

Analyse asymptotique pour la résolution numérique de problèmes avec micro-défauts

Grégory Vial

avec V. Bonnaillie-Noël, D. Brancherie, M. Dambrine, F. Hérau, D. Martin, S. Tordeux

Institut Camille Jordan, École Centrale de Lyon

Séminaire de Mathématiques et de leurs Applications

Pau, 31 mars 2016



Introduction

Représentation multi-échelle pour des petits défauts

► Trous dans un béton



Introduction

Représentation multi-échelle pour des petits défauts

- Trous dans un béton



- Problèmes modèles : élasticité linéaire en domaines perturbés

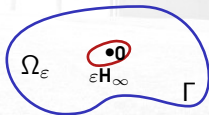
Introduction

Représentation multi-échelle pour des petits défauts

► Trous dans un béton



► Problèmes modèles : élasticité linéaire en domaines perturbés



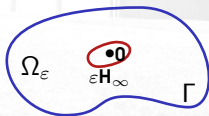
Introduction

Représentation multi-échelle pour des petits défauts

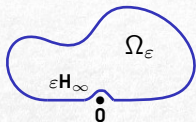
► Trous dans un béton



► Problèmes modèles : élasticité linéaire en domaines perturbés



ou



Introduction

Représentation multi-échelle pour des petits défauts

- ▶ Trous dans un béton



- ▶ Problèmes modèles : élasticité linéaire en domaines perturbés
- ▶ Difficultés d'approximation numérique

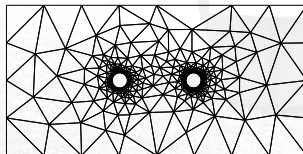
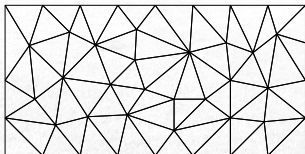
Introduction

Représentation multi-échelle pour des petits défauts

- ▶ Trous dans un béton



- ▶ Problèmes modèles : élasticité linéaire en domaines perturbés
- ▶ Difficultés d'approximation numérique



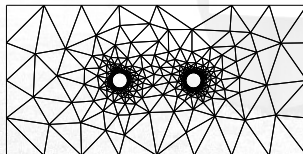
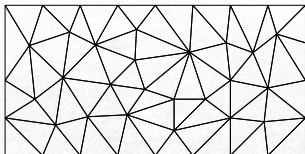
Introduction

Représentation multi-échelle pour des petits défauts

- ▶ Trous dans un béton



- ▶ Problèmes modèles : élasticité linéaire en domaines perturbés
- ▶ Difficultés d'approximation numérique

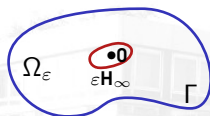


- ▶ Stratégie : représentation asymptotique en la taille des trous.

Introduction

Représentation multi-échelle pour des petits défauts

► Exemple de l'équation de Laplace

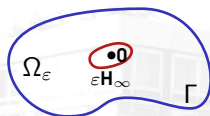


$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = f & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \partial_n u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \varepsilon \partial H_\infty. \end{cases}$$

Introduction

Représentation multi-échelle pour des petits défauts

► Exemple de l'équation de Laplace



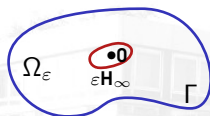
$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u_\varepsilon = f & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \partial_n u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \varepsilon \partial H_\infty. \end{array} \right.$$

► Terme limite : $u_\varepsilon \rightarrow u_0$ dans $H^1(\Omega_\varepsilon)$.

Introduction

Représentation multi-échelle pour des petits défauts

► Exemple de l'équation de Laplace



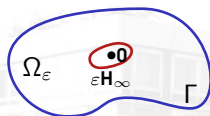
$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = f & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \partial_n u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \varepsilon \partial H_\infty. \end{cases}$$

- Terme limite : $u_\varepsilon \rightarrow u_0$ dans $H^1(\Omega_\varepsilon)$.
- Développement asymptotique ?

Introduction

Représentation multi-échelle pour des petits défauts

► Exemple de l'équation de Laplace



$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = f & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \partial_n u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \varepsilon \partial H_\infty. \end{cases}$$

► Terme limite : $u_\varepsilon \rightarrow u_0$ dans $H^1(\Omega_\varepsilon)$.

► Développement asymptotique ?

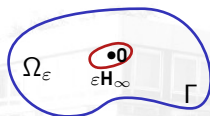
► $r_\varepsilon = u_\varepsilon - u_0$ satisfait

$$\begin{cases} -\Delta r_\varepsilon & = & 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ r_\varepsilon & = & 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \partial_n r_\varepsilon(\mathbf{x}) & = & -\partial_n u_0(\mathbf{x}) & \text{pour } \mathbf{x} \in \varepsilon \partial H_\infty. \end{cases}$$

Introduction

Représentation multi-échelle pour des petits défauts

► Exemple de l'équation de Laplace



$$\begin{cases} -\Delta u_\epsilon = f & \text{dans } \Omega_\epsilon, \\ u_\epsilon = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \partial_n u_\epsilon = 0 & \text{sur } \epsilon \partial H_\infty. \end{cases}$$

► Terme limite : $u_\epsilon \rightarrow u_0$ dans $H^1(\Omega_\epsilon)$.

► Développement asymptotique ?

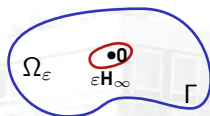
► $r_\epsilon = u_\epsilon - u_0$ satisfait

$$\begin{cases} -\Delta r_\epsilon & = & 0 & \text{dans } \Omega_\epsilon, \\ r_\epsilon & = & 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \partial_n r_\epsilon(\mathbf{x}) & = & -\nabla u_0(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} & \text{pour } \mathbf{x} \in \epsilon \partial H_\infty. \end{cases}$$

Introduction

Représentation multi-échelle pour des petits défauts

► Exemple de l'équation de Laplace



$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = f & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \partial_n u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \varepsilon \partial \mathbf{H}_\infty. \end{cases}$$

► Terme limite : $u_\varepsilon \rightarrow u_0$ dans $H^1(\Omega_\varepsilon)$.

► Développement asymptotique ?

► $r_\varepsilon = u_\varepsilon - u_0$ satisfait

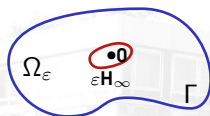
$$\begin{cases} -\Delta r_\varepsilon &= 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ r_\varepsilon &= 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \partial_n r_\varepsilon(\mathbf{x}) &= -\nabla u_0(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} & \text{pour } \mathbf{x} \in \varepsilon \partial \mathbf{H}_\infty. \end{cases}$$

► Changement de variable : $\mathbf{x} = \varepsilon \mathcal{X}$, et $\mathcal{R}_\varepsilon(\mathcal{X}) = r_\varepsilon(\mathbf{x})$.

Introduction

Représentation multi-échelle pour des petits défauts

► Exemple de l'équation de Laplace



$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = f & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \partial_n u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \varepsilon \partial H_\infty. \end{cases}$$

► Terme limite : $u_\varepsilon \rightarrow u_0$ dans $H^1(\Omega_\varepsilon)$.

► Développement asymptotique ?

► $r_\varepsilon = u_\varepsilon - u_0$ satisfait

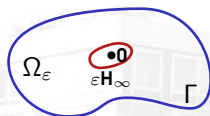
$$\begin{cases} -\Delta \mathcal{R}_\varepsilon &= 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon/\varepsilon, \\ r_\varepsilon &= 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \partial_n r_\varepsilon(\mathbf{x}) &= -\nabla u_0(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} & \text{pour } \mathbf{x} \in \varepsilon \partial H_\infty. \end{cases}$$

► Changement de variable : $\mathbf{x} = \varepsilon \mathcal{X}$, et $\mathcal{R}_\varepsilon(\mathcal{X}) = r_\varepsilon(\mathbf{x})$.

Introduction

Représentation multi-échelle pour des petits défauts

► Exemple de l'équation de Laplace



$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = f & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \partial_{\mathbf{n}} u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \varepsilon \partial \mathbf{H}_\infty. \end{cases}$$

► Terme limite : $u_\varepsilon \rightarrow u_0$ dans $H^1(\Omega_\varepsilon)$.

► Développement asymptotique ?

► $r_\varepsilon = u_\varepsilon - u_0$ satisfait

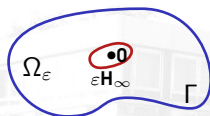
$$\begin{cases} -\Delta \mathcal{R}_\varepsilon &= 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon/\varepsilon, \\ \mathcal{R}_\varepsilon &= 0 & \text{sur } \Gamma/\varepsilon, \\ \partial_{\mathbf{n}} r_\varepsilon(\mathbf{x}) &= -\nabla u_0(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} & \text{pour } \mathbf{x} \in \varepsilon \partial \mathbf{H}_\infty. \end{cases}$$

► Changement de variable : $\mathbf{x} = \varepsilon \mathcal{X}$, et $\mathcal{R}_\varepsilon(\mathcal{X}) = r_\varepsilon(\mathbf{x})$.

