coupled elliptic-parabolic system*, reduced basis method, and application to nuclear waste storage, Math. Models Methods Appl. Sci. 23 (2013), 2523–2560.
- [43] R. Helmig; *Multiphase flow and transport processes in the subsurface*. Springer, Berlin, 1997.
- [44] P. Henning, M. Ohlberger, B. Schweizer; *Homogenization of the degenerate two-phase flow equations*, Math. Models Methods Appl. Sci. 23 (2013), 2323–2352.
- [45] U. Hornung; *Homogenization and porous media*. Springer-Verlag, New York, 1997.
- [46] Z. Khalil, M. Saad; *Solutions to a model for compressible immiscible two phase flow in porous media*, Electronic Journal of Differential Equations 122 (2010), 1–33.
- [47] Z. Khalil, M. Saad; *On a fully nonlinear degenerate parabolic system modeling immiscible gas-water displacement in porous media*, Nonlinear Analysis: Real World Applications 12 (2011) 1591–1615.
- [48] D. Kroener, S. Luckhaus; *Flow of oil and water in a porous medium*, J. Differential Equations 55 (1984), 276–288.
- [49] M. Panfilov; *Macroscale models of flow through highly heterogeneous porous media*. Kluwer Academic Publishers, London, 2000.
- [50] R. P. Shaw; *Gas generation and migration in deep geological radioactive waste repositories*. Geological Society, 2015.
- [51] T. D. Van Golf-Racht; *Fundamentals of fractured reservoir engineering*. Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, 1982.
- [52] J. L. Vázquez; *The porous medium equation. Mathematical theory*. Oxford University Press, Oxford, 2007.
- [53] L. M. Yeh; *Homogenization of two-phase flow in fractured media*, Math. Methods Appl. Sci. 16 (2006), 1627–1651.

LATIFA AIT MAHIOUT

LEDP, ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE KOUBA, BP 92, 16050, VIEUX KOUBA, ALGER, ALGERIA
E-mail address: latifaaitmahiout@gmail.com

BRAHIM AMAZIANE

LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES ET DE LEURS APPLICATIONS, CNRS-UMR 5142, UNIVERSITÉ DE PAU, AV. DE L'UNIVERSITÉ, 64000 PAU, FRANCE
E-mail address: brahim.amaziane@univ-pau.fr

ABDELHAFID MOKRANE

LEDP, ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE KOUBA, BP 92, 16050, VIEUX KOUBA, ALGER, ALGERIA
E-mail address: abdelhafid.mokrane@gmail.com

LEONID PANKRATOV

LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES ET DE LEURS APPLICATIONS, CNRS-UMR 5142, UNIVERSITÉ DE PAU, AV. DE L'UNIVERSITÉ, 64000 PAU, FRANCE.
LABORATORY OF FLUID DYNAMICS AND SEISMICS, MOSCOW INSTITUTE OF PHYSICS AND TECHNOLOGY, 9 INSTITUTSKIY PER., DOLGOPRUDNY, MOSCOW REGION, 141700, RUSSIAN FEDERATION
E-mail address: leonid.pankratov@univ-pau.fr

Chapitre 4

Simulations numériques d'écoulements diphasiques en milieux poreux

4.1 Introduction

Les réservoirs pétroliers sont en général constitués de roches fortement hétérogènes, à l'intérieur desquelles se trouvent des hydrocarbures que l'on souhaite extraire. Comme la profondeur d'un réservoir empêche la mise en place de mesures d'études exhaustives, les méthodes de récupération sont assistées par des simulations numériques. Celles-ci complètent les données d'exploitation (diagraphie, carottage, données sismiques), et les données de production aux puits, en modélisant le comportement d'un champ pétrolier.

Les procédés de récupération secondaire couramment pratiqués, consistent à pousser l'huile vers les puits de production en injectant un fluide (de l'eau par exemple), par des puits injecteurs judicieusement répartis. Ce procédé engendre un écoulement polyphasique dans le milieu poreux, modélisé par des équations non linéaires et couplées, présentant un caractère parabolique–hyperbolique.

D'une part, il est très probable que le modèle géologique comporte plus d'un million de mailles, et les outils informatiques dont on dispose actuellement, ne permettent pas d'obtenir une simulation à cette échelle dans un temps raisonnable, sans oublier certains problèmes de convergence qui peuvent apparaître, compte tenu de la faible taille des mailles géologiques.

D'autre part, il semble qu'il soit très difficile de tenter un history–matching pour un modèle supérieur à un million de mailles, vu le nombre colossal de simulations requises par cette opération de calage.

C'est pour ça que dans un second temps, on crée un modèle hydrodynamique en utilisant une technique dite d'*upscaling*, qui consiste à faire un regroupement de mailles du modèle géologique en calculant les propriétés effectives des mailles grossières du problème hydrodynamique.

La littérature mathématique est riche en travaux dédiés à la simulation d'écoulements diphasiques en milieu poreux, par exemple [15, 71, 59, 66].

Une technique mathématique d'*upscaling* est la méthode de l'homogénéisation périodique qui calcule les propriétés effectives du maillage hydrodynamique à partir des solutions de problèmes locaux avec des conditions aux bords périodiques (voir par exemple [60]).

Dans ce Chapitre, on se restreint à la simulation d'écoulements diphasiques immiscibles, sans effet de gravité, en utilisant le code DuMu^x.

À la première section, on présente le code DuMu^x. Ensuite, dans la seconde section, on présente quatre tests : le test 1 est le benchmark proposé par [83], et le test 2 est une adaptation 2 D du benchmark proposé par

[13]. Ces deux premiers tests nous ont permis d'avoir une vision précise sur ce que l'on peut faire avec DuMu^x pour les simulations numériques des écoulements diphasiques en milieux poreux, et de sa prise en main. Les tests 3 et 4 présentent des simulations numériques du problème étudié dans le Chapitre 2 de ce travail. Dans le test 3, le milieu poreux considéré est périodique, tant dit que dans le test 4, le milieu poreux est hétérogène. Ces deux tests nous ont permis de faire une comparaison de la progression du front de saturation, des pressions de chaque phase, ainsi que de la quantité d'huile totale récupérée à la sortie, entre le cas d'un milieu hétérogène, et le cas d'un milieu homogénéisé, ce qui nous permet d'apprécier la justesse des approximations obtenues par la méthode de l'homogénéisation.

4.2 Présentation de DuMu^x

DuMu^x [86] est un code de simulation numérique pour les écoulements et les processus de transport en milieux poreux.

Il a été développé comme module externe de DUNE [85] (Distributed and Unified Numeric Environment), qui est une librairie à outils modulaire pour la résolution des équations aux dérivées partielles. DuMu^x est basé sur le langage C++, et il emploie des techniques de programmation générique de haut niveau.

DuMu^x inclut plusieurs modèles standards, de complexité variable, allant d'un écoulement stationnaire isotherme monophasique à composante unique, à un écoulement non isotherme multi-composantes, multi-phasique.

4.2.1 Installation de DuMu^x

Pour installer DuMu^x, il faut suivre les étapes suivantes (nous allons installer la version 2.6 de DuMu^x) :

— Télécharger une version de DuMu^x sur la page

<http://www.dumux.org/download/> ;

— Télécharger les modules de DUNE suivants : dune-common, dune geometry, dune-grid, dune-istl, dune-localfunction sur le site

<http://www.dune-project.org/download.html>

(nous avons téléchargé la version 2.3.1 de ces modules) ;

— Créer un répertoire DUMUX_2.6 ;

— ensuite, y copier les répertoires dumux-2.6.0, dune common-2.3.1, dune geometry-2.3.1, dune-grid-2.3.1,

dune-istl-2.3.1, dune-localfunction-2.3.1 ;

— Déplacer le fichier optim.opts dans le répertoire DUMUX_2.6, et bien préciser le chemin d'accès ;

— Installer DuMu^x via la commande : `./dune-common-2.3.1/bin/dunecontrol -opts=optim.opts all`

Le code DuMu^x est maintenant prêt à être utilisé.

4.2.2 Utilisation de DuMu^x

Ce code est universitaire, et donc dédié aux étudiants et aux chercheurs dans le but de coder, tester, et appliquer de nouvelles approches en modélisation mathématique et numérique.

Le principe de base de conception de DuMu^x est la modularité. DuMu^x fournit des modules qui permettent à l'utilisateur de choisir les parties appropriées au problème traité. Les principales parties de cette configuration modulaire, sont :

— schémas numériques,

- stratégies de contrôle pour la simulation,
- concepts et modèles,
- systèmes de matériaux : cette partie comporte les composantes et les lois matérielles.

4.2.2.1 Schémas numériques

DuMu^x présente deux approches numériques possibles pour la résolution d'un problème en milieu poreux : l'approche couplée totalement implicite, et l'approche découplée semi-implicite. L'approche couplée totalement implicite est basée sur une discrétisation en temps par un schéma implicite, et une discrétisation en espace par une méthode de volumes finis. L'approche découplée sépare les équations de conservation en une équation pour la pression, ainsi qu'une ou plusieurs équations pour le transport (de phases, de composantes, d'énergie,...). L'équation de pression est alors traitée de façon implicite tandis que les équations de transport sont traités de façon explicite.

4.2.2.2 Traitement algébrique (linéaire et non linéaire).

Aussi bien pour les schémas couplés totalement implicite, que pour les schémas découplés semi-implicites, le problème linéarisé obtenu après la procédure de discrétisation en temps et en espace, est résolu par l'un des solveurs linéaires implémentés dans DUNE (tel que GMRES ou autres).

4.2.3 Choix du pas de temps

Dans DuMu^x, les schémas couplés fortement implicite, ainsi que les schémas découplés semi-implicites, utilisent le même code pour contrôler le pas de temps : d'abord, la période de simulation est divisée en épisodes définis comme des périodes, où les conditions au bord, et les termes source sont différentiables par rapport au temps. Ensuite, le temps de simulation est avancé par le minimum du pas de temps suggéré par les schémas numériques, ou bien par le laps de temps qui reste pour la fin de la période. Pour les schémas couplés fortement implicites, le pas de temps est réglé en fonction du nombre d'itérations requises à la convergence de la méthode de Newton. Pour les schémas découplés, le pas de temps est calculé par une condition CFL.

4.2.4 Concepts et modèles

Un aperçu des modèles actuellement disponibles dans DuMu^x est donné par le tableau suivant, où chaque modèle peut être choisi selon la description du problème étudié (les lois matérielles, les propriétés des composantes ect).

| totalemment implicite | découplé semi-implicite |
|---|-------------------------|
| 1p, 1p2c, 2p, 2pni, 2p2c, 2p2cni, 2pdfm, 2pni, 3p, 3p3c, 3p3cni, co2, co2ni, mpnc, Richards | 1p, 2p, 2p2c |

Dans les noms des modèles cités dans le tableau, la nomenclature suivante est utilisée : **p** : pour phase, **c** : pour composante, **ni** : pour non isotherme. Une description pour chacun de ces modèles est détaillée dans [86].

4.2.5 Systèmes de matériaux

Le système matériel de DuMu^x constitue un cadre qui permet une définition pratique, et une utilisation des paramètres et des lois matérielles. Il a une structure modulaire composée des parties suivantes :

-**Composants.** Le terme composant fait référence aux constituants d'une phase qui peuvent être associées à une espèce chimique unique, ou à un groupe d'espèces ayant un comportement physique similaire. Chaque composant est implémentée comme une classe constituée de fonctions décrivant ses propriétés physiques. Cela va d'une simple constante comme la masse molaire, à des relations complexes comme la densité en fonction de la pression et de la température.

-**FluidSystems.** Un FluidSystem décrit les propriétés de chaque phase de l'écoulement. Cela inclut les densités phasiques, les viscosités, et les coefficients de diffusion des composantes de chaque phase. Les propriétés des phases dépendent généralement de leur composition qui est décrite dans un objet séparé de type FluidState, contenant les valeurs de la saturation et de la fraction molaire.

-**FluidMatrixInteractions.** Ce module rassemble les lois qui décrivent les interactions entre le fluide et le milieu poreux, i.e., la pression capillaire et la perméabilité relative. Une collection de lois standards est fournie, e.g. les modèles de Van-Genuchten, et les modèles de Brooks et Corey. Chaque loi matérielle utilise un ensemble de paramètres du type Material Law Params, de plus, elle peut dépendre de son emplacement à l'intérieur du domaine.

-**SpatialParameters.** Cette partie regroupe tous les paramètres qui varient selon leur position dans le milieu poreux. Il admet une affectation locale des propriétés purement intrinsèques, telles que la porosité, la perméabilité, ou la capacité thermique.

4.3 Simulations numériques

Nous présentons dans cette partie, quatre tests de simulations numériques d'écoulements diphasiques et immiscibles en milieu poreux, en utilisant le code DuMu^x.

4.3.1 Test 1 : Benchmark BOBG 1-D.

Nous présentons ici le test proposé dans le cadre du GdR MoMaS [83] en utilisant le code DuMu^x, et comparons nos résultats avec ceux obtenus dans [15] où c'est une approche volumes finis qui est utilisée. Il s'agit d'un écoulement diphasique immiscible (eau-gaz) en milieu poreux.

4.3.1.1 Modélisation physique et mathématique.

On considère les équations mono-dimensionnelles d'écoulement diphasique immiscibles en milieu poreux, sans changement de phase. On a donc deux composantes et deux phases. Le composant liquide n'est présent que dans la phase liquide, le composant gaz n'est présent que dans la phase gaz. L'état initial de la saturation en liquide est hors équilibre.

L'équation de conservation de la masse de liquide est :

$$\Phi \frac{\partial (S_l \rho_l)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho_l \frac{K k_{rl}}{\mu_l} \frac{\partial P_l}{\partial x} \right) = 0, \quad (4.1)$$

et l'équation de conservation de la masse du gaz, est :

$$\Phi \frac{\partial ((1 - S_l) \rho_g)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho_g \frac{K k_{rg}}{\mu_g} \frac{\partial P_g}{\partial x} \right) = 0. \quad (4.2)$$

Le comportement du liquide est incompressible : $\rho_l = \text{cte}$.

Le comportement du gaz compressible est donné par la lois des gaz parfaits : $\rho_g = \frac{M_g^{ol}}{R\tau} P_g$, où M_g^{ol} est la masse molaire du gaz considéré, et R est la constante universelle des gaz parfaits : $R = 8.3144621 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$, et τ est la température.

Ce test décrit une opération de re-saturation d'un matériau par un autre ayant des propriétés physiques très hétérogènes, typiquement la barrière ouvragée (BO) par la barrière géologique (BG). Ces deux matériaux possèdent des propriétés physiques différentes. De plus, ils ont des états initiaux en saturation très différents. La principale difficulté de ce type de modélisation vient des hétérogénéités des propriétés physiques et des conditions initiales en saturation, qui engendrent des discontinuités au niveau de l'interface des deux matériaux.

Nous considérons un domaine cartésien rectangulaire (Figure 4.1) constitué de deux sous-domaines (BO et BG). La longueur du domaine est de 0.5 m pour chaque matériau. Le matériau BG est affecté au domaine BG, et le matériau BO au domaine BO.

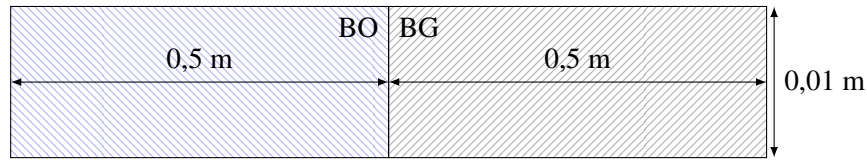


FIGURE 4.1 – Représentation du domaine du cas test bi-matériau 1-D.

Les deux fluides sont ici immiscibles : liquide et gaz, et les caractéristiques physiques telles que la viscosité et la densité des deux fluides, sont données par :

$$\rho_w = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}, \mu_w = 10^{-3} \text{ Pa.s},$$

$$\rho_g = 890 \text{ kg.m}^{-3}, \mu_g = 1.8 \cdot 10^{-5} \text{ Pa.s},$$

La pression capillaire est donnée par le modèle de Van Genuchten :

$$P_c(S) = A \left(S^{-1/B} - 1 \right)^{(1-B)},$$

où $A = 1.5 \cdot 10^6$, et $B = 0.06$ dans le matériau BO, $A = 10^7$, et $B = 0.412$ dans le matériau BG.

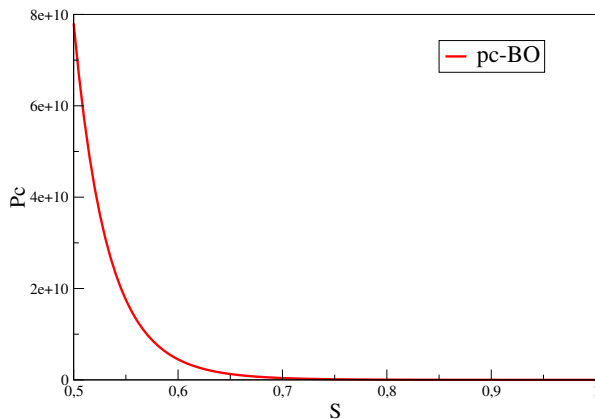


FIGURE 4.2 – Courbe de la pression capillaire dans le milieu BO.

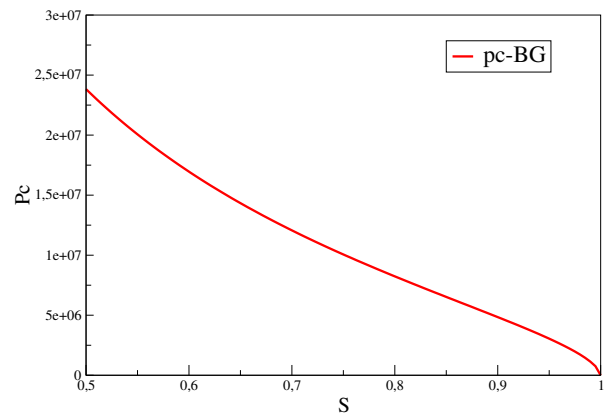


FIGURE 4.3 – Courbe de la pression capillaire dans le milieu BG.

La perméabilité relative du gaz quant à elle, est donnée par la loi de Brooks Corey :

$$k_{rg}(S) = (1 - S)^2 \left(1 - S^{5/3}\right), \quad (4.3)$$

La perméabilité du liquide est donnée dans chaque matériau, par les formules suivantes : dans le matériau BO :

$$k_{rl}(S) = \left(1 + \frac{(S^{-16.67} - 1)^{1.880}}{4}\right)^{-0.5}. \quad (4.4)$$

-Dans le matériau BG :

$$k_{rl}(S) = \left(1 + (S^{-2.429} - 1)^{1.1760}\right)^{-1}. \quad (4.5)$$

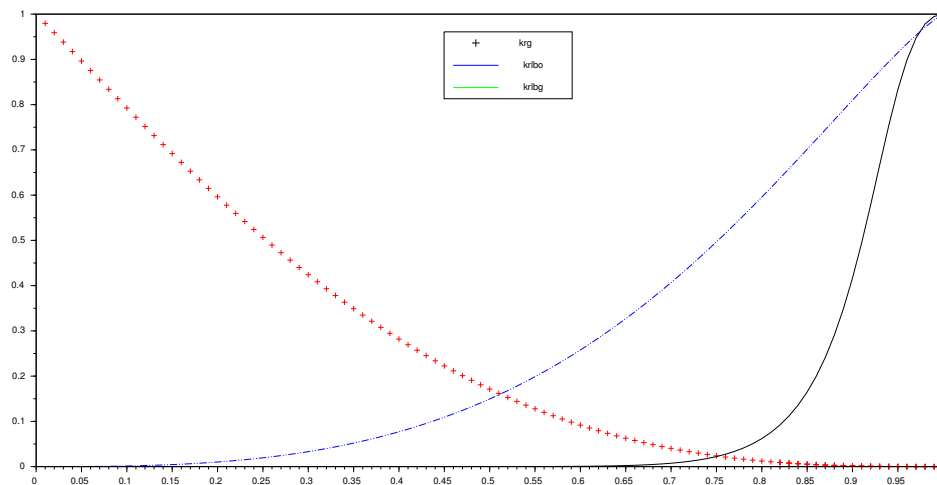


FIGURE 4.4 – Représentation des perméabilités relatives dans le milieu BOBG.

Enfin, les porosités et les perméabilités intrinsèques de chaque milieu sont données par :

- Dans BO : $\Phi = 0.3$, et $K = 10^{-20} \text{ m}^2$.
- Dans BG : $\Phi = 0.05$, et $K = 10^{-19} \text{ m}^2$.

Initialement, la barrière géologique est saturée en eau : $S_l = 1$, et la barrière ouvragée est partiellement désaturée en liquide : $S_l = 0.77$. La pression du gaz est la même dans les deux matériaux : $P_g = 10^5 \text{ Pa}$, ce qui signifie une concentration du gaz dissous dans la barrière géologique. Les frontières du domaine sont supposées imperméables.

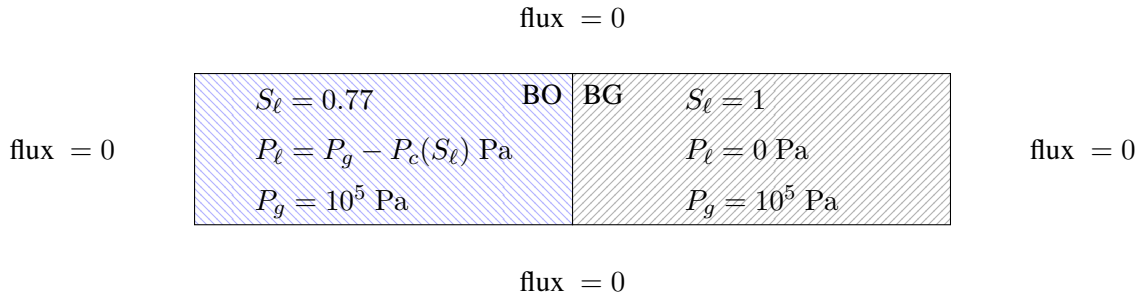


FIGURE 4.5 – Représentation des conditions initiales et aux limites du cas test BOBG 1-D.

4.3.1.2 Résultats numériques.

Pour faire ces simulations, nous utilisons le code DuMu^x basé sur un schéma volumes finis vertex centered. Nous obtenons des résultats similaires à ceux de [15], dont l'analyse est reproduite ci-dessous. Le phénomène mis en avant dans cette étude est le rééquilibrage capillaire d'un milieu par un autre : l'eau présente dans la barrière géologique (saturée en eau) va avoir tendance à s'écouler vers la barrière désaturée afin de la re-saturer en eau (Figure 4.6). Nous allons remarquer la création d'une zone de vide où l'eau est partie et le gaz n'est pas encore arrivé. Cette zone est visible, par exemple, à 116 jours en $x = 0.3$ m (Figure 4.8), car la saturation est inférieure à 1 et la quantité du gaz est encore nulle.

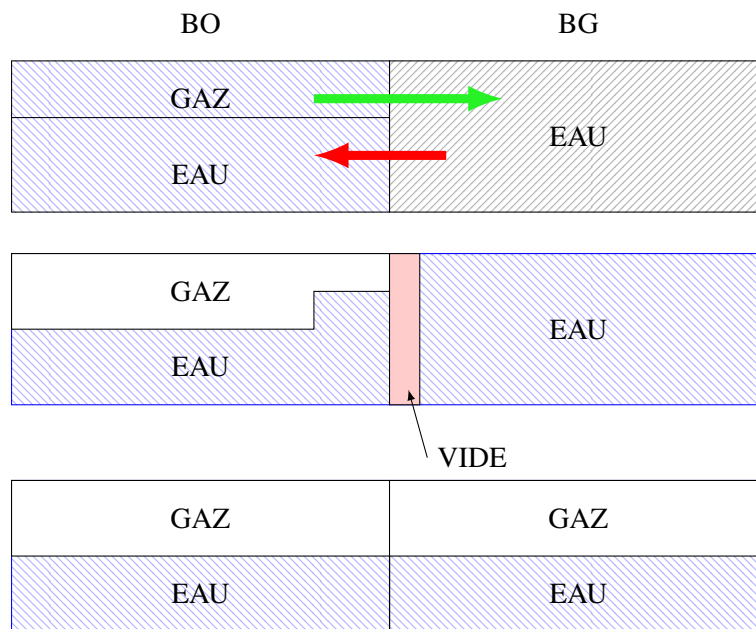


FIGURE 4.6 – Explication des phénomènes se déroulant dans les matériaux.

De 0 à 1 an. Du fait des caractéristiques physiques de nos matériaux (perméabilités relatives, perméabilités absolues, porosités, et viscosités), l'eau va arriver plus vite et en plus grande quantité dans la barrière ouvragée que le gaz ne va s'écouler dans l'autre sens. Deux périodes sont alors distinguables : de 10 min à 2.8 heures lorsque le gaz ne pénètre pas encore dans la barrière géologique et de 116 jours à 1 an lorsque le gaz pénètre.

• *De 10 min à 2.8 heures.* Dans la barrière géologique, l'eau s'écoule vers la barrière ouvragée et n'est pas encore remplacée par le gaz entraînant la désaturation de la zone. Des zones de vide apparaissent alors près de l'interface (i-e la saturation est inférieure à un et la pression du gaz est nulle). Dans la barrière ouvragée, le gaz est comprimé près de l'interface et un pic de pression du gaz se forme. Nous relevons la très faible resaturation de cette zone qui provient du choix des courbes de pression capillaire de chaque milieu qui contrôle les vitesses de restauration de chaque matériau. Le rééquilibrage capillaire est également très faible et la quantité de gaz n'évolue pas dans les matériaux, puisque seule l'eau a bougé (voir Figure 4.7).

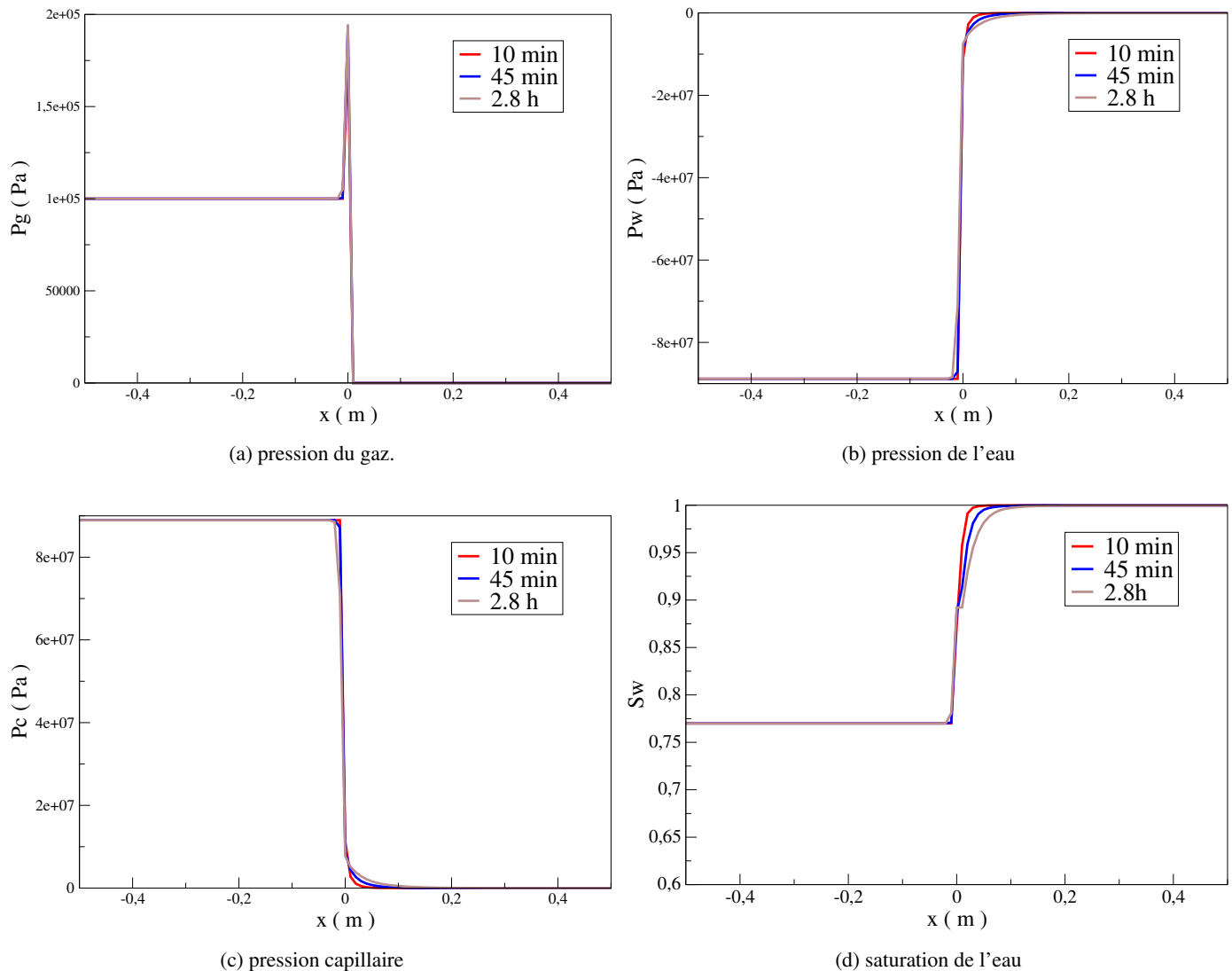


FIGURE 4.7 – Représentation de la pression du gaz, la pression du liquide, la pression capillaire et la saturation du liquide en différents temps.

• *De 116 jours à 1 an.* L'eau continue de s'écouler de BG vers BO et dès 116 jours, le gaz parvient à pénétrer dans la barrière géologique. Le gaz s'étend alors dans tout le domaine et sa pression dans la barrière ouvragée augmente, une zone de vide est toujours visible dans la barrière géologique. Ce transfert de fluides se traduit sur la quantité du gaz par une augmentation de cette dernière dans la zone saturée (BG) et une diminution

dans la zone désaturée (BO). Le rééquilibrage capillaire est bien amorcé et les pressions de liquide tendent à s'uniformiser dans les deux matériaux. Nous observons à 116 jours et à un an, dans la barrière géologique, près de l'interface, le déplacement de $P_g = 0$ avec une pente et une vitesse finies. Jusqu'à un an, le gaz et le liquide s'étendent dans la barrière géologique, le liquide se propage dans la barrière ouvragée en désaturant de plus en plus la barrière géologique (voir Figure 4.8).

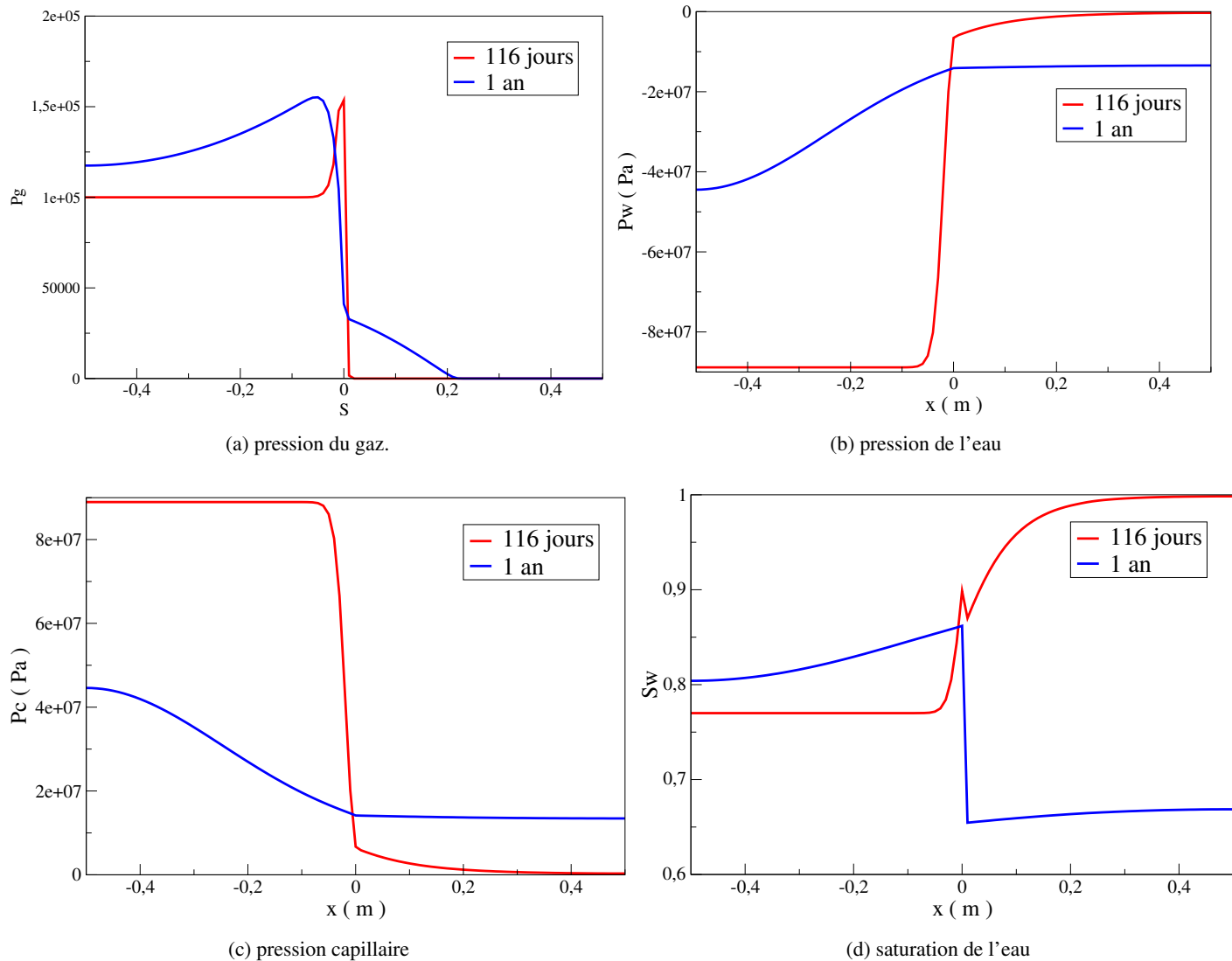


FIGURE 4.8 – Représentation de la pression du gaz, la pression de l'eau, la pression capillaire et la saturation de l'eau en différents temps.

De 100 ans à 1000 ans. À 100 ans, le rééquilibrage capillaire est quasiment terminé : la pression d'eau, la pression capillaire ainsi que la saturation sont pratiquement constantes dans les deux matériaux. Seules des différences sur la pression du gaz dans les deux matériaux sont encore visibles à l'œil. À 1000 ans, la pression du gaz, la pression capillaire et la pression du liquide sont uniformes dans les deux matériaux. Nous remarquons la discontinuité de la saturation entre les deux matériaux provenant des hétérogénéités des propriétés physiques

des matériaux (voir Figure 4.9).