Introduction

Représentation multi-échelle pour des petits défauts

► Exemple de l'équation de Laplace



$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = f & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \partial_n u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \varepsilon \partial \mathbf{H}_\infty. \end{cases}$$

► Terme limite : $u_\varepsilon \rightarrow u_0$ dans $H^1(\Omega_\varepsilon)$.

► Développement asymptotique ?

► $r_\varepsilon = u_\varepsilon - u_0$ satisfait

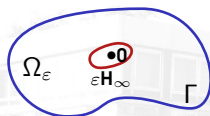
$$\begin{cases} -\Delta \mathcal{R}_\varepsilon & = & 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon/\varepsilon, \\ \mathcal{R}_\varepsilon & = & 0 & \text{sur } \Gamma/\varepsilon, \\ \partial_N \mathcal{R}_\varepsilon(\mathcal{X}) & = & -\varepsilon \nabla u_0(\varepsilon \mathcal{X}) \cdot \mathcal{N} & \text{pour } \mathcal{X} \in \partial \mathbf{H}_\infty. \end{cases}$$

► Changement de variable : $\mathbf{x} = \varepsilon \mathcal{X}$, et $\mathcal{R}_\varepsilon(\mathcal{X}) = r_\varepsilon(\mathbf{x})$.

Introduction

Représentation multi-échelle pour des petits défauts

► Exemple de l'équation de Laplace



$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = f & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \partial_n u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \varepsilon \partial \mathbf{H}_\infty. \end{cases}$$

► Terme limite : $u_\varepsilon \rightarrow u_0$ dans $H^1(\Omega_\varepsilon)$.

► Développement asymptotique ?

► $r_\varepsilon = u_\varepsilon - u_0$ satisfait

$$\begin{cases} -\Delta \mathcal{R}_\varepsilon &= 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon/\varepsilon, \\ \mathcal{R}_\varepsilon &= 0 & \text{sur } \Gamma/\varepsilon, \\ \partial_N \mathcal{R}_\varepsilon(\mathcal{X}) &= -\varepsilon \nabla u_0(\varepsilon \mathcal{X}) \cdot \mathcal{N} & \text{pour } \mathcal{X} \in \partial \mathbf{H}_\infty. \end{cases}$$

► Changement de variable : $\mathbf{x} = \varepsilon \mathcal{X}$, et $\mathcal{R}_\varepsilon(\mathcal{X}) = r_\varepsilon(\mathbf{x})$.

► On pose $\mathcal{R}_\varepsilon = -\varepsilon \mathcal{V}_\varepsilon$ et on fait $\varepsilon \rightarrow 0$.

Introduction

Représentation multi-échelle pour des petits défauts

► Exemple de l'équation de Laplace



The diagram shows a domain Ω_ε bounded by Γ . Inside, there is a small hole $\varepsilon \mathbf{H}_\infty$ containing a point $\bullet 0$.

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = f & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \partial_n u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \varepsilon \partial \mathbf{H}_\infty. \end{cases}$$

► Terme limite : $u_\varepsilon \rightarrow u_0$ dans $H^1(\Omega_\varepsilon)$.

► Développement asymptotique ?

► $r_\varepsilon = u_\varepsilon - u_0$ satisfait

$$\begin{cases} -\Delta \mathcal{V}_0 & = & 0 & \text{dans } \mathbf{R}^2 \setminus \mathbf{H}_\infty, \\ \mathcal{R}_\varepsilon & = & 0 & \text{sur } \Gamma/\varepsilon, \\ \partial_N \mathcal{R}_\varepsilon(\mathcal{X}) & = & -\varepsilon \nabla u_0(\varepsilon \mathcal{X}) \cdot \mathcal{N} & \text{pour } \mathcal{X} \in \partial \mathbf{H}_\infty. \end{cases}$$

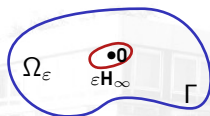
► Changement de variable : $\mathbf{x} = \varepsilon \mathcal{X}$, et $\mathcal{R}_\varepsilon(\mathcal{X}) = r_\varepsilon(\mathbf{x})$.

► On pose $\mathcal{R}_\varepsilon = -\varepsilon \mathcal{V}_\varepsilon$ et on fait $\varepsilon \rightarrow 0$.

Introduction

Représentation multi-échelle pour des petits défauts

► Exemple de l'équation de Laplace



$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = f & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \partial_n u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \varepsilon \partial \mathbf{H}_\infty. \end{cases}$$

► Terme limite : $u_\varepsilon \rightarrow u_0$ dans $H^1(\Omega_\varepsilon)$.

► Développement asymptotique ?

► $r_\varepsilon = u_\varepsilon - u_0$ satisfait

$$\begin{cases} -\Delta \mathcal{V}_0 = 0 & \text{dans } \mathbf{R}^2 \setminus \mathbf{H}_\infty, \\ \mathcal{V}_0 \rightarrow 0 & \text{à l'infini,} \\ \partial_N \mathcal{R}_\varepsilon(\mathcal{X}) = -\varepsilon \nabla u_0(\varepsilon \mathcal{X}) \cdot \mathcal{N} & \text{pour } \mathcal{X} \in \partial \mathbf{H}_\infty. \end{cases}$$

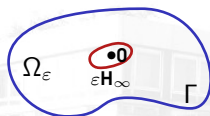
► Changement de variable : $\mathbf{x} = \varepsilon \mathcal{X}$, et $\mathcal{R}_\varepsilon(\mathcal{X}) = r_\varepsilon(\mathbf{x})$.

► On pose $\mathcal{R}_\varepsilon = -\varepsilon \mathcal{V}_\varepsilon$ et on fait $\varepsilon \rightarrow 0$.

Introduction

Représentation multi-échelle pour des petits défauts

► Exemple de l'équation de Laplace



$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = f & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \partial_n u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \varepsilon \partial \mathbf{H}_\infty. \end{cases}$$

► Terme limite : $u_\varepsilon \rightarrow u_0$ dans $H^1(\Omega_\varepsilon)$.

► Développement asymptotique ?

► $r_\varepsilon = u_\varepsilon - u_0$ satisfait

$$\begin{cases} -\Delta v_0 & = & 0 & \text{dans } \mathbf{R}^2 \setminus \mathbf{H}_\infty, \\ v_0 & \rightarrow & 0 & \text{à l'infini,} \\ \partial_N v_0(\mathcal{X}) & = & \nabla u_0(\mathbf{0}) \cdot \mathcal{N} & \text{pour } \mathcal{X} \in \partial \mathbf{H}_\infty. \end{cases}$$

► Changement de variable : $\mathbf{x} = \varepsilon \mathcal{X}$, et $\mathcal{R}_\varepsilon(\mathcal{X}) = r_\varepsilon(\mathbf{x})$.

► On pose $\mathcal{R}_\varepsilon = -\varepsilon v_\varepsilon$ et on fait $\varepsilon \rightarrow 0$.

Introduction

Représentation multi-échelle pour des petits défauts

► Exemple de l'équation de Laplace


$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u_\varepsilon = f & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \partial_n u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \varepsilon \partial \mathbf{H}_\infty. \end{array} \right.$$

► Terme limite : $u_\varepsilon \rightarrow u_0$ dans $H^1(\Omega_\varepsilon)$.

► Développement asymptotique ? $u_\varepsilon(\mathbf{x}) \simeq u_0(\mathbf{x}) - \varepsilon \mathcal{V}_0(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})$

► $r_\varepsilon = u_\varepsilon - u_0$ satisfait

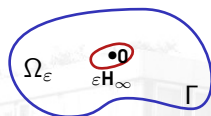
$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta \mathcal{V}_0 & = 0 & \text{dans } \mathbf{R}^2 \setminus \mathbf{H}_\infty, \\ \mathcal{V}_0 & \rightarrow 0 & \text{à l'infini,} \\ \partial_N \mathcal{V}_0(\mathcal{X}) & = \nabla u_0(\mathbf{0}) \cdot \mathbf{N} & \text{pour } \mathcal{X} \in \partial \mathbf{H}_\infty. \end{array} \right.$$

► Changement de variable : $\mathbf{x} = \varepsilon \mathcal{X}$, et $\mathcal{R}_\varepsilon(\mathcal{X}) = r_\varepsilon(\mathbf{x})$.

► On pose $\mathcal{R}_\varepsilon = -\varepsilon \mathcal{V}_\varepsilon$ et on fait $\varepsilon \rightarrow 0$.