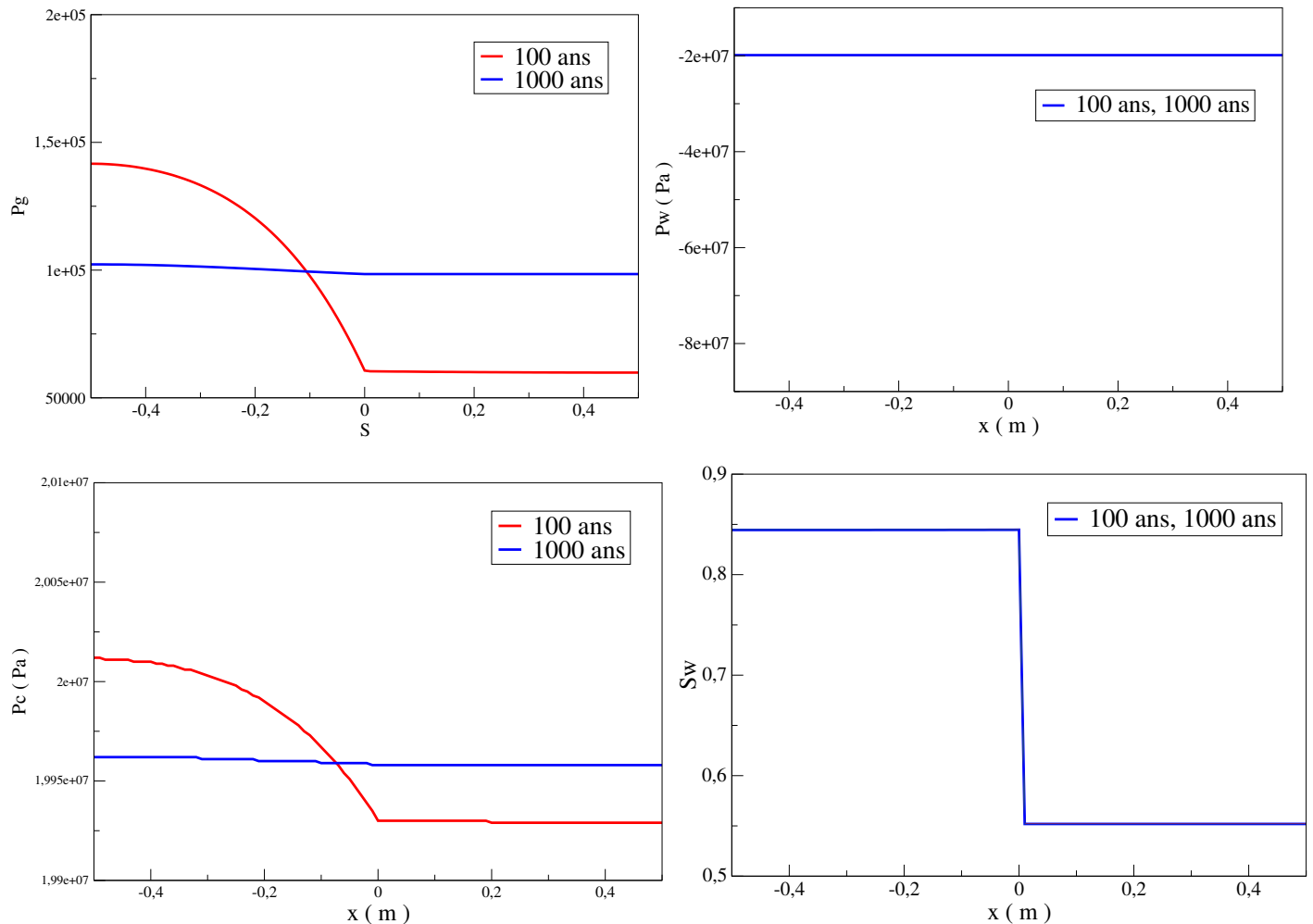


FIGURE 4.9 – Représentation de la pression du gaz, la pression du liquide, la pression capillaire et la saturation du liquide en différents temps.

4.3.2 Test 2 : Injection d'un gaz dans un milieu poreux 2D, saturé en eau.

Nous présentons ici une adaptation 2 D du benchmark proposé par [13], en modifiant une condition aux bords. Il s'agit d'une simulation numérique d'écoulements diphasiques avec échange de phases : phase liquide et phase gaz, à deux composantes : l'eau et l'hydrogène.

4.3.2.1 Modélisation physique et mathématique.

On note par ρ_p^c la densité de chaque composante $c = \{w, h\}$, dans chaque phase $p = \{l, g\}$. Elle est liée à la densité de chaque phase $p = \{l, g\}$ par la relation :

$$\rho_p = \rho_p^h + \rho_p^w. \quad (4.6)$$

La concentration molaire C_p de la phase $p = l, g$, la concentration molaire C_p^c et la fraction molaire X_p^c de la composante $c = w, h$ dans la phase $p = l, g$ sont définies par :

$$C_p^c = \frac{\rho_p^c}{M^c}, \quad C_p = C_p^h + C_p^w \text{ et } X_p^c = \frac{C_p^c}{C_p}, \quad (4.7)$$

où M^c note la masse molaire de la composante c .

Les équations de conservation de la masse des deux composantes $c = \{w, h\}$, sont données par :

$$\begin{cases} \frac{\partial m_l^w}{\partial t} + \frac{\partial m_g^w}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\rho_l^w \frac{F_l}{\rho_l} + \rho_g^w \frac{F_g}{\rho_g} + J_l^w + J_g^w \right) = 0, \\ \frac{\partial m_l^h}{\partial t} + \frac{\partial m_g^h}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\rho_l^h \frac{F_l}{\rho_l} + \rho_g^h \frac{F_g}{\rho_g} + J_l^h + J_g^h \right) = 0, \end{cases} \quad (4.8)$$

avec $m_p^c = \Phi \rho_p^c S_p$. Dans (4.8), on note par F_p le flux donné par la loi de Darcy :

$$\frac{F_p}{\rho_p} = -\frac{K k_{rp}}{\mu_p} (\nabla P_p - \rho_l g), \quad (4.9)$$

où l'on note par g l'accélération de gravité, μ_p la viscosité de la phase p , K la perméabilité intrinsèque du milieu, et k_{rp} la perméabilité relative de la phase p . On note J_p^c le flux de diffusion donné par la loi de Fick :

$$J_g^w = -\Phi M^w S_g D_g^w C_g \nabla X_g^w, J_g^h = -\Phi M^h S_g D_g^h C_g \nabla X_g^h, J_l^w = 0, J_l^h = -\Phi M^h S_l D_l^h C_l \nabla_l^h.$$

Afin de fermer le système, les lois d'équilibre des composantes $c = w, h$ sont requises. On suppose que l'équilibre de la composante gaz entre les deux phases est donné par la loi d'Henry qui peut être exprimée par :

$$(\rho_l^h = HM^h P_g \text{ et } S_l = 1) \text{ ou } (\rho_l^h \leq HM^h P_g \text{ et } S_l < 1) \quad (4.10)$$

en notant H la constante d'Henry à la température du domaine (supposée constante en espace et en temps). Ré-écrivons maintenant le système (4.8)–(4.10) en remarquant que, dans la zone où $S_l = 1$, tous les termes de (4.8) qui dépendent de P_g sont multipliés par $S_g = 0$ ou $k_{rg}(1) = 0$. Par conséquent, P_g qui est liée à ρ_l^h dans la région $S_l < 1$ par (4.10), peut être nulle dans la région où $S_l = 1$. Ainsi, on choisit de poser

$$P_g = \frac{\rho_l^h}{HM^h} \text{ dans les deux cas } S_l = 1, \text{ et } S_l < 1. \quad (4.11)$$

Ainsi, par (4.11), la relation $C_l^h = HP_g$ est satisfaite que la zone soit saturée ou sous-saturée, et l'inégalité $P_g \leq P_l$ est satisfaite dans la zone saturée $S_l = 1$. Donc, le système qui modélise un écoulement diphasique à deux composantes, est le système suivant à deux inconnues P_l et P_g :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi A^w(p_l, p_g)}{\partial t} - \operatorname{div}(K B_l^w(p_l, p_g)(\nabla p_l - \rho_l g)) & = 0 \\ \frac{\partial \Phi A^w(p_l, p_g)}{\partial t} - \operatorname{div}(K B_l^h(p_l, p_g)(\nabla p_l - \rho_l g) + K B_g^h(p_l, p_g)(\nabla p_g - \rho_g(p_g)g) + \Phi D_l^h(p_l, p_g)\nabla p_g) & = 0 \end{cases} \quad (4.12)$$

où

$$A^w(p_l, p_g) = \rho_l C(p_g - p_l), B_l^w(p_l, p_g) = \rho_l \frac{k_{rl}(C(p_g - p_l))}{\mu_l},$$

$$\rho_g(p_g) = \frac{M^h p_g}{RT}, A^h(p_l, p_g) = \rho_g(p_g)(1 - C(p_g - p_l)) + HM^h C(p_g - p_l),$$

$$B_l^h(p_l, p_g) = HM^h p_g \frac{kr_l(C(p_g - p_l))}{\mu_l}, B_g^h(p_l, p_g) = \rho_g(p_g) \frac{kr_g(C(p_g - p_l))}{\mu_g},$$

$$D_l^h(p_l, p_g) = M^h C(p_g - p_l) D_l^h \frac{\rho_l^w}{M^w} H,$$

où la fonction capacité $C(p)$ est la réciproque de la fonction pression capillaire pour $p \geq 0$, et qui vaut 1 pour $p \leq 0$.

Le phénomène mis en avant dans ce test, est le phénomène de drainage : on a un milieu saturé en eau, et on lui injecte une quantité de gaz. Nous allons remarquer que dans un premier temps, le gaz se dissout dans l'eau, puis à partir d'un certain temps, l'hydrogène va constituer une phase qu'on appellera la phase gaz, et qui va pousser l'eau en dehors du milieu poreux.

Nous considérons un domaine cartésien carré dont les côtés font 10 m chacun.

La pression capillaire ainsi que les perméabilités relatives sont données par le modèle de Van Genuchten, en fonction des paramètres P_r, S_{lr}, S_{gr}, m , et n :

$$\begin{cases} S_{le} = \frac{S_l - S_{lr}}{1 - S_{lr} - S_{gr}}, P_c = P_r (S_{le}^{-1/m} - 1)^{1/n}, \\ k_{rl} = \sqrt{S_{le}} (1 - (1 - S_{le}^{1/m})^m)^2, k_{rg} = \sqrt{(1 - S_{le})} (1 - S_{le}^{1/m})^{2m}, \end{cases} \quad (4.13)$$

où S_{lr} et S_{gr} sont des saturations résiduelles. Les paramètres utilisés dans (4.13), ainsi que les paramètres physiques du milieu poreux sont présentés dans le tableau suivant :

| paramètres | valeurs | paramètres | valeurs |
|----------------|--------------------|--|----------------------|
| K (m^2) | $5 \cdot 10^{-20}$ | D_l^h ($m^2 \cdot s^{-1}$) | $3 \cdot 10^{-9}$ |
| Φ | 0.15 | μ_l ($Pa \cdot s$) | 10^{-3} |
| P_r (Pa) | $2 \cdot 10^6$ | μ_g ($Pa \cdot s$) | $9 \cdot 10^{-6}$ |
| n | 1.49 | H ($mol \cdot Pa^{-1} \cdot m^{-3}$) | $7.65 \cdot 10^{-6}$ |
| S_{lr} | 0.4 | M^w ($kg \cdot mol^{-1}$) | $18 \cdot 10^{-3}$ |
| S_{gr} | 0 | M^l ($kg \cdot mol^{-1}$) | $2 \cdot 10^{-3}$ |
| m | $1 - \frac{1}{n}$ | ρ_l ($kg \cdot m^{-3}$) | 10^3 |

Initialement, le milieu est saturé en eau pure. Au coin en haut à droite du domaine sur la frontière $1 \text{ m} \times 1 \text{ m}$, on impose une pression d'eau liquide $P_g = 10^6 \text{ Pa}$, et sur la frontière $1 \text{ m} \times 1 \text{ m}$ au coin en bas à gauche du domaine, on injecte un flux de gaz $\rho_g \vec{q}_g \cdot \vec{n} = -1.76 \cdot 10^{-11} \text{ kg} \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}$. Les frontières du domaine sont supposées imperméables (voir Figure 4.10).

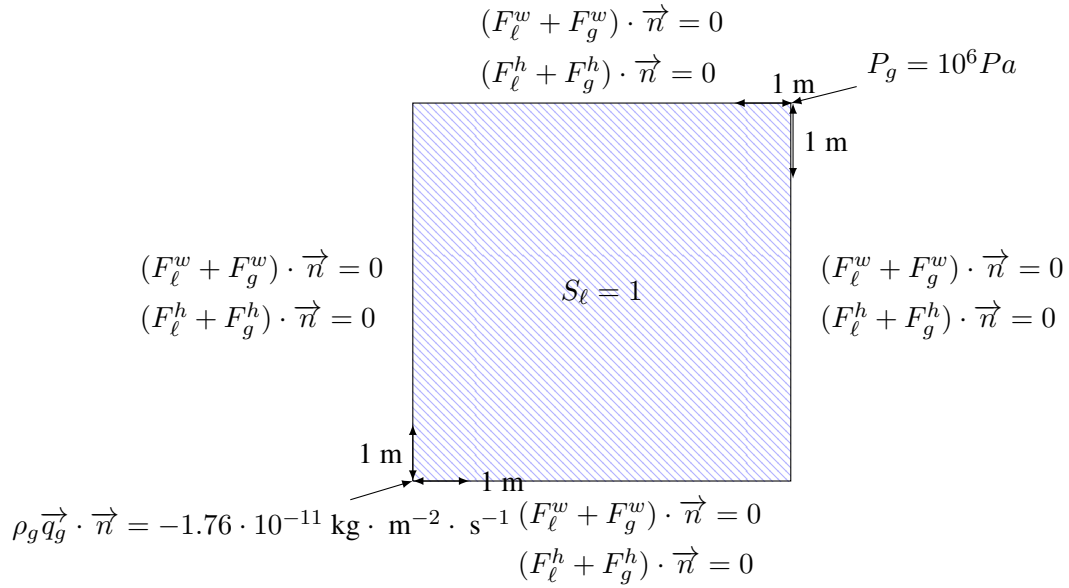
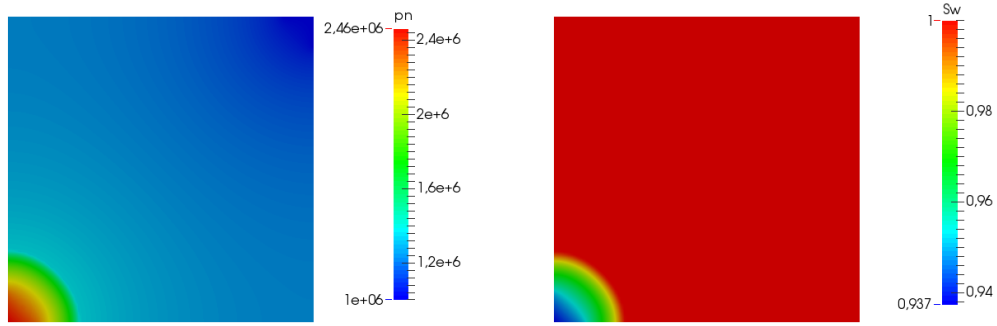


FIGURE 4.10 – Représentation des conditions initiales et aux limites du test 2.

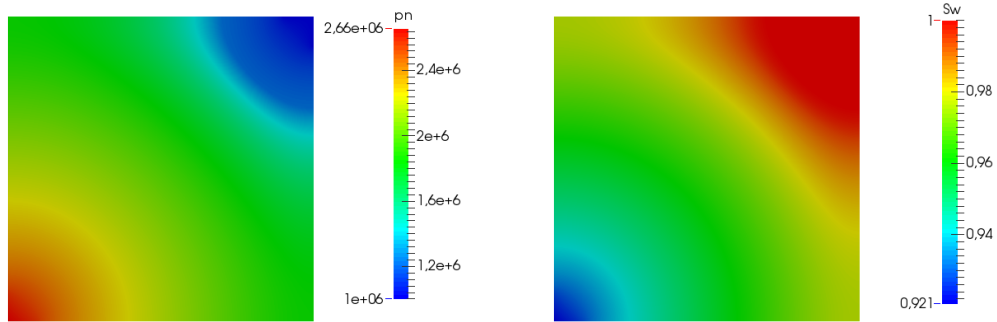
4.3.2.2 Résultats numériques.

La figure 4.11 représente l'avancement du front pour la saturation du liquide et la pression du gaz, avec des temps de simulations de 50 ans, 1000 ans, et 10 000 ans.

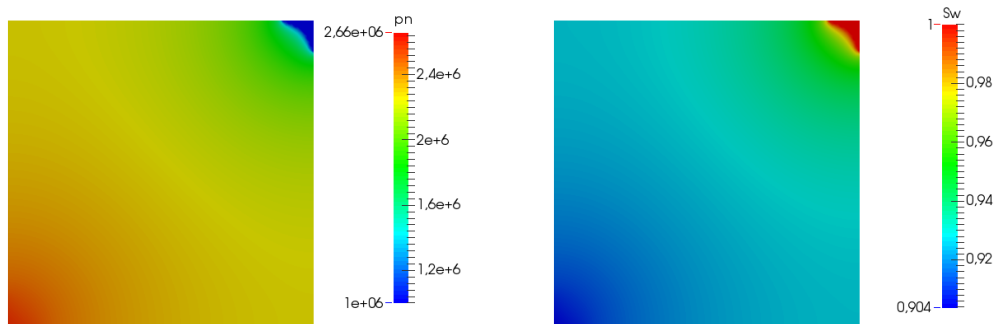
Au début de l'injection, le gaz injecté est totalement dissout dans l'eau, puis lorsque la fraction molaire dans l'eau dépasse une certaine valeur, la phase gazeuse apparaît. À $T = 50$ ans, le front de gaz n'a pas beaucoup avancé, tandis qu'à $T = 1000$ ans et à $T = 10000$ ans, le domaine est presque saturé en gaz.



(a) T=50 ans



(b) T=1000 ans



(c) T=10000 ans

FIGURE 4.11 – Représentation de la pression du gaz (à gauche) et la saturation du liquide (à droite) en différents temps : en haut 50 ans, au milieu 1000 ans, en bas 10 000 ans.

4.3.3 Test 3 : Milieu périodique.

Nous présentons ici, des simulations numériques d'écoulements diphasiques immiscibles : eau–huile modélisé par le problème décrit dans le Chapitre 2 de ce travail, dans un milieu périodique et dans un milieu homogénéisé, suivi d'une comparaisons entre les différents résultats obtenus.

4.3.3.1 Données physiques du problème.

On considère un quart de five-spot, carré, dont la longueur de chaque côté est $L = 600$ m, périodique, constitué de deux milieux M_1 et M_2 . Les perméabilités intrinsèques du milieu sont données par :

$$K_1 = 10^{-13} \text{ m}^2, K_2 = 10^{-15} \text{ m}^2,$$

où K_1 et K_2 notent respectivement, la perméabilité du milieu M_1 , et la perméabilité du milieu M_2 (voir Figure 4.12). La porosité est constante $\Phi = 0.2$.

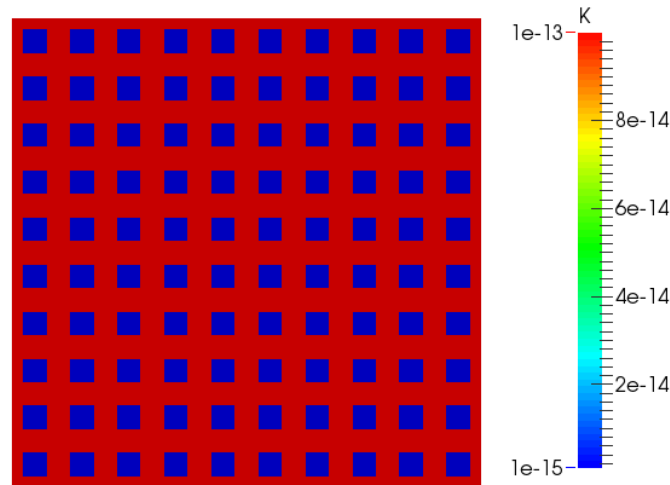


FIGURE 4.12 – Représentation de la perméabilité du milieu périodique.

La pression capillaire ainsi que les perméabilités relatives sont données par le modèle de Van Genuchten (voir 4.13, et 4.14).

$$P_c(S) = 10^4 (S^{-1/m} - 1)^{1/n}, \quad (4.14)$$

où $n = 2.8$ et $m = 1 - \frac{1}{n}$.

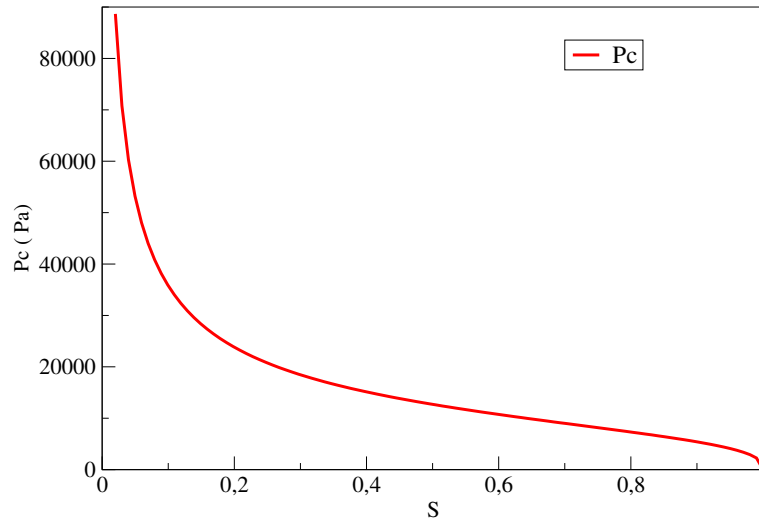


FIGURE 4.13 – Représentation de la pression capillaire.

$$kr_w(S) = S^2 \text{ et } kr_o(S) = (1 - S)^2. \quad (4.15)$$

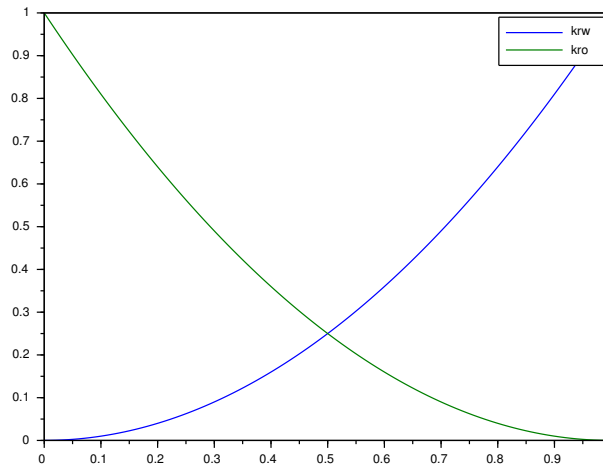


FIGURE 4.14 – Représentation des perméabilités relatives.

Les caractéristiques des deux fluides, telles que la viscosité et la densité sont données par :

$$\rho_w = 1 \text{ kg.m}^{-3}, \mu_w = 10^{-3} \text{ Pa.s},$$

$$\rho_o = 0.89 \text{ kg.m}^{-3}, \mu_o = 4 \cdot 10^{-3} \text{ Pa.s}.$$

Initialement, le milieu est saturé en huile. Sur la frontière $15 \text{ m} \times 15 \text{ m}$ au coin en bas à gauche du domaine, on injecte le débit d'eau $\rho_w \vec{q}_w \cdot \vec{n} = -140.0 \text{ kg/jour/m}^2$, et sur la frontière $15 \text{ m} \times 15 \text{ m}$ au coin en haut à droite du domaine, on impose la pression de l'huile $p_o = 150 \text{ bar}$.

Enfin, pour le problème homogénéisé associé, la perméabilité intrinsèque du domaine est $K^* = 61.0648 \cdot 10^{-15} \text{ m}^2$ (voir [84]).

4.3.3.2 Résultats numériques.

Nous commençons d'abord par faire une analyse de sensibilité pour choisir un maillage qui donne, après résolution numérique, le résultat le plus satisfaisant possible.

Dans un premier temps, on commence par faire un maillage 10 cellules \times 10 cellules pour le domaine, avec chaque cellule contenant 4 mailles, ce qui revient à un maillage 40×40 (voir Figure 4.15), puis, nous faisons un raffinement du maillage, et cela en gardant 10 cellules \times 10 cellules, mais chaque cellule comprend 8 mailles, ce qui revient à un maillage 80×80 (voir Figure 4.16).

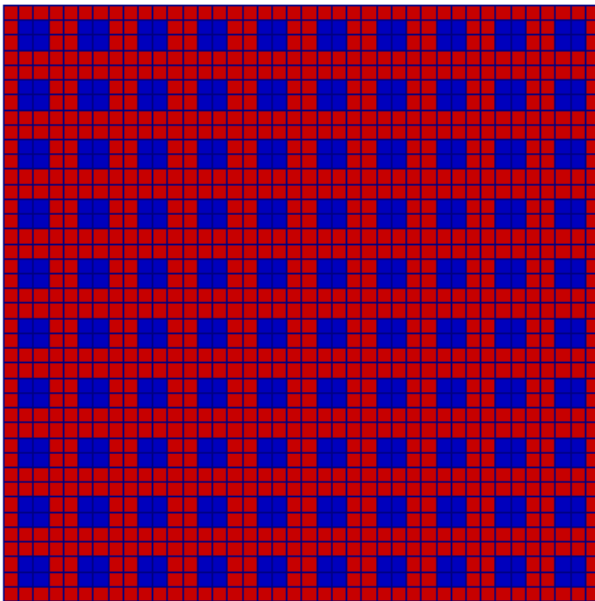


FIGURE 4.15 – maillage 40×40 .

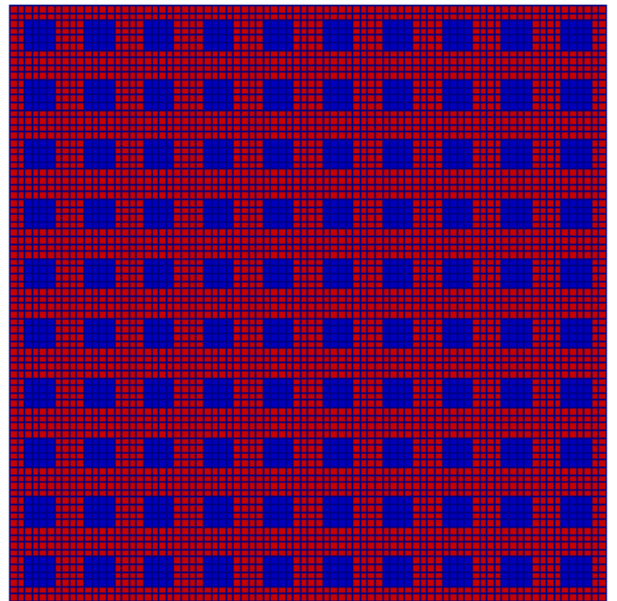


FIGURE 4.16 – maillage 80×80 .

Les courbes suivantes représentent les courbes de saturation et de pression de l'eau en milieu hétérogène, pour les deux maillages 40×40 et 80×80 , sur la diagonale du carré, du point $(0, 0)$ au point $(600, 600)$.

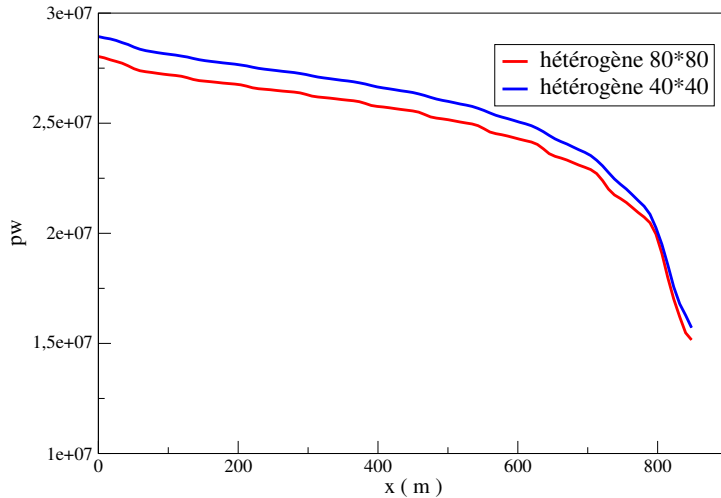


FIGURE 4.17 – Pression de l'eau en diagonale.

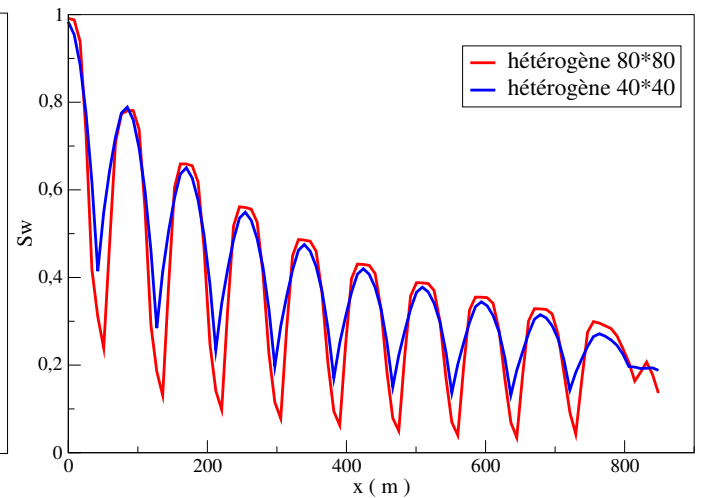


FIGURE 4.18 – Saturation de l'eau en diagonale.

De la même façon, nous choisissons un maillage qui donnera des résultats numériques satisfaisant pour le modèle homogénéisé associé, et pour ça, on commence par un maillage 40×40 , puis on passe à un maillage plus raffiné, tel que 80×80 . On obtient les courbes suivantes, des saturations et pressions de l'eau qui montrent la différence de précision entre les deux maillages utilisés.

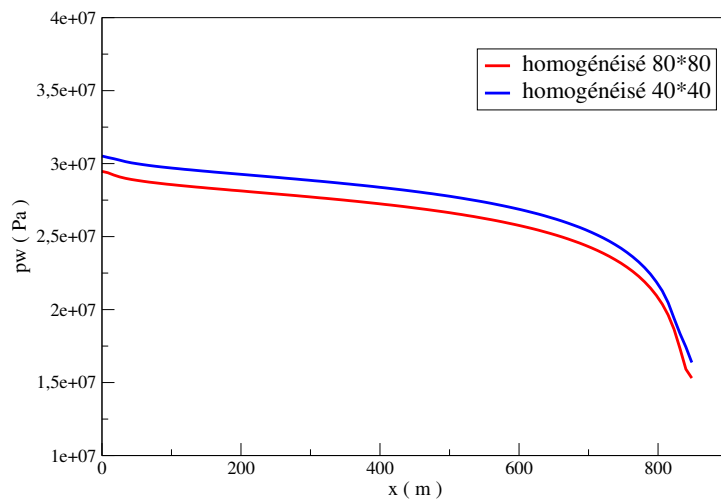


FIGURE 4.19 – Pression de l'eau en diagonale.

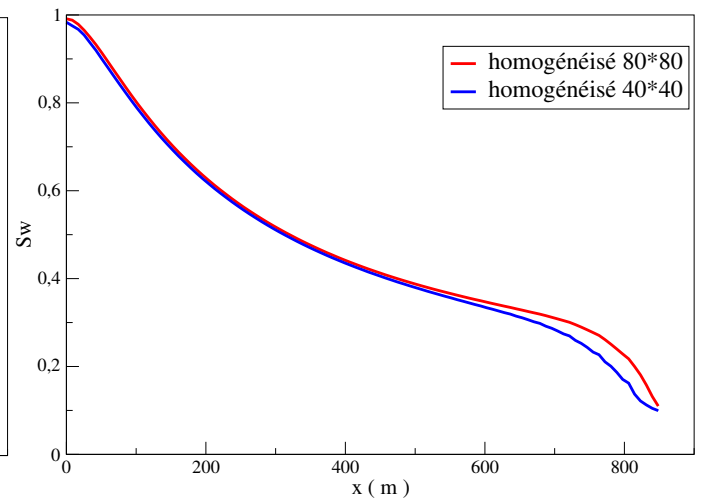


FIGURE 4.20 – Saturation de l'eau en diagonale.

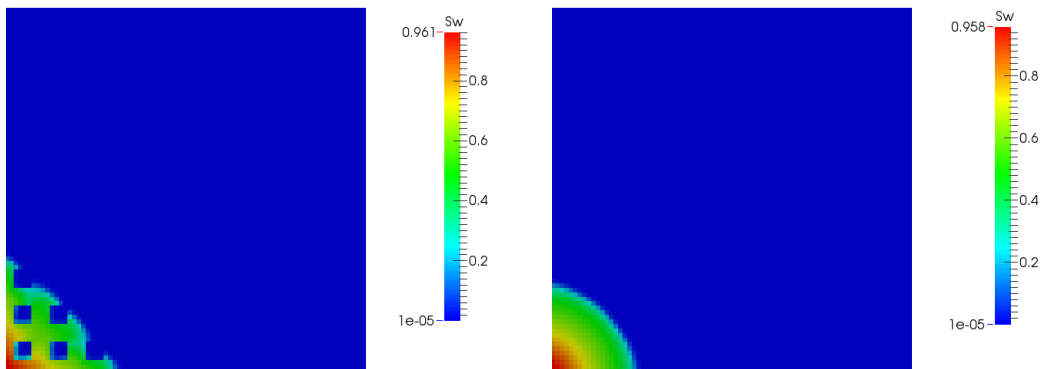
Conclusion. Après avoir effectué différents tests sur différents maillages de plus en plus raffinés, on remarque une convergence numérique qui nous amène à conclure que la résolution numérique avec le maillage 80×80 est satisfaisante, et c'est donc avec ce maillage que nous allons faire les tests qui vont suivre, que ce soit pour le problème hétérogène ou le problème homogénéisé qui lui est associé.

Comparaison entre simulation directe hétérogène et simulation à partir du modèle homogénéisé correspondant.

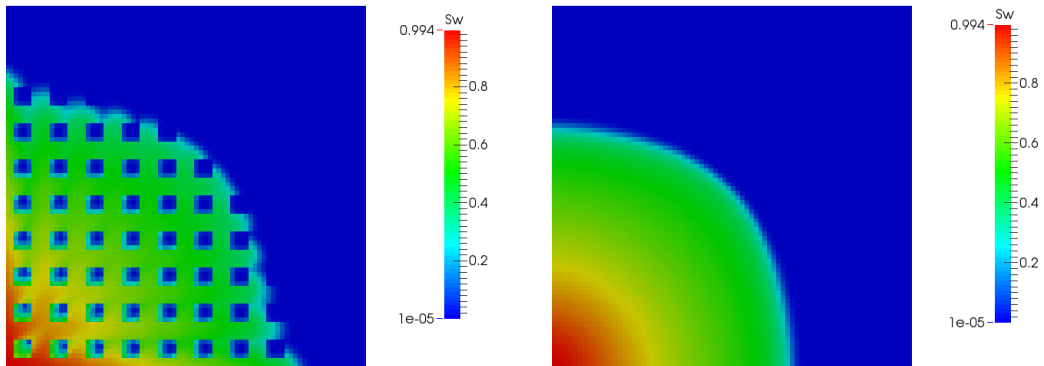
Nous considérons donc un maillage 80×80 pour le domaine présenté dans la figure Figure 4.16. Le temps final de simulation est de 22 ans, ce qui correspond à $T = 6.851 \cdot 10^8$ s.

On remarque que l'allure générale de la propagation du front de saturation en milieu homogénéisé est similaire à la propagation du front en milieu hétérogène (voir Figure 4.21-Figure 4.22), de manière générale, et on remarque aussi l'absence d'oscillations dans le cas homogénéisé, puisque la structure locale est négligée. Tandis que pour les fronts des pressions, il y a une très légère différence entre les pressions en milieu hétérogène et en milieu homogénéisé, et cela est dû à la nature elliptique de l'équation de la pression (voir Figure 4.23-Figure 4.24). Cela se confirme par la présentation des saturations et des pressions sur la diagonale qui est une direction caractéristique (voir Figure 4.25-Figure 4.26).