Introduction

Représentation multi-échelle pour des petits défauts



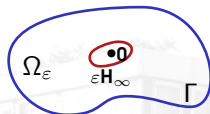
$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u_\varepsilon = f & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \partial_n u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \varepsilon \partial H_\infty. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta \mathbf{V} = 0 & \text{dans } H_\infty, \\ \partial_N \mathbf{V} = \mathcal{N} & \text{sur } \partial H_\infty, \\ \mathbf{V} \rightarrow 0 & \text{lorsque } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \end{array} \right.$$

Dvp. asymptotique à l'ordre 1 : $u_\varepsilon(\mathbf{x}) \simeq u_0(\mathbf{x}) - \varepsilon \nabla u_0(\mathbf{0}) \cdot \mathbf{V}\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right).$

Introduction

Représentation multi-échelle pour des petits défauts



$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u_\varepsilon = f & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \partial_n u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \varepsilon \partial \mathbf{H}_\infty. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta \mathbf{V} = 0 & \text{dans } \mathbf{H}_\infty, \\ \partial_{\mathcal{N}} \mathbf{V} = \mathcal{N} & \text{sur } \partial \mathbf{H}_\infty, \\ \mathbf{V} \rightarrow 0 & \text{lorsque } |\mathcal{X}| \rightarrow \infty. \end{array} \right.$$

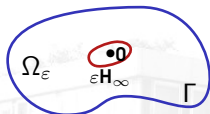
Dvp. asymptotique à l'ordre 1 : $u_\varepsilon(\mathbf{x}) \simeq u_0(\mathbf{x}) - \varepsilon \nabla u_0(\mathbf{0}) \cdot \mathbf{V}\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right).$

- Construction possible à tout ordre, estimations du reste.

[Maz'ya-Nazarov-Plamenevskij].

Introduction

Représentation multi-échelle pour des petits défauts



$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = f & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \partial_n u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \varepsilon \partial \mathbf{H}_\infty. \end{cases}$$

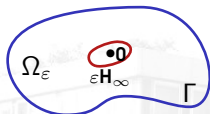
$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{V} = 0 & \text{dans } \mathbf{H}_\infty, \\ \partial_{\mathcal{N}} \mathbf{V} = \mathcal{N} & \text{sur } \partial \mathbf{H}_\infty, \\ \mathbf{V} \rightarrow 0 & \text{lorsque } |\mathcal{X}| \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Dvp. asymptotique à l'ordre 1 : $u_\varepsilon(\mathbf{x}) \simeq u_0(\mathbf{x}) - \varepsilon \nabla u_0(\mathbf{0}) \cdot \mathbf{V}\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right).$

- ▶ Construction possible à tout ordre, estimations du reste.
[Maz'ya-Nazarov-Plamenevskij].
- ▶ Représentations similaires pour d'autres opérateurs, conditions aux limites, géométries, pour des inclusions multiples...

Introduction

Représentation multi-échelle pour des petits défauts



$$\begin{cases} -\Delta u_\epsilon = f & \text{dans } \Omega_\epsilon, \\ u_\epsilon = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \partial_n u_\epsilon = 0 & \text{sur } \epsilon \partial H_\infty. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{V} = 0 & \text{dans } H_\infty, \\ \partial_N \mathbf{V} = \mathcal{N} & \text{sur } \partial H_\infty, \\ \mathbf{V} \rightarrow 0 & \text{lorsque } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Dvp. asymptotique à l'ordre 1 : $u_\epsilon(\mathbf{x}) \simeq u_0(\mathbf{x}) - \epsilon \nabla u_0(\mathbf{0}) \cdot \mathbf{V}\left(\frac{\mathbf{x}}{\epsilon}\right).$

- ▶ Construction possible à tout ordre, estimations du reste.
[Maz'ya-Nazarov-Plamenevskij].
- ▶ Représentations similaires pour d'autres opérateurs, conditions aux limites, géométries, pour des inclusions multiples...
- ▶ **Question :** calcul numérique du profil $\mathbf{V}$?

Plan de l'exposé

- ▶ **Problème « jouet » : l'équation de Laplace**
 - ▶ Propriétés de profils
 - ▶ Conditions aux limites artificielles
- ▶ **Calcul des profils pour l'élasticité**
 - ▶ Conditions aux limites artificielles
 - ▶ Problèmes de Ventcel non coercifs
- ▶ **Quelques autres problèmes non coercifs de type Ventcel**



The background of the slide features a faded image of a modern, multi-story building with large windows and a balcony, situated on a grassy lawn. To the right of the building is a large, abstract sculpture made of stacked blocks, resembling a stylized face or a geometric form.

Problème « jouet » : l'équation de Laplace



Équation de Laplace

Propriétés de profils

► Inclusion circulaire



$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta \mathbf{V} = 0 & \text{dans } H_\infty, \\ \partial_{\mathcal{N}} \mathbf{V} = \mathcal{N} & \text{sur } \partial H_\infty, \\ \mathbf{V} \rightarrow 0 & \text{à l'infini.} \end{array} \right.$$

Équation de Laplace

Propriétés de profils

► Inclusion circulaire


$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta V = 0 & \text{dans } \mathbf{H}_\infty, \\ \partial_{\mathcal{N}} V = \mathcal{N}_1 & \text{sur } \partial \mathbf{H}_\infty, \\ V \rightarrow 0 & \text{à l'infini} \end{array} \right.$$

Équation de Laplace

Propriétés de profils

► Inclusion circulaire



$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta V = 0 \\ \partial_N V = \text{cos } \theta \\ V \rightarrow 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{dans } H_\infty, \\ \text{sur } \partial H_\infty, \\ \text{à l'infini} \end{array}$$

Équation de Laplace

Propriétés de profils

► Inclusion circulaire



$$\begin{cases} -\Delta V = 0 & \text{dans } \mathbf{H}_\infty, \\ \partial_N V = \cos \theta & \text{sur } \partial \mathbf{H}_\infty, \\ V \rightarrow 0 & \text{à l'infini} \end{cases}$$

Solution explicite :

$$V(r, \theta) = \frac{\cos \theta}{r}.$$

Équation de Laplace

Propriétés de profils

► Inclusion circulaire



$$\begin{cases} -\Delta V = 0 & \text{dans } \mathbf{H}_\infty, \\ \partial_N V = \cos \theta & \text{sur } \partial \mathbf{H}_\infty, \\ V \rightarrow 0 & \text{à l'infini} \end{cases}$$

Solution explicite :

$$V(r, \theta) = \frac{\cos \theta}{r}.$$

► Cas général

Pas de formule explicite, seulement un développement à l'infini :

$$V(r, \theta) \underset{\infty}{=} \sum_{k \geq 1} \frac{a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta}{r^k}$$

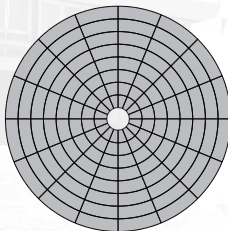
Équation de Laplace

Conditions artificielles



$$\begin{cases} -\Delta V = 0 & \text{dans } \mathbf{H}_\infty, \\ \partial_N V = \mathcal{N}_1 & \text{sur } \partial \mathbf{H}_\infty, \\ V \rightarrow 0 & \text{à l'infini} \end{cases}$$

- Domaine tronqué au rayon R : $\mathbf{H}_\infty^R \subset \mathbf{H}_\infty$.



Équation de Laplace

Conditions artificielles

$\mathbf{H}_\infty$



$$\begin{cases} -\Delta V = 0 & \text{dans } \mathbf{H}_\infty, \\ \partial_N V = \mathcal{N}_1 & \text{sur } \partial\mathbf{H}_\infty, \\ V \rightarrow 0 & \text{à l'infini} \end{cases}$$

- ▶ Domaine tronqué au rayon R : $\mathbf{H}_\infty^R \subset \mathbf{H}_\infty$.
- ▶ Condition (“absorbante”) pour $\mathcal{X} \in \Gamma_R$ (i.e. $|\mathcal{X}| = R$).

Équation de Laplace

Conditions artificielles

$\mathbf{H}_\infty$



$$\begin{cases} -\Delta V = 0 & \text{dans } \mathbf{H}_\infty, \\ \partial_N V = \mathcal{N}_1 & \text{sur } \partial\mathbf{H}_\infty, \\ V \rightarrow 0 & \text{à l'infini} \end{cases}$$

- ▶ Domaine tronqué au rayon R : $\mathbf{H}_\infty^R \subset \mathbf{H}_\infty$.
- ▶ Condition (“absorbante”) pour $\mathcal{X} \in \Gamma_R$ (i.e. $|\mathcal{X}| = R$).
 - ▶ Rappel :

$$V(r, \theta) = \sum_{k \geq 1} \frac{a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta}{r^k}$$

Équation de Laplace

Conditions artificielles

$\mathbf{H}_\infty$



$$\begin{cases} -\Delta V = 0 & \text{dans } \mathbf{H}_\infty, \\ \partial_N V = \mathcal{N}_1 & \text{sur } \partial\mathbf{H}_\infty, \\ V \rightarrow 0 & \text{à l'infini} \end{cases}$$

- ▶ Domaine tronqué au rayon R : $\mathbf{H}_\infty^R \subset \mathbf{H}_\infty$.
- ▶ Condition (“absorbante”) pour $\mathcal{X} \in \Gamma_R$ (i.e. $|\mathcal{X}| = R$).