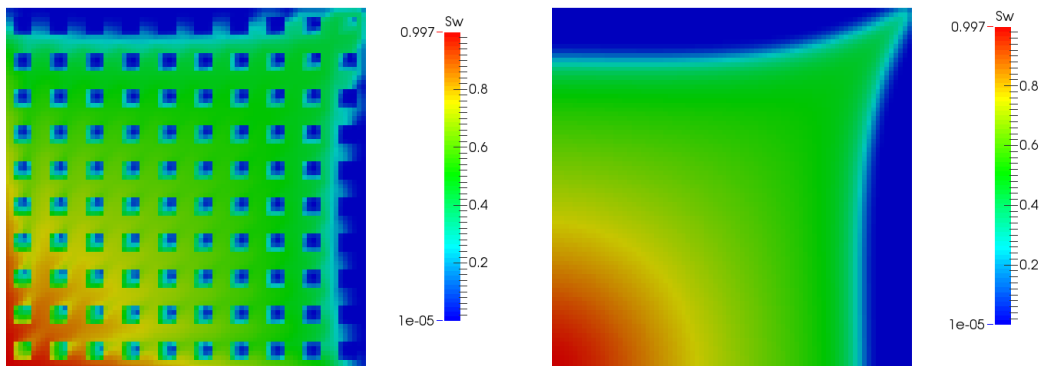
Profil des saturations de l'eau.



(a) $T=1$ an



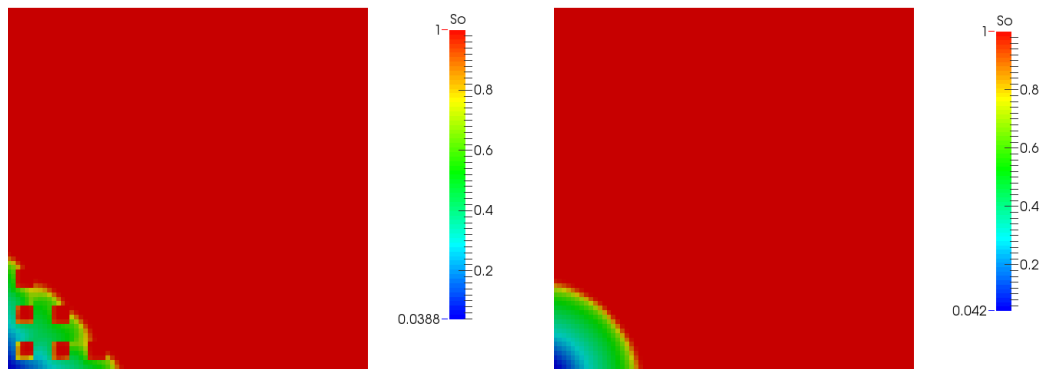
(b) $T=10$ ans



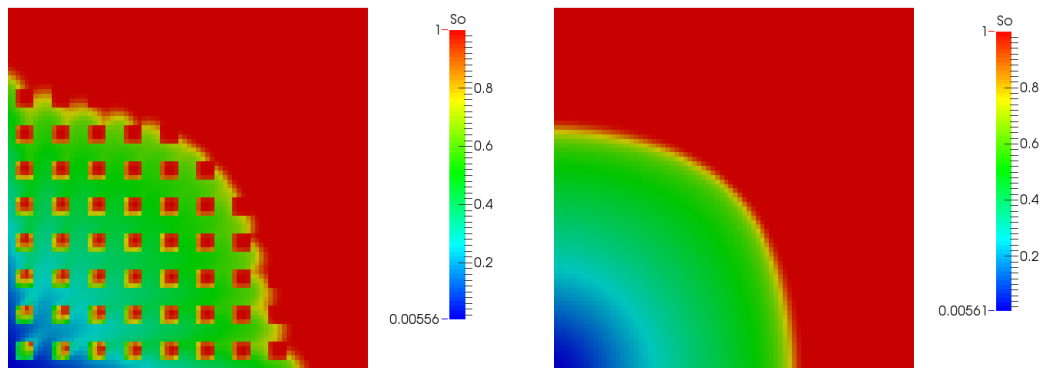
(c) $T=22$ ans

FIGURE 4.21 – Profil des saturations de l'eau en milieu hétérogène (à gauche) et en milieu homogénéisé (à droite).

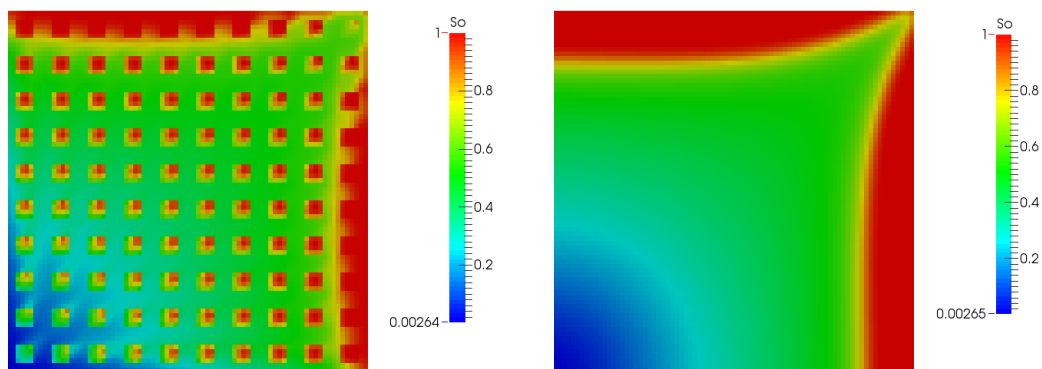
Profil des saturations de l'huile.



(a) $T=1$ an



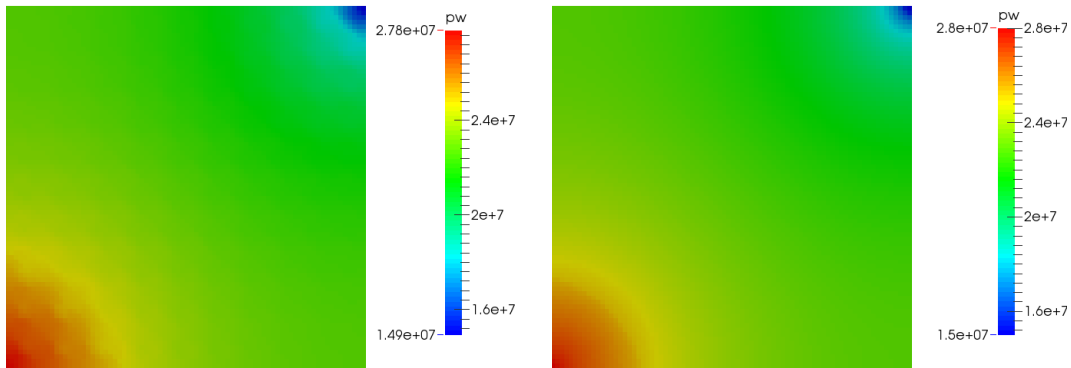
(b) $T=10$ ans



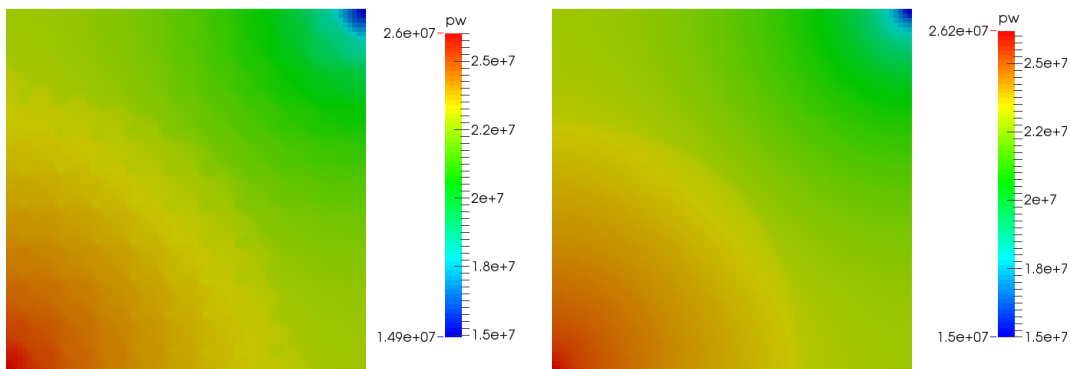
(c) $T=22$ ans

FIGURE 4.22 – Profil des saturations de l'huile en milieu hétérogène (à gauche) et en milieu homogénéisé (à droite).

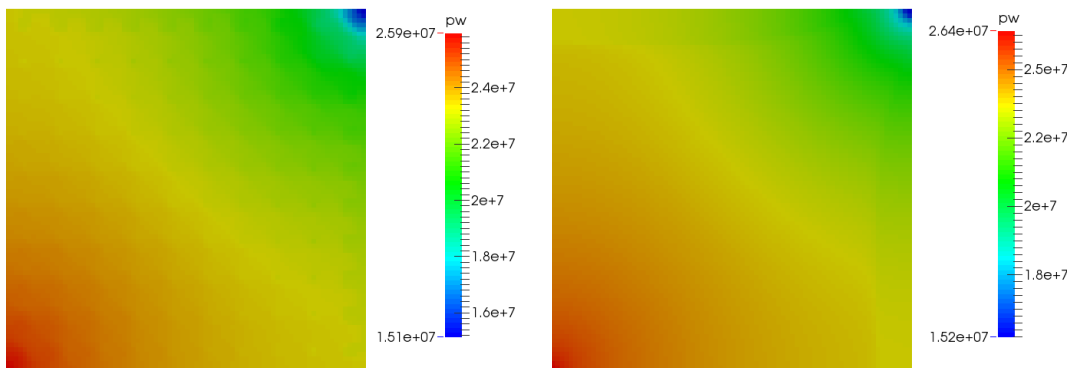
Profil des pressions de l'eau.



(a) T=1an



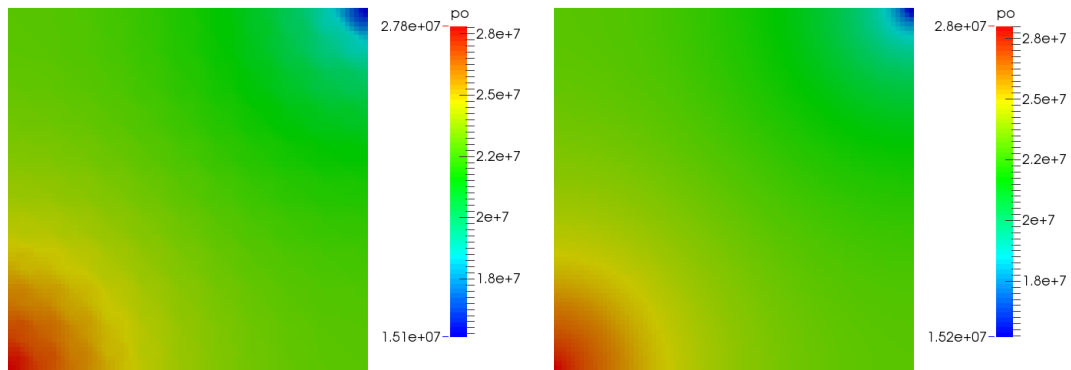
(b) T=10 ans



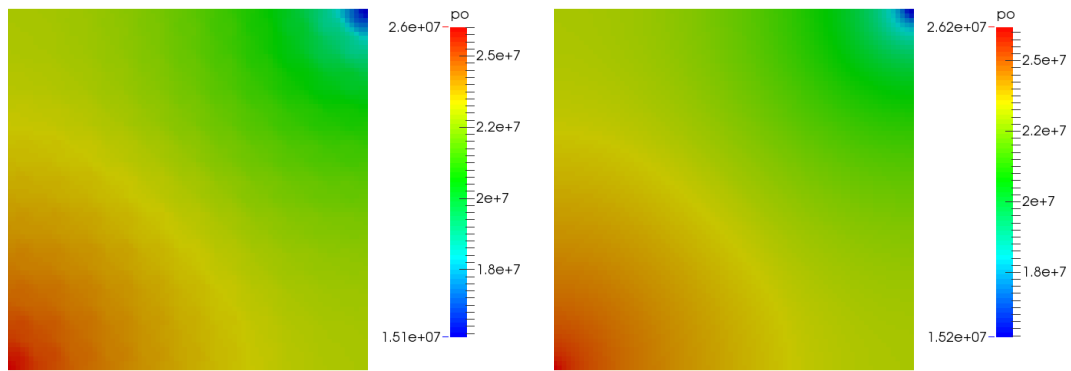
(c) T=22 ans

FIGURE 4.23 – Profil des pressions de l'eau en milieu hétérogène (à gauche) et en milieu homogénéisé (à droite).

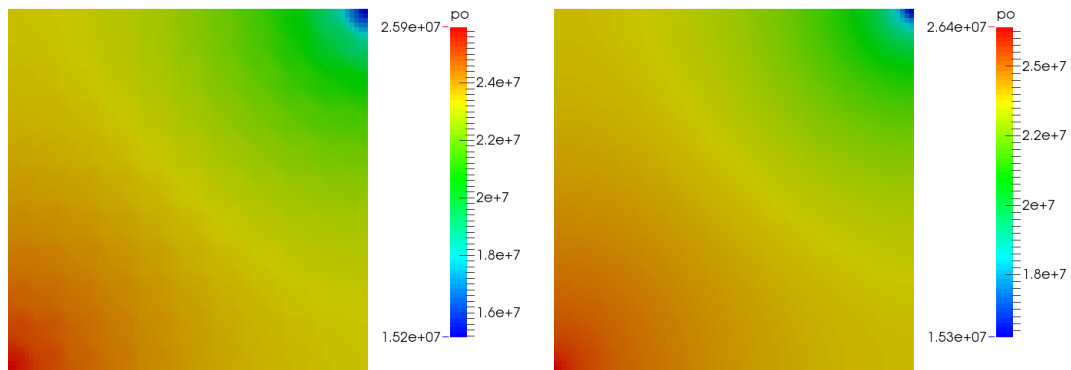
Profil des pressions de l'huile.



(a) T=1an



(b) T=10 ans



(c) T=22 ans

FIGURE 4.24 – Profil des pressions de l'huile en milieu hétérogène (à gauche) et en milieu homogénéisé (à droite).

Courbes des saturations de l'eau et de l'huile sur la diagonale du milieu homogénéisé et hétérogène.

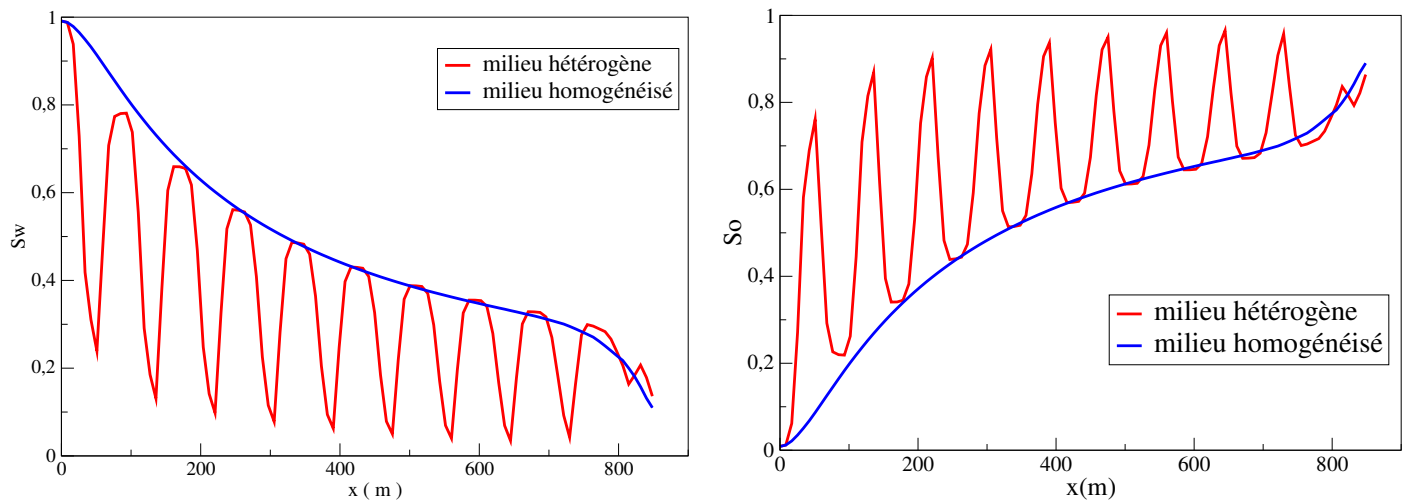


FIGURE 4.25 – Saturations de l'eau en diagonale (à gauche) et saturations de l'huile en diagonale (à droite) en milieu hétérogène et homogénéisé.

Courbes des pressions de l'eau et de l'huile sur la diagonale du milieu hétérogène et homogénéisé.

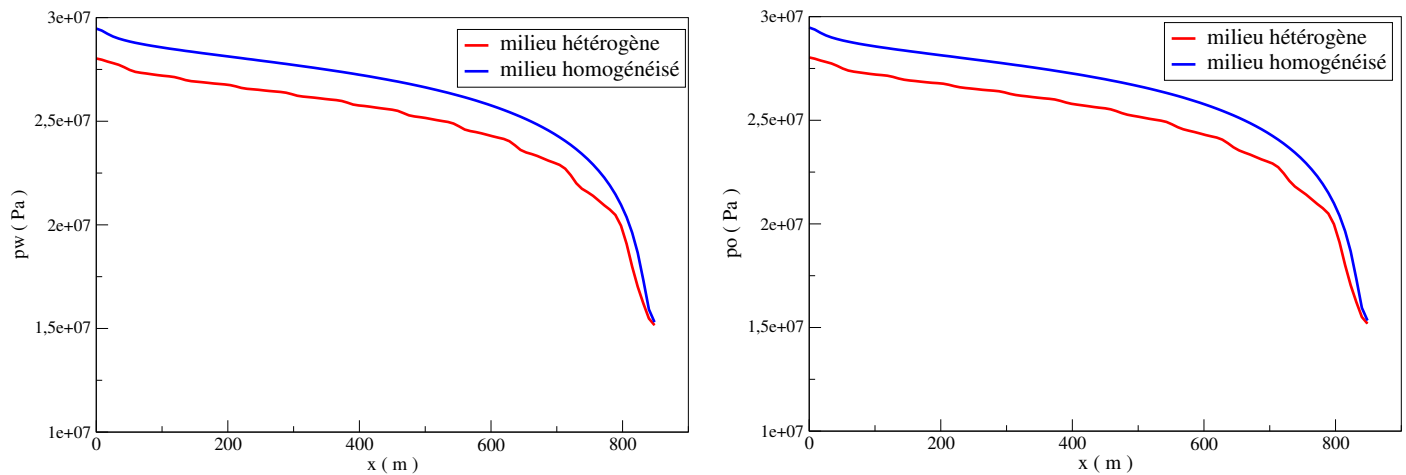


FIGURE 4.26 – Pressions de l'eau en diagonale (à gauche) et pressions de l'huile en diagonale (à droite) en milieu hétérogène et homogénéisé.

Débit total d'huile récupérée.

On calcule le débit total d'huile récupérée, en utilisant la formule suivante :

$$\text{Flux total [kg]} = \Delta t_1 \cdot Q(t_1) + \Delta t_2 \cdot Q(t_2) + \dots + \Delta t_n \cdot Q(t_n) \simeq \int_0^T Q(t) dt, \quad (4.16)$$

où T est le temps final de simulation, $t_i, i = 1, \dots, n$ représentent quelques temps de la simulation, et $Q(t)$ est le débit de l'huile à l'instant t donné par la formule

$$Q(t)[\text{kg} / \text{s}] = \int_{\Gamma_S} \rho_o \vec{q}_o(x, t) \cdot \vec{n} dS,$$

avec \vec{q}_o la vitesse de Darcy, et Γ_S la frontière de sortie.

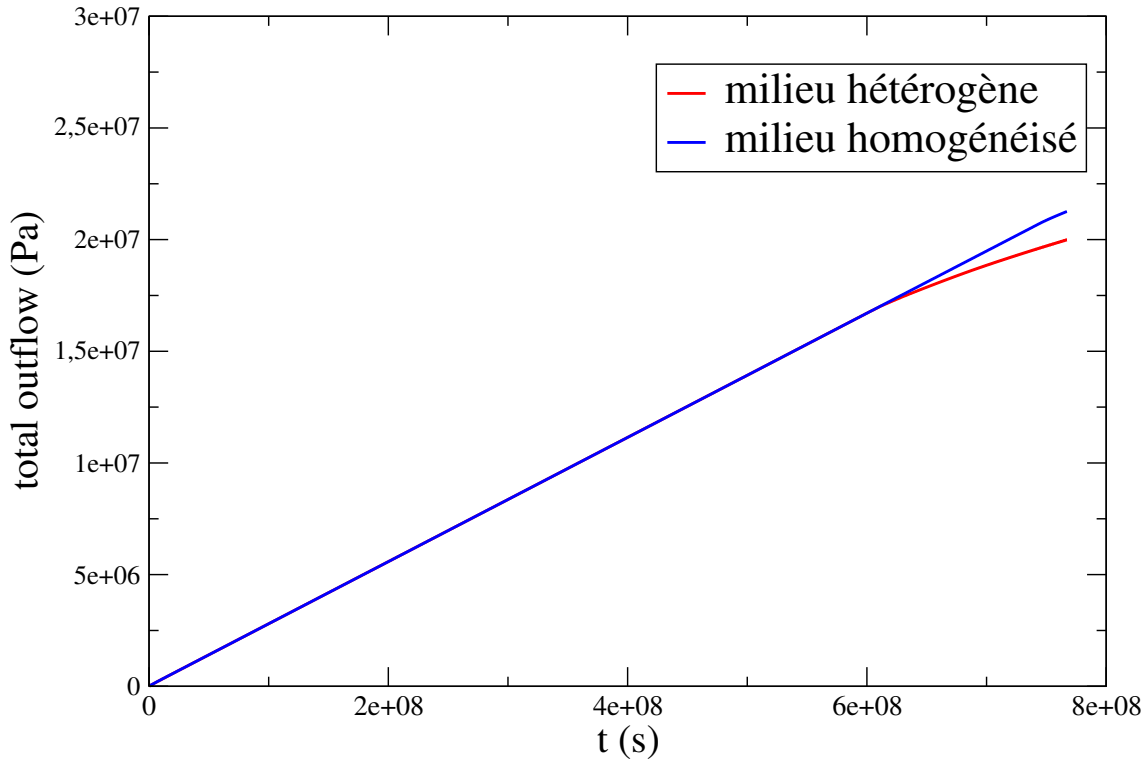


FIGURE 4.27 – Représentation du débit total d'huile récupérée.

Il faut noter que le temps de percée a été évalué selon la progression du front dans le milieu homogénéisé, ainsi, on voit que l'homogénéisation donne une estimation plus optimiste sur le temps de percée par rapport au cas hétérogène. On remarque aussi que les débits de production sont linéaires, ce qui es dû à l'incompressibilité des phases, et au fait que le flux imposé à l'entrée reste constant tout au long de la simulation.

Au vu de ces résultats, on constate que les résultats numériques obtenus par l'homogénéisation décrivent correctement l'allure générale de la solution du problème.

4.3.4 Test 4 : Milieu hétérogène.

Dans cette partie, nous allons comparer des simulations directes d'écoulements diphasiques immiscibles : eau-huile, modélisés par le problème décrit au Chapitre 2 de ce travail, dans un milieu poreux hétérogène, avec des simulations faites à partir du modèle homogénéisé correspondant, en utilisant le code DuMu^x.

4.3.4.1 Données physiques du problème.

On considère un quart de five-spot, carré, dont la longueur de chaque côté est $L = 600$ m, périodique, constitué de trois milieux M_1, M_2 et M_3 . Les perméabilités intrinsèques du milieu sont données par :

$$K_1 = 10^{-12} \text{ m}^2, K_2 = 10^{-13} \text{ m}^2, \text{ et } K_3 = 10^{-14} \text{ m}^2$$

où K_1 , K_2 , et K_3 notent respectivement, la perméabilité du milieu M_1 , la perméabilité du milieu M_2 , et la perméabilité du milieu M_3 . La porosité est constante $\Phi = 0.2$.

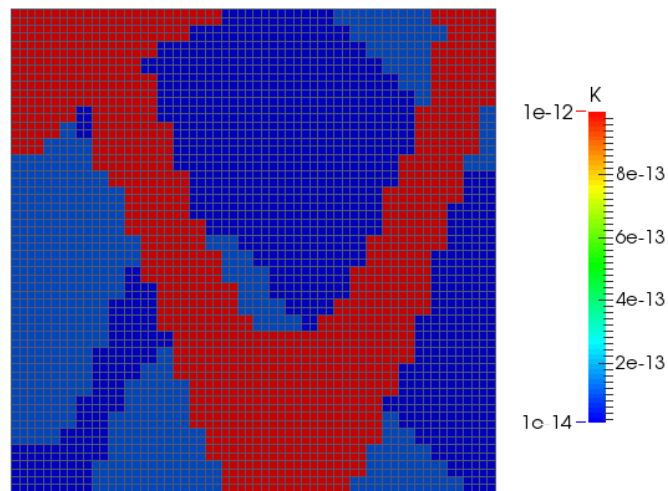


FIGURE 4.28 – Représentation des perméabilités du milieu hétérogène.

La pression capillaire, les perméabilités relatives, ainsi que les caractéristiques des deux fluides, sont les mêmes que celles utilisées dans le Test 3.

Initialement, le milieu est saturé en huile. Sur la frontière $20\text{ m} \times 20\text{ m}$ au coin en bas à gauche du domaine, on injecte le débit d'eau $\rho_w \vec{q}_w \cdot \vec{n} = -60.0\text{ kg/jour/m}^2$, et sur la frontière $20\text{ m} \times 20\text{ m}$ au coin en haut à droite du domaine, on impose la pression de l'huile $p_o = 150\text{ bar}$.

Enfin, pour le problème homogénéisé associé, les perméabilités intrinsèque du domaine sont obtenues en regroupant les mailles du milieu hétérogène 6 par 6, puis on les calcule en utilisant la méthode de l'homogénéisation périodique. Nous les présentons dans le tableau 4.1 (voir [84]).

La figure suivante est une représentation des perméabilités du milieu homogénéisé.

| | | | | | |
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 10.0000 | 6.1073 | 0.1753 | 0.1000 | 0.4497 | 3.4402 |
| 0.0000 | -0.0001 | 0.0110 | 0.0000 | -0.0416 | 0.0000 |
| 10.0000 | 7.2762 | 0.1391 | 0.1000 | 0.4496 | 7.4172 |
| 3.8292 | 5.8735 | 0.1000 | 0.1000 | 0.1092 | 4.7480 |
| 0.1912 | 0.3386 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.1795 |
| 2.7202 | 7.8420 | 0.1000 | 0.1000 | 0.1092 | 6.9637 |
| 1.0000 | 2.5889 | 0.2432 | 0.1000 | 0.2015 | 0.2179 |
| 0.0000 | -0.0787 | -0.0101 | 0.0000 | 0.0120 | 0.0001 |
| 1.0000 | 5.7037 | 2.3542 | 0.1000 | 3.0033 | 4.3325 |
| 1.0000 | 0.6353 | 5.2078 | 0.2080 | 5.8155 | 0.1230 |
| 0.0000 | 0.0064 | -0.2286 | -0.0032 | 0.4584 | 0.0000 |
| 1.0000 | 2.5881 | 7.1734 | 0.2126 | 7.2970 | 0.2463 |
| 0.9347 | 0.2081 | 8.3336 | 10.0000 | 5.8156 | 0.1000 |
| 0.0000 | 0.0140 | 0.0000 | 0.0000 | 0.4585 | 0.0000 |
| 0.9346 | 0.2735 | 8.9698 | 10.0000 | 7.2969 | 0.1000 |
| 0.2060 | 0.7137 | 2.5058 | 10.0000 | 1.6822 | 0.1597 |
| 0.0047 | 0.0000 | -0.0754 | 0.0000 | 0.0479 | -0.0101 |
| 0.1466 | 0.8640 | 5.3132 | 10.0000 | 3.9697 | 0.1597 |

TABLE 4.1 – Valeurs des perméabilités calculées par la méthode d’homogénéisation périodiques. Les valeurs du tenseur sont K_{xx} , $K_{xy} = K_{yx}$, et K_{yy} , du haut au bas du tableau, respectivement pour chaque cellule.

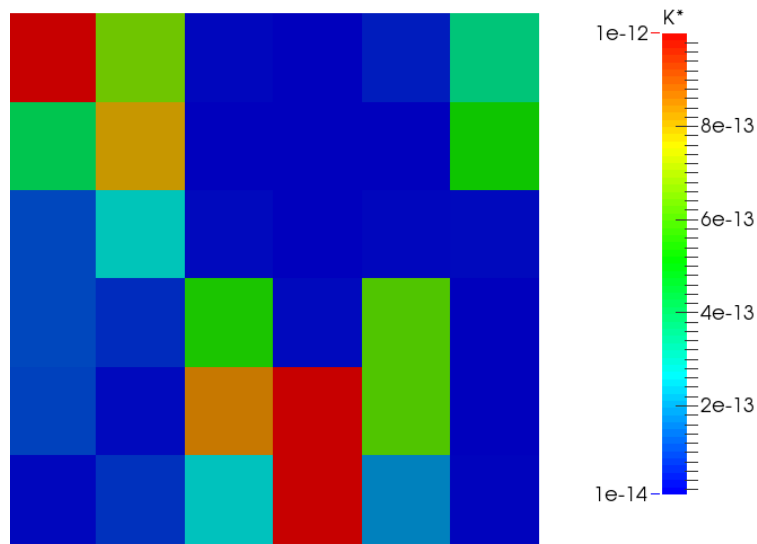


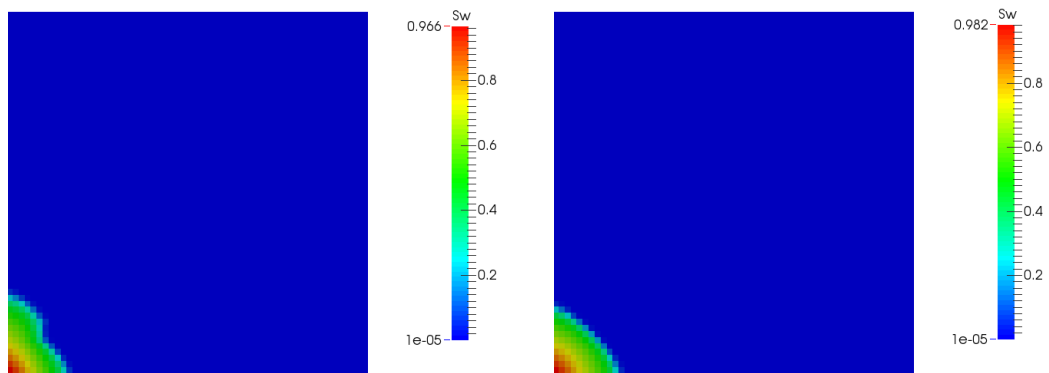
FIGURE 4.29 – Représentation des perméabilités du milieu homogénéisé.

4.3.4.2 Résultats numériques.

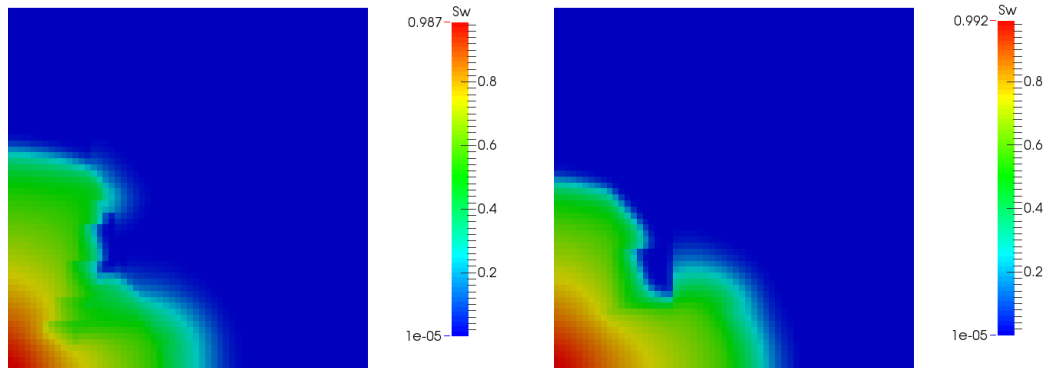
Nous considérons donc un maillage 60×60 pour le domaine présenté dans la figure Figure 4.28. Le temps final de simulation est de 29 ans, ce qui correspond à $T = 9.13277 \cdot 10^8$ s.

On remarque que le front de saturation en milieu homogénéisé n'a pas tout à fait la même allure que dans le milieu hétérogène (voir Figure 4.30–Figure4.31), et cela se confirme par les courbes des saturations de l'eau et de l'huile sur la diagonale (voir Figure 4.34). Cela est dû à la nature des hétérogénéités du milieu poreux, car celles ci forment un chenal de taille considérable, et dans ce cas, les techniques d'homogénéisation ne donnent pas toujours un résultat très proche de la réalité. Néanmoins, ici, les résultats sont assez satisfaisants puisque d'une manière générale, les principales caractéristiques sont bien conservées dans le milieu homogénéisé. Pour les fronts des pressions, il y a une très légère différence entre les pressions en milieu hétérogène et en milieu homogénéisé (voir Figure 4.32–Figure4.33), et cela est dû à la nature elliptique de l'équation de la pression (voir Figure 4.35).

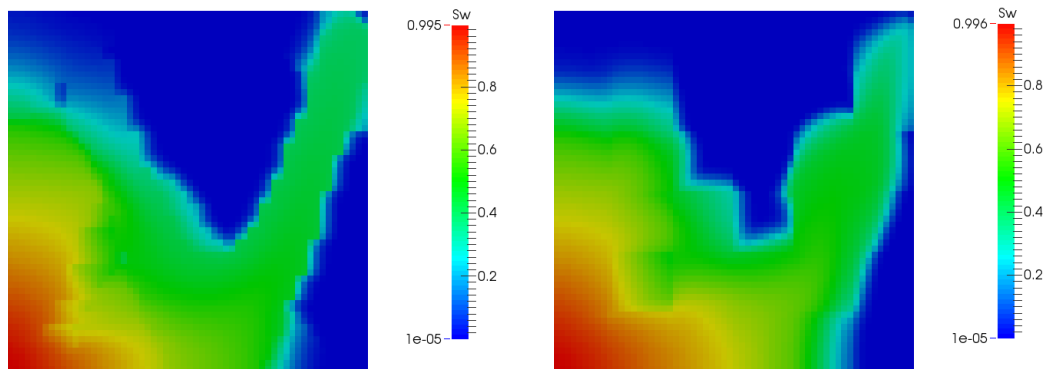
Profil des saturations de l'eau.