- ▶ Rappel :

$$V(r, \theta) = \sum_{k \geq 1} \frac{a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta}{r^k}$$

- ▶ Construction élémentaire :

Équation de Laplace

Conditions artificielles

H_∞



$$\begin{cases} -\Delta V = 0 & \text{dans } H_\infty, \\ \partial_N V = N_1 & \text{sur } \partial H_\infty, \\ V \rightarrow 0 & \text{à l'infini} \end{cases}$$

- ▶ Domaine tronqué au rayon R : $H_\infty^R \subset H_\infty$.
- ▶ Condition (“absorbante”) pour $\mathcal{X} \in \Gamma_R$ (i.e. $|\mathcal{X}| = R$).

▶ Rappel :

$$V(r, \theta) = \sum_{k \geq 1} \frac{a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta}{r^k}$$

▶ Construction élémentaire :

▶ **Ordre 0** : $V = 0$ pour $\mathcal{X} \in \Gamma_R$.

Équation de Laplace

Conditions artificielles

H_∞



$$\begin{cases} -\Delta V = 0 & \text{dans } H_\infty, \\ \partial_N V = N_1 & \text{sur } \partial H_\infty, \\ V \rightarrow 0 & \text{à l'infini} \end{cases}$$

- ▶ Domaine tronqué au rayon R : $H_\infty^R \subset H_\infty$.
- ▶ Condition (“absorbante”) pour $\mathcal{X} \in \Gamma_R$ (i.e. $|\mathcal{X}| = R$).

▶ Rappel :

$$V(r, \theta) = \sum_{k \geq 1} \frac{a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta}{r^k}$$

▶ Construction élémentaire :

▶ **Ordre 0** : $V = 0$ pour $\mathcal{X} \in \Gamma_R$.

car $V = \mathcal{O}(\frac{1}{r})$ à l'infini.

Équation de Laplace

Conditions artificielles

H_∞



$$\begin{cases} -\Delta V = 0 & \text{dans } H_\infty, \\ \partial_N V = N_1 & \text{sur } \partial H_\infty, \\ V \rightarrow 0 & \text{à l'infini} \end{cases}$$

- ▶ Domaine tronqué au rayon R : $H_\infty^R \subset H_\infty$.
- ▶ Condition (“absorbante”) pour $\mathcal{X} \in \Gamma_R$ (i.e. $|\mathcal{X}| = R$).

▶ Rappel :

$$V(r, \theta) = \sum_{k \geq 1} \frac{a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta}{r^k}$$

- ▶ Construction élémentaire :
 - ▶ Ordre 0 : $V = 0$ pour $\mathcal{X} \in \Gamma_R$.
 - ▶ Ordre 1 : $V + R\partial_N V = 0$ pour $\mathcal{X} \in \Gamma_R$.

Équation de Laplace

Conditions artificielles

H_∞



$$\begin{cases} -\Delta V = 0 & \text{dans } H_\infty, \\ \partial_N V = N_1 & \text{sur } \partial H_\infty, \\ V \rightarrow 0 & \text{à l'infini} \end{cases}$$

- ▶ Domaine tronqué au rayon R : $H_\infty^R \subset H_\infty$.
- ▶ Condition (“absorbante”) pour $\mathcal{X} \in \Gamma_R$ (i.e. $|\mathcal{X}| = R$).

▶ Rappel :

$$V(r, \theta) = \sum_{k \geq 1} \frac{a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta}{r^k}$$

▶ Construction élémentaire :

- ▶ **Ordre 0** : $V = 0$ pour $\mathcal{X} \in \Gamma_R$.
- ▶ **Ordre 1** : $V + R\partial_N V = 0$ pour $\mathcal{X} \in \Gamma_R$.

en effet

$$V \sim R^{-1} (a_1 \cos \theta + b_1 \sin \theta)$$

et

$$R\partial_N V \sim -R^{-1} (a_1 \cos \theta + b_1 \sin \theta).$$

Équation de Laplace

Conditions artificielles

H_∞



$$\begin{cases} -\Delta V = 0 & \text{dans } H_\infty, \\ \partial_N V = N_1 & \text{sur } \partial H_\infty, \\ V \rightarrow 0 & \text{à l'infini} \end{cases}$$

- ▶ Domaine tronqué au rayon R : $H_\infty^R \subset H_\infty$.
- ▶ Condition (“absorbante”) pour $\mathcal{X} \in \Gamma_R$ (i.e. $|\mathcal{X}| = R$).

▶ Rappel :

$$V(r, \theta) = \sum_{k \geq 1} \frac{a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta}{r^k}$$

- ▶ Construction élémentaire :
 - ▶ Ordre 0 : $V = 0$ pour $\mathcal{X} \in \Gamma_R$.
 - ▶ Ordre 1 : $V + R\partial_N V = 0$ pour $\mathcal{X} \in \Gamma_R$.
 - ▶ Ordre 2 : $V + \frac{3R}{2}\partial_N V - \frac{R^2}{2}\Delta_\tau V = 0$ pour $\mathcal{X} \in \Gamma_R$.

Équation de Laplace

Conditions artificielles

H_∞



$$\begin{cases} -\Delta V = 0 & \text{dans } H_\infty, \\ \partial_N V = N_1 & \text{sur } \partial H_\infty, \\ V \rightarrow 0 & \text{à l'infini} \end{cases}$$

- ▶ Domaine tronqué au rayon R : $H_\infty^R \subset H_\infty$.
- ▶ Condition (“absorbante”) pour $\mathcal{X} \in \Gamma_R$ (i.e. $|\mathcal{X}| = R$).

▶ Rappel :

$$V(r, \theta) = \sum_{k \geq 1} \frac{a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta}{r^k}$$

▶ Construction élémentaire :

- ▶ Ordre 0 : $V = 0$ pour $\mathcal{X} \in \Gamma_R$.
- ▶ Ordre 1 : $V + R\partial_N V = 0$ pour $\mathcal{X} \in \Gamma_R$.
- ▶ Ordre 2 : $V + \frac{3R}{2}\partial_N V - \frac{R^2}{2}\Delta_\tau V = 0$ pour $\mathcal{X} \in \Gamma_R$.

$$V \sim R^{-1}(a_1 \cos \theta + b_1 \sin \theta) + R^{-2}(a_2 \cos 2\theta + b_2 \sin 2\theta)$$

$$R\partial_N V \sim -R^{-1}(a_1 \cos \theta + b_1 \sin \theta) - 2R^{-2}(a_2 \cos 2\theta + b_2 \sin 2\theta)$$

$$R^2\Delta_\tau V \sim -R^{-1}(a_1 \cos \theta + b_1 \sin \theta) - 4R^{-2}(a_2 \cos 2\theta + b_2 \sin 2\theta)$$

Équation de Laplace

Conditions artificielles

H_∞



$$\begin{cases} -\Delta V = 0 & \text{dans } H_\infty, \\ \partial_N V = N_1 & \text{sur } \partial H_\infty, \\ V \rightarrow 0 & \text{à l'infini} \end{cases}$$

- ▶ Domaine tronqué au rayon R : $H_\infty^R \subset H_\infty$.
- ▶ Condition (“absorbante”) pour $\mathcal{X} \in \Gamma_R$ (i.e. $|\mathcal{X}| = R$).

▶ Rappel :

$$V(r, \theta) = \sum_{k \geq 1} \frac{a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta}{r^k}$$

- ▶ Construction élémentaire :
 - ▶ Ordre 0 : $V = 0$ pour $\mathcal{X} \in \Gamma_R$.
 - ▶ Ordre 1 : $V + R\partial_N V = 0$ pour $\mathcal{X} \in \Gamma_R$.
 - ▶ Ordre 2 : $V + \frac{3R}{2}\partial_N V - \frac{R^2}{2}\Delta_\tau V = 0$ pour $\mathcal{X} \in \Gamma_R$.

[Engquist-Majda, Halpern-Rauch, ...]

Équation de Laplace

Conditions artificielles

► Problème approché d'ordre 2 :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta V = 0 & \text{dans } \mathbf{H}_{\infty}^R, \\ \partial_{\mathcal{N}} V(\mathcal{X}) = \mathcal{N}_1 & \text{pour } \mathcal{X} \in \partial \mathbf{H}_{\infty}, \\ V + \frac{3R}{2} \partial_{\mathcal{N}} V - \frac{R^2}{2} \Delta_{\tau} V = 0 & \text{sur } \Gamma_R = \{\mathcal{X} ; |\mathcal{X}| = R\}. \end{array} \right.$$

Équation de Laplace

Conditions artificielles

► Problème approché d'ordre 2 :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta V = 0 & \text{dans } \mathbf{H}_{\infty}^R, \\ \partial_{\mathcal{N}} V(\mathcal{X}) = \mathcal{N}_1 & \text{pour } \mathcal{X} \in \partial \mathbf{H}_{\infty}, \\ V + \frac{3R}{2} \partial_{\mathcal{N}} V - \frac{R^2}{2} \Delta_{\tau} V = 0 & \text{sur } \Gamma_R = \{\mathcal{X} ; |\mathcal{X}| = R\}. \end{array} \right.$$

► Formulation variationnelle

$$\int_{\mathbf{H}_{\infty}^R} \nabla V \cdot \nabla W + \frac{2}{3R} \int_{\Gamma_R} V W + \frac{R}{3} \int_{\Gamma_R} \nabla_{\Gamma_R} V \cdot \nabla_{\Gamma_R} W = \int_{\partial \mathbf{H}_{\infty}} \mathcal{N}_1 W$$

Équation de Laplace

Conditions artificielles

► Problème approché d'ordre 2 :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta V = 0 & \text{dans } \mathbf{H}_{\infty}^R, \\ \partial_{\mathcal{N}} V(\mathcal{X}) = \mathcal{N}_1 & \text{pour } \mathcal{X} \in \partial \mathbf{H}_{\infty}, \\ V + \frac{3R}{2} \partial_{\mathcal{N}} V - \frac{R^2}{2} \Delta_{\tau} V = 0 & \text{sur } \Gamma_R = \{\mathcal{X} ; |\mathcal{X}| = R\}. \end{array} \right.$$

► Formulation variationnelle

$$\int_{\mathbf{H}_{\infty}^R} \nabla V \cdot \nabla W + \frac{2}{3R} \int_{\Gamma_R} V W + \frac{R}{3} \int_{\Gamma_R} \nabla_{\Gamma_R} V \cdot \nabla_{\Gamma_R} W = \int_{\partial \mathbf{H}_{\infty}} \mathcal{N}_1 W$$

coercive dans

$$\mathfrak{W} = \left\{ W \in H^1(\mathbf{H}_{\infty}^R) ; W|_{\Gamma_R} \in H^1(\Gamma_R) \right\}.$$

Équation de Laplace

Conditions artificielles

► Problème approché d'ordre 2 :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta V = 0 & \text{dans } \mathbf{H}_{\infty}^R, \\ \partial_{\mathcal{N}} V(\mathcal{X}) = \mathcal{N}_1 & \text{pour } \mathcal{X} \in \partial \mathbf{H}_{\infty}, \\ V + \frac{3R}{2} \partial_{\mathcal{N}} V - \frac{R^2}{2} \Delta_{\tau} V = 0 & \text{sur } \Gamma_R = \{\mathcal{X} ; |\mathcal{X}| = R\}. \end{array} \right.$$

► Formulation variationnelle

$$\int_{\mathbf{H}_{\infty}^R} \nabla V \cdot \nabla W + \frac{2}{3R} \int_{\Gamma_R} V W + \frac{R}{3} \int_{\Gamma_R} \nabla_{\Gamma_R} V \cdot \nabla_{\Gamma_R} W = \int_{\partial \mathbf{H}_{\infty}} \mathcal{N}_1 W$$

coercive dans

$$\mathfrak{W} = \left\{ W \in H^1(\mathbf{H}_{\infty}^R) ; W|_{\Gamma_R} \in H^1(\Gamma_R) \right\}.$$

► Problème bien posé !

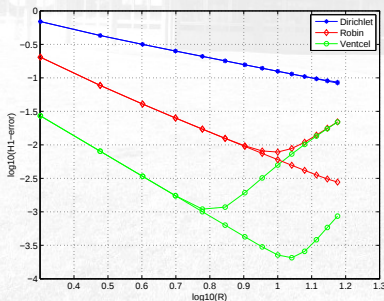
Équation de Laplace

Conditions artificielles



$$\begin{cases} -\Delta V = 0 & \text{dans } \mathbf{H}_{\infty}^R, \\ \partial_{\mathcal{N}} V(\mathcal{X}) = \mathcal{N}_1 & \text{pour } \mathcal{X} \in \partial \mathbf{H}_{\infty}, \end{cases}$$

- ▶ Ordre 0 : $V = 0$ pour $|\mathcal{X}| = R$.
- ▶ Ordre 1 : $V + R\partial_{\mathcal{N}} V = 0$ pour $|\mathcal{X}| = R$.
- ▶ Ordre 2 : $V + \frac{3R}{2}\partial_{\mathcal{N}} V - \frac{R^2}{2}\Delta_{\mathcal{T}} V = 0$ pour $|\mathcal{X}| = R$.



Erreurs H^1 vs R
(loglog)

$\mathbb{Q}_6$ et $\mathbb{Q}_{10}$.

Équation de Laplace

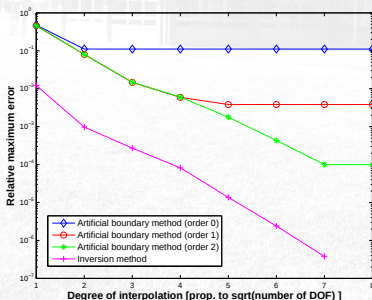
Conditions artificielles

H_∞



$$\begin{cases} -\Delta V = 0 & \text{dans } H_\infty^R, \\ \partial_N V(x) = N_1 & \text{pour } x \in \partial H_\infty, \end{cases}$$

- ▶ Ordre 0 : $V = 0$ pour $|x| = R$.
- ▶ Ordre 1 : $V + R\partial_N V = 0$ pour $|x| = R$.
- ▶ Ordre 2 : $V + \frac{3R}{2}\partial_N V - \frac{R^2}{2}\Delta_\tau V = 0$ pour $|x| = R$.



Erreurs L^∞ vs DdL
(semilog)

The background of the slide features a faded image of a modern, multi-story building with large windows and a balcony, situated on a grassy area. To the right of the building is a large, abstract sculpture made of stacked, rectangular blocks, resembling a stylized face or a geometric structure.

Calculs de profils pour l'élasticité linéaire



Élasticité linéaire

Profil pour un domaine avec une inclusion

$$\begin{cases} -\mu\Delta\mathbf{V} - (\lambda + \mu)\mathbf{grad}\operatorname{div}\mathbf{V} = \mathbf{0} \text{ dans } \mathbf{H}_\infty, \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{V}) \cdot \mathcal{N} = \mathbf{G} \text{ sur } \partial\mathbf{H}_\infty, \\ \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{0} \text{ à l'infini.} \end{cases}$$

- ▶ Singularités à l'infini pour le problème de profil [Grisvard]

- ▶ $\mathfrak{S}^q(r, \theta) = r^q \begin{pmatrix} \varphi_r(\theta) \\ \varphi_\theta(\theta) \end{pmatrix}$ pour $q \in \mathbb{Z}$.

- ▶ Pour $q = -1$,

$$\begin{cases} \varphi_r(\theta) &= A \cos 2\theta + B \sin 2\theta \\ \varphi_\theta(\theta) &= \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} (B \cos 2\theta - A \sin 2\theta) + B \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \end{cases}$$

- ▶ Développement à l'infini :

$$\mathbf{V}_\infty = \tilde{\mathfrak{S}}^{-1} + \tilde{\mathfrak{S}}^{-2} + \dots$$

- ▶ Développement à l'infini :

$$\mathbf{V} = \tilde{\mathbf{G}}_{\infty}^{-1} + \tilde{\mathbf{G}}^{-2} + \dots$$

- ▶ Dérivation de conditions artificielles sur $|\mathcal{X}| = R$

- ▶ **Ordre 0** :

$$\mathbf{V} = 0.$$

- ▶ **Ordre 1** (en polaires) :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{V}) \cdot \mathcal{N} + \frac{A_1}{R} \mathbf{V} + \frac{1}{2R} \begin{bmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix} \partial_{\theta}^2 \mathbf{V} = 0.$$

avec

$$A_1 = \frac{E}{1+\nu}, \quad A_2 = -\frac{\nu E}{2(1-\nu^2)}, \quad A_3 = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}.$$

Comme $E > 0$ et $\nu \in (-1, .5)$, on a $A_3 > 0$.

Élasticité linéaire

Conditions artificielles

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{V}) \cdot \mathbf{N} + \frac{A_1}{R} \mathbf{V} + \frac{1}{2R} \begin{bmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix} \partial_\theta^2 \mathbf{V} = 0.$$

- ▶ Mauvais signe : $A_3 > 0$.
- ▶ Problème scalaire modèle :

$$\begin{cases} -\Delta V = 0 & \text{dans } \Omega, \\ R \partial_N V + \alpha V + \beta \partial_\theta^2 V = G & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

avec $\alpha, \beta > 0$.

- ▶ Pas d'approche variationnelle.
- ▶ Existence, unicité ?