(a) T=1an



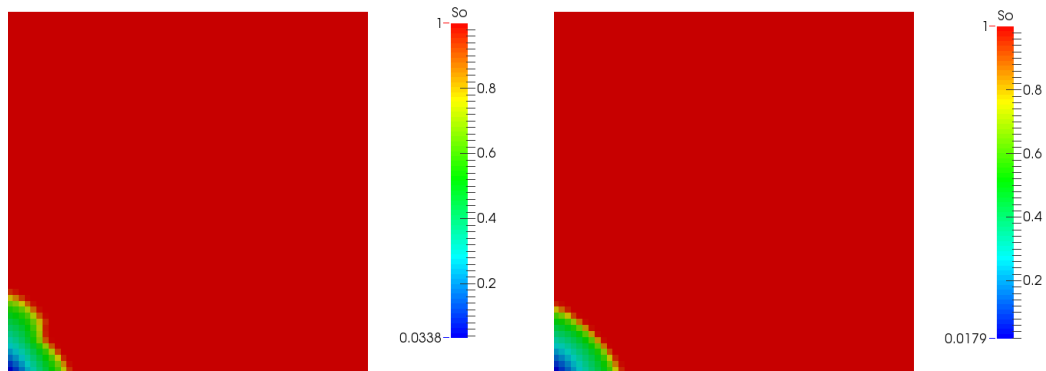
(b) T=10 ans



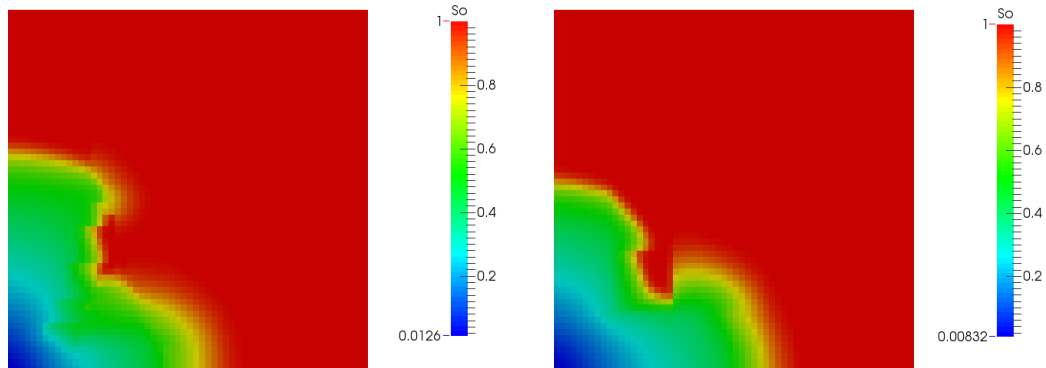
(c) T=29 ans

FIGURE 4.30 – Profil des saturations de l'eau en milieu hétérogène (à gauche) et en milieu homogénéisé (à droite).

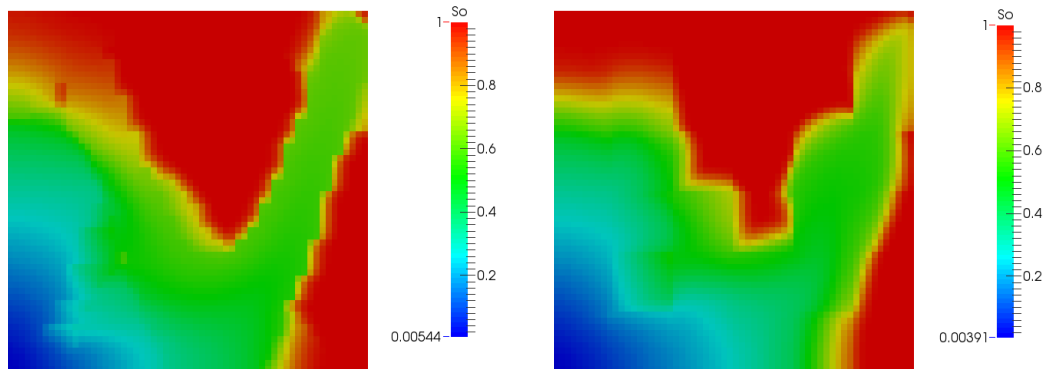
Profil des saturations de l'huile.



(a) T=1 an



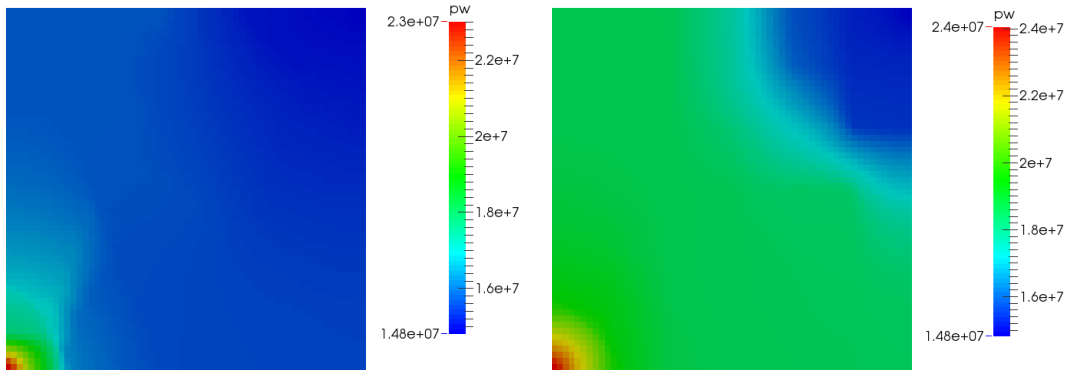
(b) T=10 ans



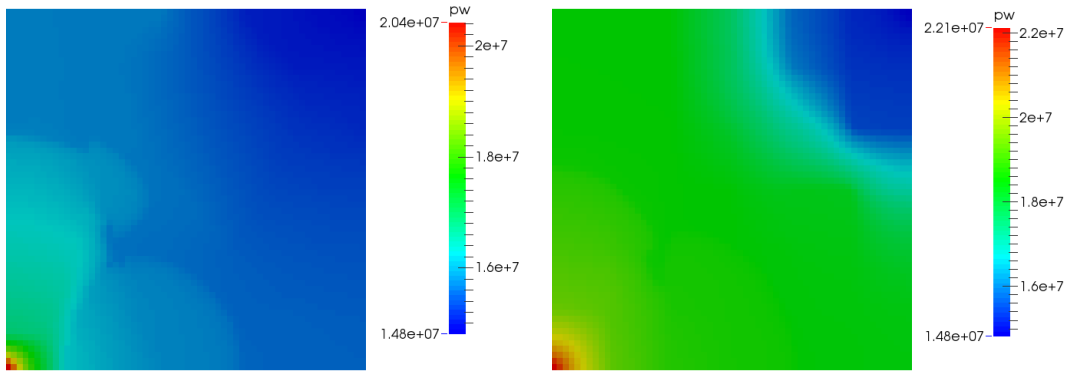
(c) T=29 ans

FIGURE 4.31 – Profil des saturations de l'huile en milieu hétérogène (à gauche) et en milieu homogénéisé (à droite).

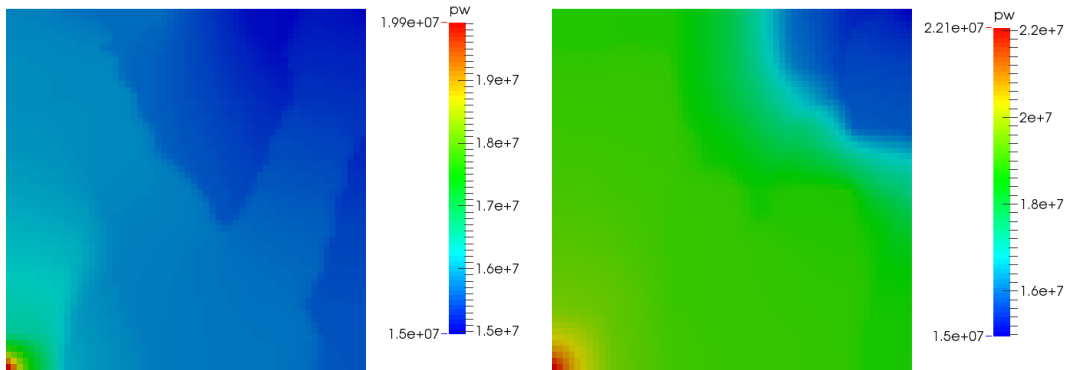
Profil des pressions de l'eau.



(a) T=1an



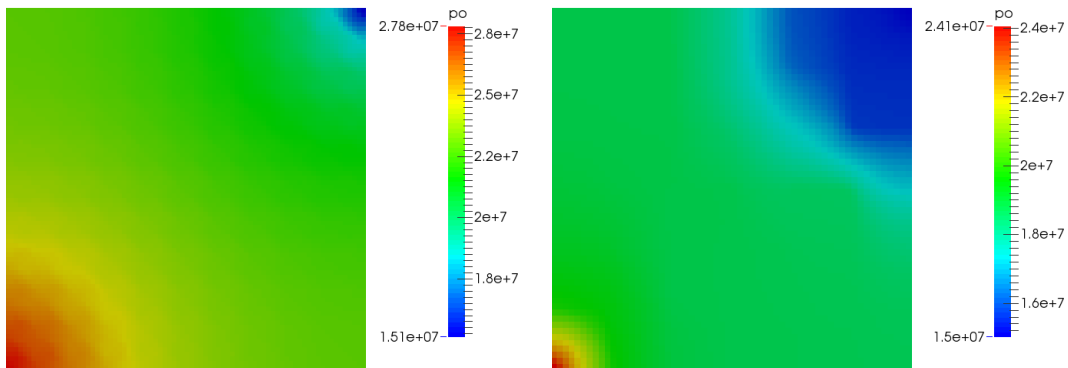
(b) T=10 ans



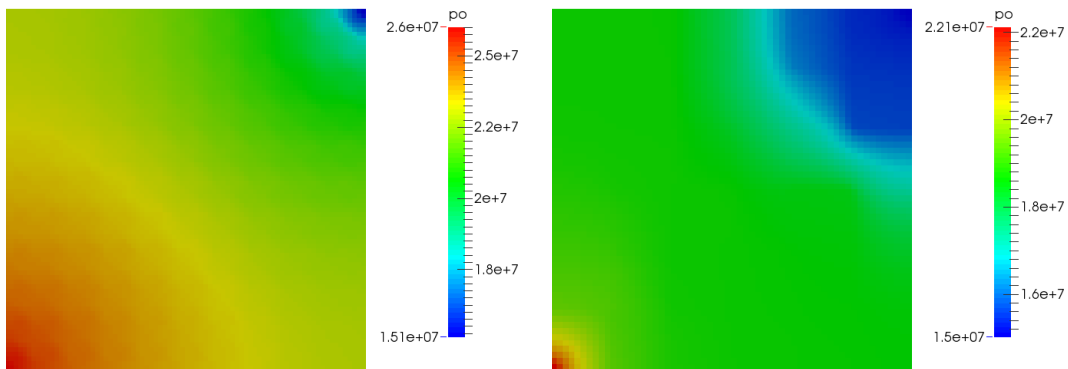
(c) T=29 ans

FIGURE 4.32 – Profil des pressions de l'eau en milieu hétérogène (à gauche) et en milieu homogénéisé (à droite).

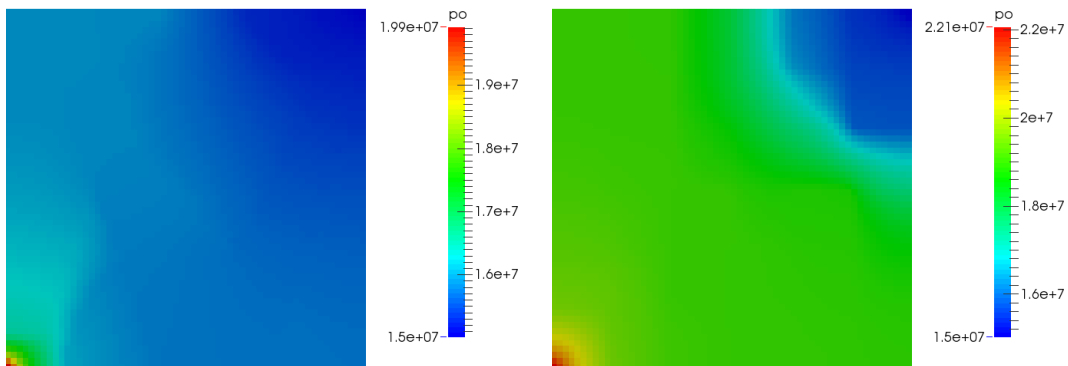
Profil des pressions de l'huile.



(a) $T=1$ an



(b) $T=10$ ans



(c) $T=29$ ans

FIGURE 4.33 – Profil des pressions de l'huile en milieu hétérogène (à gauche) et en milieu homogénéisé (à droite).

Courbes des saturations de l'eau et de l'huile sur la diagonale du milieu homogénéisé et hétérogène.

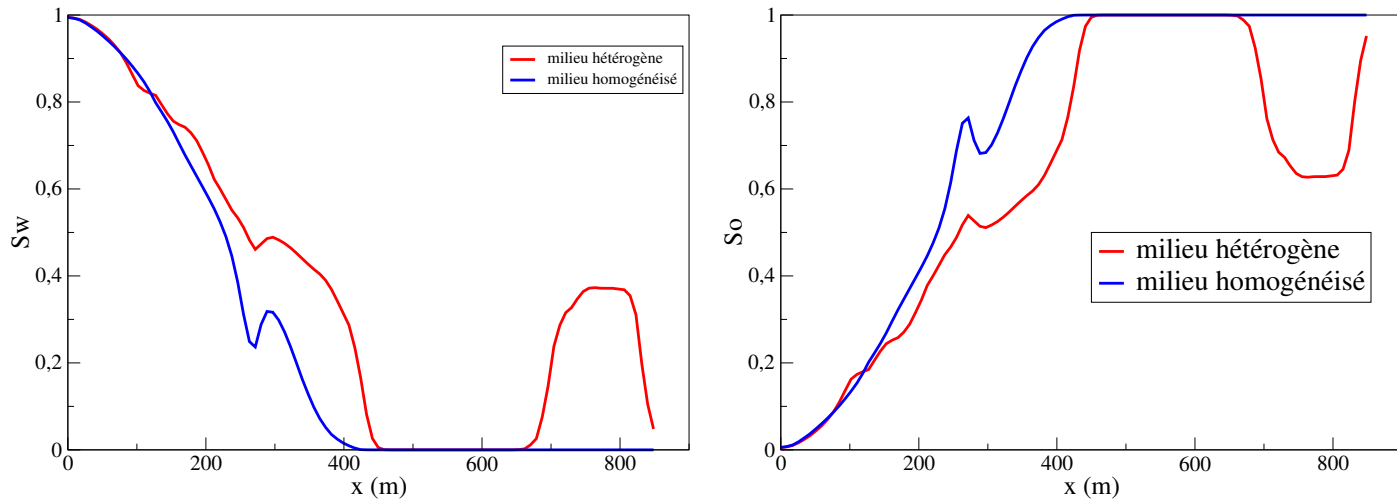


FIGURE 4.34 – Saturations de l'eau en diagonale (à gauche) et saturations de l'huile en diagonale (à droite) en milieu hétérogène et homogénéisé.

Courbes des pressions de l'eau et de l'huile sur la diagonale du milieu hétérogène et homogénéisé.

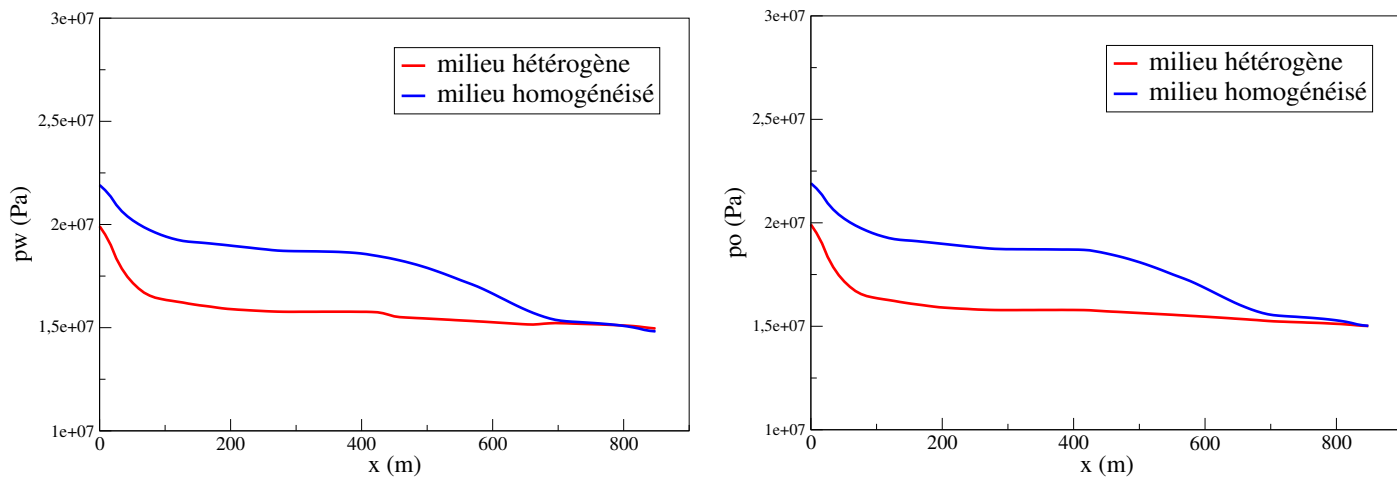


FIGURE 4.35 – Pressions de l'eau en diagonale (à gauche) et pressions de l'huile en diagonale (à droite) en milieu hétérogène et homogénéisé.

Débit total d'huile récupérée.