Un problème modèle de type Ventcel non coercif

Cas d'une boule

Pour $\Omega = \mathcal{B}_1 \subset \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} -\Delta V = 0 & \text{dans } \mathcal{B}_1, \\ R\partial_{\mathcal{N}} V + \alpha V + \beta \partial_{\theta}^2 V = G & \text{sur } \partial \mathcal{B}_1. \end{cases}$$

- ▶ On cherche V sous la forme

$$V(r, \theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) r^n.$$

- ▶ On obtient les relations

$$a_n(-\beta n^2 + n + \alpha) = a_n(G) \quad \text{et} \quad b_n(-\beta n^2 + n + \alpha) = b_n(G),$$

où $a_n(G)$ et $b_n(G)$ sont les coefficients de Fourier de G .

- ▶ Solution unique ssi $\alpha \neq \beta n^2 - n$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$.

Un problème modèle de type Ventcel non coercif

Cas general

$$\begin{cases} -\Delta V = 0 & \text{dans } \Omega, \\ R\partial_N V + \alpha V + \beta R^2 \Delta_\tau V = G & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

- Introduction de l'opérateur Λ :

$$\begin{aligned} \Lambda : H^{1/2}(\partial\Omega) &\rightarrow H^{-1/2}(\partial\Omega) \\ \psi &\mapsto \partial_N U, \end{aligned}$$

où U résout

$$\begin{cases} -\Delta U = 0 & \text{dans } \Omega \\ U = \psi & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

- On récrit comme une équation sur $\partial\Omega$:

$$\beta R^2 \Delta_\tau w + R\Lambda w + \alpha w = G$$

(la donnée de Dirichlet w est alors relevée pour obtenir U).

Un problème modèle de type Ventcel non coercif

Cas general

$$\beta R^2 \Delta_\tau w + R \Lambda w + \alpha w = G$$

Résultat. Le problème admet une unique solution ssi $\alpha \neq \alpha_n (\forall n \in \mathbb{N})$, où (α_n) est une suite croissant vers l'infini ($\beta > 0$ fixé).

IDÉE DE PREUVE.

- ▶ L'opérateur Δ_τ est pseudo. diff. elliptique semi-borné, autoadjoint d'ordre 2.
- ▶ L'opérateur Λ est pseudo. diff. elliptique semi-borné, autoadjoint d'ordre 1.
- ▶ L'opérateur $-\beta R^2 \Delta_\tau - R \Lambda$ est pseudo. diff. elliptique semi-borné, autoadjoint d'ordre 2.
- ▶ Les (α_n) sont les valeurs propres de $-\beta R^2 \Delta_\tau - R \Lambda$.

Un problème modèle de type Ventcel non coercif

Retour à la problématique « conditions artificielles »



A diagram showing a domain Ω (a gray circle) with a hole ω (a blue circle). The boundary of Ω is marked with a red circle, and the boundary of ω is marked with a blue circle.

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta V &= 0 \quad \text{dans } \Omega \setminus \overline{\omega}, \\ R\partial_{\mathcal{N}} V + \alpha V + \beta R^2 \Delta_{\tau} V &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \\ V &= G \quad \text{sur } \partial\omega. \end{array} \right.$$

► **Question :** si $\Omega = \mathcal{B}_R$ a-t-on existence pour R assez grand ?



Un problème modèle de type Ventcel non coercif

Retour à la problématique « conditions artificielles »


$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta V = 0 & \text{dans } \Omega \setminus \overline{\omega}, \\ R\partial_N V + \alpha V + \beta R^2 \Delta_\tau V = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ V = G & \text{sur } \partial\omega. \end{array} \right.$$

- ▶ **Question** : si $\Omega = \mathcal{B}_R$ a-t-on existence pour R assez grand ?
- ▶ Cas particulier d'un anneau : $\omega = \mathcal{B}_1$.
 - ▶ Représentation en série de Laurent

$$V(r, \theta) = d + c \ln r + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} (a_n r^n \cos n\theta + b_n r^n \sin n\theta)$$

- ▶ Condition d'unicité

$$R \notin \left\{ \gamma_n = \left(\frac{\beta n^2 + n - \alpha}{\beta n^2 - n - \alpha} \right)^{1/2n} \text{ pour } n \in \mathbb{N} \right\}$$

$\Rightarrow$ pour $R > R_c$, il y a unicité.

Un problème modèle de type Ventcel non coercif

Retour à la problématique « conditions artificielles »


$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta V = 0 & \text{dans } \Omega \setminus \overline{\omega}, \\ R\partial_{\mathcal{N}} V + \alpha V + \beta R^2 \Delta_{\tau} V = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ V = G & \text{sur } \partial\omega. \end{array} \right.$$

► **Question :** si $\Omega = \mathcal{B}_R$ a-t-on existence pour R assez grand ?

► Cas général.

► Par homothétie $x \mapsto x/R$, on peut se ramener au cas

$$\omega = \varepsilon \tilde{\omega} = D \quad \text{et} \quad \Omega = \mathcal{B}_1,$$

avec $\varepsilon = 1/R$.

► L'opérateur à étudier est alors

$$L_D = \alpha \text{Id} + \Lambda_D + \beta \Delta_{\tau} \quad \text{sur } \partial\mathcal{B}_1,$$

avec $\Lambda_D(\psi) = U$ où U satisfait

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta U = 0 & \text{dans } \mathcal{B}_1 \setminus \overline{D} \\ U = \psi & \text{sur } \partial\mathcal{B}_1 \\ U = 0 & \text{sur } \partial D \end{array} \right.$$

Un problème modèle de type Ventcel non coercif

Retour à la problématique « conditions artificielles »

$$L_D = \alpha \text{Id} + \Lambda_D + \beta \Delta_\tau \quad \text{sur } \partial \mathcal{B}_1,$$

avec $\Lambda_D(\psi) = U$ où U satisfait

$$\begin{cases} -\Delta U &= 0 & \text{dans } \mathcal{B}_1 \setminus \bar{D} \\ U &= \psi & \text{sur } \partial \mathcal{B}_1 \\ U &= 0 & \text{sur } \partial D \end{cases}$$

► $D = \emptyset$ est connu : $L_\emptyset$ est inversible ssi $\alpha \notin \{\alpha_n\}$.

► Résultat asymptotique :

$$\|\Lambda_{\varepsilon\tilde{\omega}} - \Lambda_\emptyset\|_{\mathcal{L}(H^{1/2}(\partial\Omega), H^{-1/2}(\partial\Omega))} \leq \frac{C}{|\ln \varepsilon|}.$$

► **Conclusion** : si ε est assez petit, $L_{\varepsilon\tilde{\omega}}$ est génériquement inversible.

Un problème modèle de type Ventcel non coercif

Retour à la problématique « conditions artificielles »

$$L_D = \alpha \text{Id} + \Lambda_D + \beta \Delta_\tau \quad \text{sur } \partial \mathcal{B}_1,$$

avec $\Lambda_D(\psi) = U$ où U satisfait

$$\begin{cases} -\Delta U &= 0 & \text{dans } \mathcal{B}_1 \setminus \bar{D} \\ U &= \psi & \text{sur } \partial \mathcal{B}_1 \\ U &= 0 & \text{sur } \partial D \end{cases}$$

- ▶ $D = \emptyset$ est connu : $L_\emptyset$ est inversible ssi $\alpha \notin \{\alpha_n\}$.
- ▶ Résultat asymptotique :

$$\|\Lambda_{\varepsilon\tilde{\omega}} - \Lambda_\emptyset\|_{\mathcal{L}(H^{1/2}(\partial\Omega), H^{-1/2}(\partial\Omega))} \leq \frac{C}{|\ln \varepsilon|}.$$

- ▶ **Conclusion** : si ε est assez petit, $L_{\varepsilon\tilde{\omega}}$ est génériquement inversible.
 $\implies$ Pour R assez grand, le problème initial a une unique solution.

Un problème modèle de type Ventcel non coercif

Retour à la problématique « conditions artificielles »

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u &= 0 \quad \text{dans } \mathcal{B}_R \setminus \bar{\omega}, \\ R\partial_N u + \alpha u + \beta R^2 \Delta_\tau u &= g \quad \text{sur } \partial\mathcal{B}_R, \\ u &= 0 \quad \text{sur } \partial\omega, \end{array} \right.$$

et l'opérateur L correspondant au problème sur le bord défini par

$$Lu = -\beta R^2 \Delta_\tau u - \alpha u - R\Lambda u \quad \text{sur } \partial\mathcal{B}_R$$

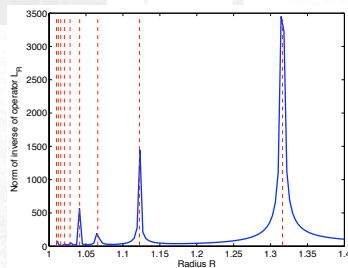
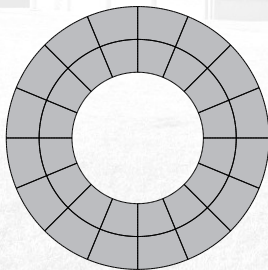
Un problème modèle de type Ventcel non coercif

Retour à la problématique « conditions artificielles »

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } \mathcal{B}_R \setminus \bar{\omega}, \\ R\partial_N u + \alpha u + \beta R^2 \Delta_\tau u = g & \text{sur } \partial\mathcal{B}_R, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\omega, \end{cases}$$

et l'opérateur L correspondant au problème sur le bord défini par

$$Lu = -\beta R^2 \Delta_\tau u - \alpha u - R\Lambda u \quad \text{sur } \partial\mathcal{B}_R$$



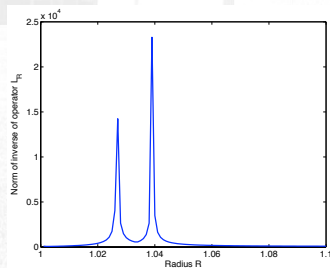
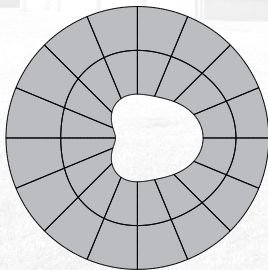
Un problème modèle de type Ventcel non coercif

Retour à la problématique « conditions artificielles »

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } \mathcal{B}_R \setminus \bar{\omega}, \\ R\partial_N u + \alpha u + \beta R^2 \Delta_\tau u = g & \text{sur } \partial\mathcal{B}_R, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\omega, \end{cases}$$

et l'opérateur L correspondant au problème sur le bord défini par

$$Lu = -\beta R^2 \Delta_\tau u - \alpha u - R\Lambda u \quad \text{sur } \partial\mathcal{B}_R$$



Problème de Vencel pour l'élasticité

Cas d'une inclusion circulaire

► Problème profil

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\mu \Delta \mathbf{u} - (\lambda + \mu) \mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} &= \mathbf{0} \quad \text{dans } \mathcal{B}_R \setminus \omega \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathcal{N} &= \mathbf{G} \quad \text{sur } \partial \omega \\ \frac{R(1+\nu)}{E} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathcal{N} + \frac{R^2}{2} \begin{bmatrix} \frac{-\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & \frac{1-\nu}{1-2\nu} \end{bmatrix} \Delta_{\tau} \mathbf{u} + \mathbf{u} &= \mathbf{0} \quad \text{sur } \partial \mathcal{B}_R \end{array} \right.$$

Problème de Vencel pour l'élasticité

Cas d'une inclusion circulaire

► Problème profil

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\mu \Delta \mathbf{u} - (\lambda + \mu) \mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} &= \mathbf{0} \quad \text{dans } \mathcal{B}_R \setminus \omega \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathcal{N} &= \mathbf{G} \quad \text{sur } \partial \omega \\ \frac{R(1+\nu)}{E} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathcal{N} + \frac{R^2}{2} \begin{bmatrix} \frac{-\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & \frac{1-\nu}{1-2\nu} \end{bmatrix} \Delta_{\tau} \mathbf{u} + \mathbf{u} &= \mathbf{0} \quad \text{sur } \partial \mathcal{B}_R \end{array} \right.$$

► Cas d'une boule : $\omega = \mathcal{B}_1$

Théorème. Il existe un ensemble dénombrable $\mathcal{S}$ t.q.

$\forall \nu \notin \mathcal{S}, \quad \exists \mathcal{R}_{\nu}$ dénombrable t.q. $\forall R \notin \mathcal{R}_{\nu},$

$\forall \mathbf{G} \in H^{1/2}(\partial \omega), \quad \exists \mathbf{u} \in H^2(\mathcal{B}_R \setminus \omega)$ solution.

Problème de Vencel pour l'élasticité

Cas d'une inclusion circulaire

On se ramène à une équation sur $\partial\mathcal{B}_R$:

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{-\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & \frac{1-\nu}{1-2\nu} \end{bmatrix} \partial_\theta^2 \varphi + \varphi + \Lambda_R(\varphi) = \frac{-R(1+\nu)}{E} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_0) \cdot \mathcal{N} \text{ sur } \partial\mathcal{B}_R,$$

avec $\Lambda_R(\varphi) = \left[\frac{R(1+\nu)}{E} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) \cdot \mathcal{N} \right] \Big|_{\partial\mathcal{B}_R}$, où

$$\begin{cases} -\mu \Delta \mathbf{v} - (\lambda + \mu) \mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0 & \text{sur } \mathcal{B}_R \setminus \omega, \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) \cdot \mathcal{N} &= 0 & \text{sur } \partial\omega, \\ \mathbf{v} &= \varphi & \text{sur } \partial\mathcal{B}_R. \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} -\mu \Delta \mathbf{u}_0 - (\lambda + \mu) \mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}_0 &= 0 & \text{sur } \mathcal{B}_R \setminus \omega, \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_0) \cdot \mathcal{N} &= \mathbf{G} & \text{sur } \partial\omega, \\ \mathbf{u}_0 &= 0 & \text{sur } \partial\mathcal{B}_R. \end{cases}$$

Problème de Vencel pour l'élasticité

Cas d'une inclusion circulaire

On cherche une solution sous la forme

$$\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_0^r \\ \varphi_0^\theta \end{bmatrix} + \sum_{n \geq 1} \begin{bmatrix} \varphi_n^r \\ \varphi_n^\theta \end{bmatrix} \cos n\theta + \sum_{n \geq 1} \begin{bmatrix} \psi_n^r \\ \psi_n^\theta \end{bmatrix} \sin n\theta$$

Soit $\Phi_n = [\varphi_n^r, \psi_n^r, \varphi_n^\theta, \psi_n^\theta]^\top$ et $f_{n,R}$ la décomposition du second membre

Le problème se réécrit

$$P_n \Phi_n + \mathcal{R}_{n,R} \Phi_n = f_{n,R}$$

avec $\|\mathcal{R}_{n,R}\|_\infty \leq Cn^2 R^{-2n+2}$, $\|\mathcal{R}_{1,R}\|_\infty \leq CR^{-4}$, $\|\mathcal{R}_{0,R}\|_\infty \leq CR^{-2}$

Problème de Ventcel pour l'élasticité

Cas d'une inclusion circulaire

On cherche une solution sous la forme

$$\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_0^r \\ \varphi_0^\theta \end{bmatrix} + \sum_{n \geq 1} \begin{bmatrix} \varphi_n^r \\ \varphi_n^\theta \end{bmatrix} \cos n\theta + \sum_{n \geq 1} \begin{bmatrix} \psi_n^r \\ \psi_n^\theta \end{bmatrix} \sin n\theta$$

Soit $\Phi_n = [\varphi_n^r, \psi_n^r, \varphi_n^\theta, \psi_n^\theta]^\top$ et $f_{n,R}$ la décomposition du second membre

Le problème se réécrit

$$P_n \Phi_n + \mathcal{R}_{n,R} \Phi_n = f_{n,R}$$

avec $\|\mathcal{R}_{n,R}\|_\infty \leq Cn^2 R^{-2n+2}$, $\|\mathcal{R}_{1,R}\|_\infty \leq CR^{-4}$, $\|\mathcal{R}_{0,R}\|_\infty \leq CR^{-2}$

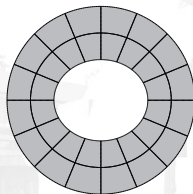
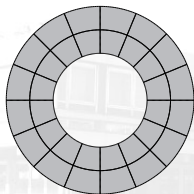
Résultat. Soit $\gamma = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$

1. Il existe un ensemble dénombrable $\mathcal{S}$ tel que pour tout $\gamma \notin \mathcal{S}$, P_n est inversible d'inverse borné en n
2. Pour tout $\gamma \notin \mathcal{S}$, il existe R_γ tel que le problème de Ventcel admet une unique solution pour $R \geq R_\gamma$

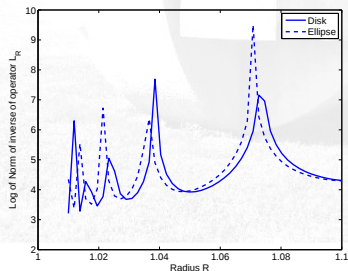
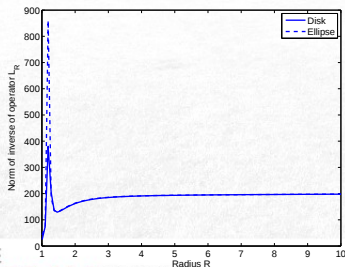
Problème de Vencel pour l'élasticité

Simulations numériques

► Géométries :



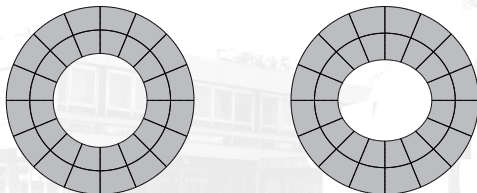
► Normes de résolvantes en fonction de R



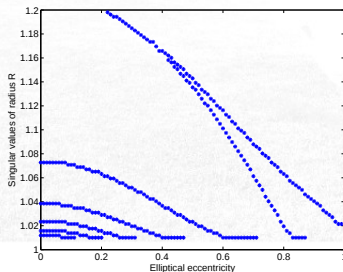
Problème de Vencel pour l'élasticité

Simulations numériques

► Géométries :



► Rayons R singuliers en fonction de l'excentricité :



The background of the slide features a faded image of a modern, multi-story building with large windows and a flat roof, situated on a grassy area. To the right of the building is a large, abstract sculpture made of stacked rectangular blocks, forming a rounded, egg-like shape with a face-like pattern of blocks on its side.