Le débit total d'huile récupérée est présentée par le graphe suivant :

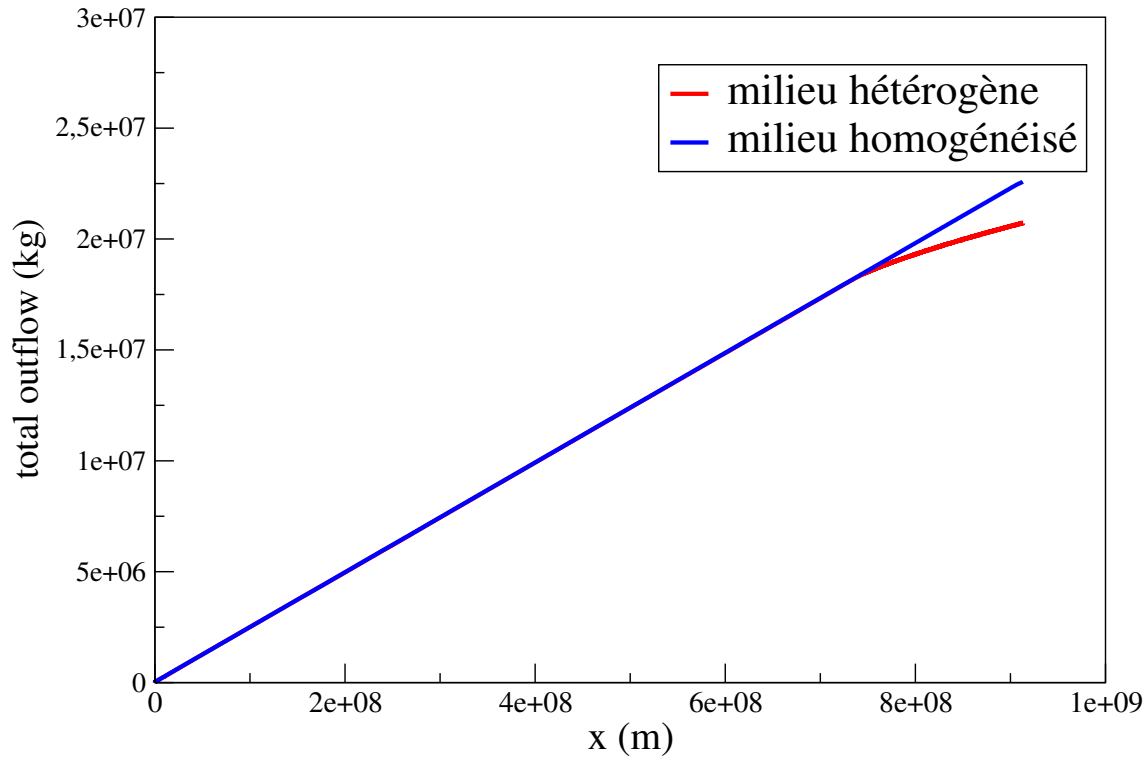


FIGURE 4.36 – Représentation du débit total d'huile récupérée.

Il faut noter que le temps de percé a été évalué selon la progression du front en milieu homogénéisé. On remarque que l'homogénéisation donne une estimation plus optimiste sur le temps de percé, par rapport au cas hétérogène. On remarque aussi que les débits de production sont linéaires, ce qui est dû à l'incompressibilité des phases, et au fait que le flux imposé à l'entrée reste constant tout au long de la simulation.

Au vu de ces résultats, on constate que les résultats numériques obtenus par l'homogénéisation décrivent correctement l'allure générale de la solution du problème.

Bibliographie

- [1] L. Ait Mahiout, B. Amaziane, A. Mokrane, L. Pankratov, Homogenization of immiscible compressible two-phase flow in double porosity media, *Electronic Journal Of Differential Equations*, No. 52, pp. 1-28, 2016. URL : <http://ejde.math.txstate.edu>.
- [2] E. Acerbi, V. Chiadò Piat, G. Dal Maso and D. Percival, An extension theorem from connected sets, and homogenization in general periodic domains, *J. Nonlinear Analysis*, 18, 481–496, 1992.
- [3] G. Allaire, Homogenization and two-scale convergence, *SIAM J. Math. Anal.*, 23, 1482-1518, 1992.
- [4] H. W. Alt and E. Di Benedetto, Nonsteady flow of water and oil through inhomogeneous porous media, *Ann. Scu. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.*, 12(4) :335–392, 1985.
- [5] B. Amaziane, M. Jurack, and A. Zgaljic Keko, An existence result for a coupled system modeling a fully equivalent global pressure formulation for immiscible compressible two-phase flow in porous media, *J. Differential Equations*, 250(3) :1685–1718, 2011.
- [6] B. Amaziane, S. Antontsev, L. Pankratov, and A. Piatinski, Homogenization of immiscible compressible two-phase flow in porous media : application to gas migration in a nuclear repository, *SIAM MMS*, 8, 2023-2047, 2010.
- [7] B. Amaziane, A. Bourgeat, and M. Jurak, Effective macrodiffusion in solute transport through heterogeneous porous media, *Multiscale Model. Simul.*, 5(1) :184–2014, 2006.
- [8] B. Amaziane, M. Jurak, A. Vrbaski, Homogenization results for a coupled system modelling immiscible compressible two-phase flow in porous media by concept of global pressure, *Applicable Analysis, Taylor & Francis*, 2013, 92 (7), pp.1417-1433
- [9] B. Amaziane, M. Jurak, and A. Vrbaski, Existence for global pressure formulation of water-gaz flow in porous media. *Electron. J. Diff. Equ.*, 2012(102) :1–22, 2012.
- [10] B. Amaziane, M. Jurak, and A. Zgaljic Keko, Modeling and numerical simulations of immiscible compressible two-phase flow in porous media by the concept of global pressure, *Transp. Porous Media*, 84, 133-152, 2012.
- [11] B. Amaziane, L. Pankratov, Homogenization of a model for water-gas flow through double-porosity media, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 39, 425-451, 2016
- [12] B. Amaziane, L. Pankratov, and A. Piatinski, The existence of weak solutions to immiscible compressible two-phase flow in porous media : the case of fields with different rock-types, *Discrete Continuous and Dynamical Systems.Ser., B*, 15, 1217–1251, 2013.
- [13] Y. Amirat, K. Hamdache, and A. Ziani, Homogenization of a model of compressible miscible flow in porous media, *Bolletino dell'Unione Matematica Italiana*, 7, 5–B(2) :463–487, 1991.
- [14] Y. Amirat and V. Shelukhin, Global weak solutions to equations of compressible miscible flows in porous media, *SIAM J; Math. Anal.*, 38(6) :1825–1846, 2007.
- [15] O. Angelini, Étude de schémas numériques pour les écoulements diphasiques en milieu poreux déformables pour des maillages quelconques : application au stockage de déchets radioactifs, Thèse de Doctorat de l'université Paris Est, 2010.

- [16] O. Angelini, C. Chavant, E. Chénier, R. Eymard, S. Granet, Finite volume approximation of a diffusion–dissolution model and application to nuclear waste storage, *Mathematics and Computers in Simulation, Elsevier*, 81(10), pp.2001–2017, 2011.
- [17] S. N. Antontsev, A. V. Kazhikhov, and V. N. Monakhov, Boundary value problems in mechanics of non-homogeneous fluids, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1990.
- [18] T. Arbogast, Analysis of the simulation of single phase flow through a naturally fractured reservoir, *SIAM J. Numer. Anal.*, 26(1) :12–29, 1989.
- [19] T. Arbogast, The existence of weak solutions to single–porosity and simple dual porosity of two–phase incompressible flow, *Nonlinear Analysis : Theory, Methods and Applications*, 19(11) :10009–1031, 1992.
- [20] T. Arbogast and Z. Chen, Homogenization of compositional flow in fractured porous media, *CRPC-TR93345*, 1993.
- [21] T. Arbogast, J. Douglas, and U. Hornung, Derivation of the double porosity model of single phase flow via homogenization theory, *SIAM J. Appl. Math. Anal.*, 21, 823–836, 1990.
- [22] G. I. Barenblatt, I.P. Zheltov, and I.N. Kochina, Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks, *Prikl. Math. Mekh.*, 24(5) :852–864, 1960.
- [23] P. Bastian. Numerical computation of multiphase flows in porous media. Habilitationsschrift, 1999.
- [24] J. Bear and Y. Bachmat, Introduction to modeling of transport phenomena in porous media, Kluwer Academic Publishers, London, 1991.
- [25] J. Bear, C. F. Tsang, G. de Marsily, *Flow and contaminant transport in fractured rock*, Academic Press Inc, London, 1993.
- [26] A. Beliaev, Homogenization of two phase flows in porous media with hysteresis in the capillary relation, *Euro. J. of Applied Mathematics*, 14 :61–84, 2003.
- [27] A. Bourgeat and A. Hidani, A result of existence for a model of two–phase flow in a porous medium made of different rock types, *Appl. Anal.*, 56(3–4) :381–399, 1995.
- [28] A. Bourgeat and A. Hidani, Effective model of two–phase flow in a porous medium made of different rock types, *Appl. Anal.*, 58(1-2) :1–29, 1995.
- [29] A. Bourgeat, S. M. Kozlov, and A. Mikelic, Effective equations of two–phase flow in random media, *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 3(3) :385–406, 1995.
- [30] A. Bourgeat, S. Luckhaus, and A. Mikelic, Convergence of the homogenization process for a double–porosity model of immiscible two-phase flow, *SIAM J. Appl. Math. Anal.*, 27, 1520–1543, 1996.
- [31] A. Bourgeat and A. Mikelic, Homogenization of the two–phase immiscible flow in one dimensional porous medium, *Asymptotic Anal.*, 9 :359–380, 1994.
- [32] A. Bourgeat and M. Panfilov, Effective two–phase flow through highly heterogeneous porous media : Capillary nonequilibrium effects, *Computational Geosciences*, 2 :191–215, 1998.
- [33] H. Brezis, Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Masson, Paris, 1983.
- [34] S. Brull, Two compressible immiscible fluids in porous media : the case where the porosity depends on the pressure, *Adv. Differential Equations*, 13(7–8) :781–800, 2008.
- [35] F. Caro, B. Saad, and M. Saad, Two–component two–compressible flow in a porous medium, *Acta Appl. Math.*, 117(1) :15–46, 2012.
- [36] G. Chavent and J. Jaffré, Mathematical Models and Finite Elements for Reservoir Simulation, North-Holland, Amsterdam, 1986.
- [37] Z. Chen, Degenerate two–phase incompressible flow I : Existence, uniqueness and regularity of a weak solution, *Journal of Differential Equations*, 171(2) :203–232, 2001.

- [38] Z. Chen, Homogenization and simulation for compositional flow in naturally fractured reservoirs, *J. Math. Anal. Appl.*, 326(1) :12–32, 2007.
- [39] Z. Chen and R.E. Ewing, Comparison of various formulations of three–phase flow in porous media, *Journal of Computational Physics*, 132(2) :362–373, 1997.
- [40] Z. Chen, G. Huan, and Y. Ma, Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media, *SIAM*, Philadelphia, 2006.
- [41] C. Choquet, Derivation of the double porosity model of a compressible miscible displacement in naturally fractured reservoirs, *Appl. Anal.*, 83, 477–500, 2004.
- [42] C. Choquet, On a fully coupled nonlinear parabolic problem modelling miscible compressible displacement in porous media, *J. Math. Anal. Appl.*, 339, 1112–1133, 2008.
- [43] C. Choquet, Homogenized model for flow in partially fractured media , *Electronic J. Diff. Equations*, 1, 1–27, 2008.
- [44] D. Cioranescu and P. Donato. An Introduction to Homogenization, Oxford University Press, Oxford, 1999.
- [45] D. Cioranescu, A. Damlamian and, G. Griso, Periodic unfolding and homogenization, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, 335, 99–104, 2002.
- [46] F. Z. Daïm, R. Eymard, and D. Hilhorst, Existence of a solution for two–phase flow in porous media : The case that the porosity depends on the pressure, *J. Math. Anal. Appl.*, 326(1) :332–351, 2017.
- [47] C. J. van Duijn, A. Mikelic, and I. S. Pop, Effective equations for two–phase flow with trapping on the micro scale, *SIAM J. Appl. Math.*, 62(5) :1531–1568, 2002.
- [48] L. J. Durlofsky, Upscaling of geocellular models for reservoir flow simulation : A review of recent progress, *In 7 th International Forum on Reservoir Simulation*, pages 23–27, Bühl/Baden–Baden, 2003.
- [49] R. Eymard, T. Gallouet, and R. Herbin, Finite Volume Methods, *Handbook of Numerical Analysis, P.G. Ciarlet, J.L. Lions eds.*, 7, 713–1020, 2000.
- [50] P. Fabrie, P. Le Thiez, and P. Tardy, On a system of nonlinear elliptic and degenerate parabolic equations describing compositional water–oil flows in porous media, *Nonlinear Analysis : Theory, Methods and Applications*, 28(9) :1565–1600, 1997.
- [51] K. B. Fadimba, On existence and uniqueness for a coupled system modeling immiscible flow through a porous medium, *J. Math. Anal. Appl.*, 328(2) :1034–1056, 2007.
- [52] C. L. Farmer, Upscaling : a review, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 40 :63–78, 2002.
- [53] X. Feng, Strong solutions to a nonlinear parabolic system modeling compressible miscible displacement in porous media, *Nonlinear Anal.*, 23(12) :1515–1531, 1994.
- [54] C. Galusinski and M. Saad, On a degenerate parabolic system for compressible, immiscible, two–phase flows in porous media, *Advances in Differential Equations*, 9(11–12) :1235–1278, 2004.
- [55] C. Galusinski and M. Saad, Two compressible immiscible fluids in porous media, *J. Differential Equations*, 244(7) :1741–1783, 2008.
- [56] C. Galusinski and M. Saad, Weak solutions for immiscible compressible multifluid flows in porous media, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I*, 347, 249–254, 2009.
- [57] T. D. Van Golf-Racht, *Fundamentals of fractured reservoir engineering*, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, 1982.
- [58] R. Helmig, Multiphase Flow and Transport Processes in the Subsurface, Springer, Berlin, 1997.
- [59] T. Hontans, Homogénéisation numérique de paramètres pétrophysiques pour des maillages déstructurés en simulation de réservoir, Thèse de Doctorat de l’Université De Pau Et Des Pays De l’Adour, 2000.

- [60] U. Hornung, Homogenization and porous media, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [61] Z. Khalil and M. Saad, Solutions to a model for compressible immiscible two phase flow in porous media, *Electron. J. Differential Equations*, 2010, pp.1-33, 2010.
- [62] Z. Khalil, M. Saad, On a fully nonlinear degenerate parabolic system modelling immiscible gas–water displacement in porous media, *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 12, 1591–1615, 2011.
- [63] D. Kröner and S. Luckhaus, Flow of oil and water in a porous medium, *Journal of Differential Equations*, 55(2) :276–288, 1984.
- [64] M. Lenzinger and B. Schweizer, Two–phase flow equations with outflow boundary conditions in the hydrophobic–hydrophilic case, *Nonlinear Anal.*, 73(4) :840–853, 2010.
- [65] B. Li and W. Sun, Global existence of weak solution for nonisothermal multicomponent flow in porous textile media, *SIAM J. Math. Anal.*, 42(6) :3076–3102, 2010.
- [66] F. Mckee, Étude et mise à l'échelle des écoulements diphasiques en milieux poreux hétérogènes par une approche d'optimisation, Thèse de Doctorat de l'Université de Nantes, 2013.
- [67] A. Mikelic, On an averaged model for the two fluid immiscible flow with surface tension in a thin domain, *Computational Geosciences*, 7 :183–196, 2003.
- [68] A. Mikelic, An existence result for the equations describing a gasliquid two–phase flow, *C. R. Mecanique*, 337(4) :226-232, 2009.
- [69] G. P. Panasenko and G. Virnovsky, Homogenization of two–phase flow : high contrast of phase permeability, *C. R. Mecanique*, 331 :9–15, 2003.
- [70] M. Panfilov, Macroscale Models of Flow Through Highly Heterogeneous Porous Media, *Kluwer Academic Publishers*, Dordrecht, Boston, London, 2000.
- [71] B. Saad, Modélisation et simulation numérique d'écoulements multi–composants en milieu poreux, Thèse de Doctorat De l'École Centrale de Nantes, 2011.
- [72] H. Salimi and J. Bruining, Upscaling of fractured oil reservoirs using homogenization including non-equilibrium capillary pressure and relative permeability, *Computational Geoscience* **16** (2012), 367-389.
- [73] E. Sanchez–Palencia. Non homogeneous media and vibration theory. Springer–Verlag, Berlin, 1980.
- [74] B. Schweizer, Homogenization of degenerate two–phase flow with oil–trapping, *SIAM J. Math. Anal.*, 39(6) :1740–1763, 2008.
- [75] J. Simon, Compact Sets in the Space $L^p(0, T; B)$, *Anali di Matematica pura ed applicata (IV)*, CXLVI, 65–96, 1987.
- [76] F. Smaï, Apparition–disparition de phase dans un écoulement diphasique eau/hydrogène en milieu poreux : Injection de gaz dans un milieu saturé en eau pure, Tech. rep., Groupement MOMAS (2009). URL http://momas.univ-lyon1.fr/journee_MoMaS.html.
- [77] F. Smaï. A model of multiphase flow and transport in porous media applied to gas migration in underground nuclear waste repository. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 347(9–10) :527–532, 2009.
- [78] F. Smaï. Existence of solutions for a model of multiphase flow in porous media applied to gaz migration in underground nuclear waste repository. *Appl. Anal.*, 88 (10–11) :1609–1616, 2009.
- [79] A. Vrbaski, Homogenization and mathematical analysis of immiscible compressible two–phase flow in Heterogeneous porous media by the concept of the global pressure, Ph.D. thesis, Zagreb, 2012.
- [80] L. M. Yeh. On two–phase flow in fractured media. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 12(8) :1075–1107, 2002.
- [81] L. M. Yeh. Hölder continuity for two–phase flows in porous media. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 29(11) :1261–1289, 2006.

-
- [82] L. M. Yeh, Homogenization of two-phase flow in fractured media, *Math. Methods Appl. Sci.*, 16, 1627–1651, 2006.
- [83] http://www.gdrmommas.org/ex_qualifications.html .
- [84] http://www.math.usu.edu/koebbe/wwwHomog/results/test_problems/index.html.
- [85] <https://www.dune-project.org/index.html>
- [86] <http://www.dumux.org/documentation.php>.