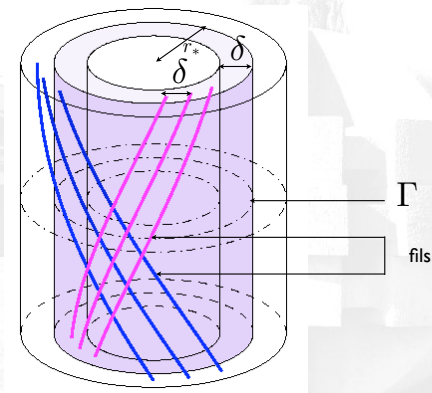
Quelques problèmes non coercifs de type Ventcel



Exemples de problèmes de Ventcel non-coercifs

En électromagnétisme [Thèse B. Delourme 2010]

- ▶ Structure 3D mince
- ▶ Répartition périodique
- ▶ Eq. de Maxwell harmoniques
- ▶ Développement en δ
(*homog. et dvpts raccordés*)
- ▶ Conditions aux limites
approchées sur Γ



Exemples de problèmes de Ventcel non-coercifs

En électromagnétisme [Thèse B. Delourme 2010]

Problème modèle 2D

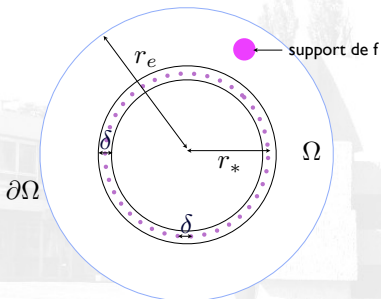
- ▶ Géométrie simplifiée

- ▶ Eq. de Helmholtz :

$$\operatorname{div}(\varepsilon_\delta^{-1} \nabla u) + \omega^2 \mu_\delta u = f.$$

- ▶ Condition de radiation sur $\partial\Omega$

$$\partial_r u + i\omega u = 0.$$



Modèle asymptotique d'ordre 1

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varepsilon_\infty^{-1} \Delta u + \omega \mu_\infty u = f & \text{dans } \Omega_\pm, \\ \partial_r u + i\omega u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ [u]_\Gamma = \delta A_0 \langle r \partial_r u \rangle_\Gamma & \text{sur } \Gamma, \\ [r \partial_r u]_\Gamma = \delta \left(-\omega^2 B_0 \langle u \rangle_\Gamma - B_2 \partial_\theta^2 \langle u \rangle_\Gamma \right) & \text{sur } \Gamma. \end{array} \right.$$

Exemples de problèmes de Ventcel non-coercifs

En électromagnétisme [Thèse B. Delourme 2010]

Problème modèle 2D

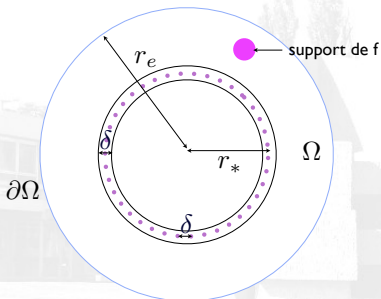
- ▶ Géométrie simplifiée

- ▶ Eq. de Helmholtz :

$$\operatorname{div}(\varepsilon_\delta^{-1} \nabla u) + \omega^2 \mu_\delta u = f.$$

- ▶ Condition de radiation sur $\partial\Omega$

$$\partial_r u + i\omega u = 0.$$



Modèle asymptotique d'ordre 1 $\langle \phi \rangle_\Gamma = \frac{1}{2}(\phi(x+0) + \phi(x-0))$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varepsilon_\infty^{-1} \Delta u + \omega \mu_\infty u = f & \text{dans } \Omega_\pm, \\ \partial_r u + i\omega u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ [u]_\Gamma = \delta A_0 \langle r \partial_r u \rangle_\Gamma & \text{sur } \Gamma, \\ [r \partial_r u]_\Gamma = \delta \left(-\omega^2 B_0 \langle u \rangle_\Gamma - B_2 \partial_\theta^2 \langle u \rangle_\Gamma \right) & \text{sur } \Gamma. \end{array} \right.$$

Exemples de problèmes de Ventcel non-coercifs

En électromagnétisme [Thèse B. Delourme 2010]

Problème modèle 2D

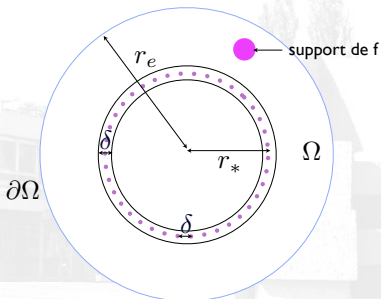
- ▶ Géométrie simplifiée

- ▶ Eq. de Helmholtz :

$$\operatorname{div}(\varepsilon_\delta^{-1} \nabla u) + \omega^2 \mu_\delta u = f.$$

- ▶ Condition de radiation sur $\partial\Omega$

$$\partial_r u + i\omega u = 0.$$

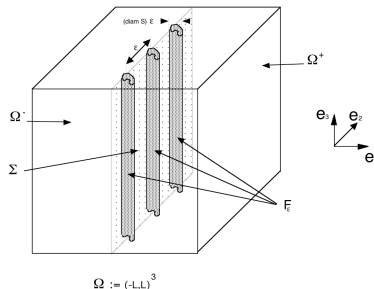
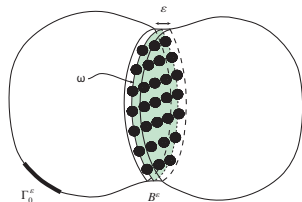


Modèle asymptotique d'ordre 1 $\langle \phi \rangle_\Gamma = \frac{1}{2}(\phi(x+0) + \phi(x-0))$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varepsilon_\infty^{-1} \Delta u + \omega \mu_\infty u = f & \text{dans } \Omega_\pm, \\ \partial_r u + i\omega u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ [u]_\Gamma = \delta A_0 \langle r \partial_r u \rangle_\Gamma & \text{sur } \Gamma, \\ [r \partial_r u]_\Gamma = \delta \left(-\omega^2 B_0 \langle u \rangle_\Gamma - B_2 \partial_\theta^2 \langle u \rangle_\Gamma \right) & \text{sur } \Gamma. \end{array} \right. \quad \text{Pb. } B_2 < 0$$

Exemples de problèmes de Ventcel non-coercifs

En mécanique [Projet ANR Epsilon -2012]



Couches minces d'hétérogénéités dans un matériau

- ▶ Condition de transmission approchée d'ordre 2
- ▶ Ventcel avec mauvais signe.

Exemples de problèmes de Ventcel non-coercifs

Pour des écoulements [Bresch-Milisic 2008]

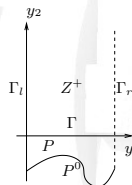
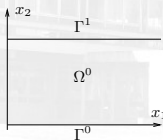
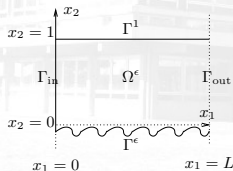


- ▶ Écoulement sur fond rugueux
- ▶ Géométrie périodique
- ▶ Construction de modèles approchés : *lois de parois*

Exemples de problèmes de Ventcel non-coercifs

Pour des écoulements [Bresch-Milisic 2008]

- ▶ Modèle 2D périodique
- ▶ Équation de Laplace Dirichlet/périodique



Loi de parois multi-échelles implicite d'ordre 2 :

$$\begin{cases} -\Delta v_\varepsilon = C & \text{dans } \Omega^0, \\ v_\varepsilon - \varepsilon \partial_n v_\varepsilon \beta(\frac{x_1}{\varepsilon}, 0) + \frac{\varepsilon^2}{2} \partial_\tau^2 v_\varepsilon \gamma(\frac{x_1}{\varepsilon}, 0) = 0 & \text{sur } \Gamma^0. \end{cases}$$

(β, γ solutions de problèmes de cellule, de signes contraires).

Conclusion - perspectives

- ▶ Géométries plus générales.
- ▶ Borne explicite pour les rayons singuliers ?
- ▶ Analyse numérique de la méthode asymptotique complète.

