

Sur la théorie d'homogénéisation et la modélisation des échanges gazeux respiratoire chez l'homme

homogénéisation-modèle respiratoire

SO Ousséni

Maître de Conférence, Université Ouaga 1/ Institut des Sciences (IDS)

Novembre 2016

Introduction

- Mécanisme des échanges gazeux respiratoire
- Modélisation des échanges gazeux respiratoires
- Convergence double échelle
- Modélisation du parenchyme pulmonaire

Conclusion et perspectives

Introduction

- Les sciences de la vie: utilisation de modèles mathématiques basés sur des systèmes dynamiques.

Introduction

- Les sciences de la vie: utilisation de modèles mathématiques basés sur des systèmes dynamiques.
- Les modèles dynamiques représentent des outils puissants pour valider (ou infirmer) des hypothèses biologiques:

Introduction

- Les sciences de la vie: utilisation de modèles mathématiques basés sur des systèmes dynamiques.
- Les modèles dynamiques représentent des outils puissants pour valider (ou infirmer) des hypothèses biologiques:
- **en évaluant le rôle des variables en jeu: concentrations moléculaires, effectifs de populations;**

Introduction

- Les sciences de la vie: utilisation de modèles mathématiques basés sur des systèmes dynamiques.
- Les modèles dynamiques représentent des outils puissants pour valider (ou infirmer) des hypothèses biologiques:
 - 1 en évaluant le rôle des variables en jeu: concentrations moléculaires, effectifs de populations;
 - 2 **en analysant les relations causales qui les relient.**

- Les sciences de la vie: utilisation de modèles mathématiques basés sur des systèmes dynamiques.
- Les modèles dynamiques représentent des outils puissants pour valider (ou infirmer) des hypothèses biologiques:
 - 1 en évaluant le rôle des variables en jeu: concentrations moléculaires, effectifs de populations;
 - 2 en analysant les relations causales qui les relient.
- Cette présentation axée sur la modélisation du parenchyme pulmonaire.

- Les sciences de la vie: utilisation de modèles mathématiques basés sur des systèmes dynamiques.
- Les modèles dynamiques représentent des outils puissants pour valider (ou infirmer) des hypothèses biologiques:
 - 1 en évaluant le rôle des variables en jeu: concentrations moléculaires, effectifs de populations;
 - 2 en analysant les relations causales qui les relient.
- Cette présentation axée sur la modélisation du parenchyme pulmonaire.
- **Rôle appareil respiratoire: fournir à l'organisme l'oxygène nécessaire à son fonctionnement et le débarrasser du gaz carbonique produit.**

- Les sciences de la vie: utilisation de modèles mathématiques basés sur des systèmes dynamiques.
- Les modèles dynamiques représentent des outils puissants pour valider (ou infirmer) des hypothèses biologiques:
 - ① en évaluant le rôle des variables en jeu: concentrations moléculaires, effectifs de populations;
 - ② en analysant les relations causales qui les relient.
- Cette présentation axée sur la modélisation du parenchyme pulmonaire.
- Rôle appareil respiratoire: fournir à l'organisme l'oxygène nécessaire à son fonctionnement et le débarrasser du gaz carbonique produit.
- **Le parenchyme pulmonaire = lieu des échanges gazeux respiratoires.**

- Les sciences de la vie: utilisation de modèles mathématiques basés sur des systèmes dynamiques.
- Les modèles dynamiques représentent des outils puissants pour valider (ou infirmer) des hypothèses biologiques:
 - ① en évaluant le rôle des variables en jeu: concentrations moléculaires, effectifs de populations;
 - ② en analysant les relations causales qui les relient.
- Cette présentation axée sur la modélisation du parenchyme pulmonaire.
- Rôle appareil respiratoire: fournir à l'organisme l'oxygène nécessaire à son fonctionnement et le débarrasser du gaz carbonique produit.
- Le parenchyme pulmonaire = lieu des échanges gazeux respiratoires.
- Il est constituée d'environ 300 millions d'alvéoles, chacune 0,1 à 0,3 mm de diamètre, superficie totale de 200 m².

Introduction

- Les sciences de la vie: utilisation de modèles mathématiques basés sur des systèmes dynamiques.
- Les modèles dynamiques représentent des outils puissants pour valider (ou infirmer) des hypothèses biologiques:
 - ① en évaluant le rôle des variables en jeu: concentrations moléculaires, effectifs de populations;
 - ② en analysant les relations causales qui les relient.
- Cette présentation axée sur la modélisation du parenchyme pulmonaire.
- Rôle appareil respiratoire: fournir à l'organisme l'oxygène nécessaire à son fonctionnement et le débarrasser du gaz carbonique produit.
- Le parenchyme pulmonaire = lieu des échanges gazeux respiratoires.
- Il est constituée d'environ 300 millions d'alvéoles, chacune 0,1 à 0,3 mm de diamètre, superficie totale de 200 m².
- **Nous montrerons comment faire un modèle du parenchyme en utilisant la théorie d'homogénéisation double échelle.**

Mécanisme des échanges gazeux respiratoires

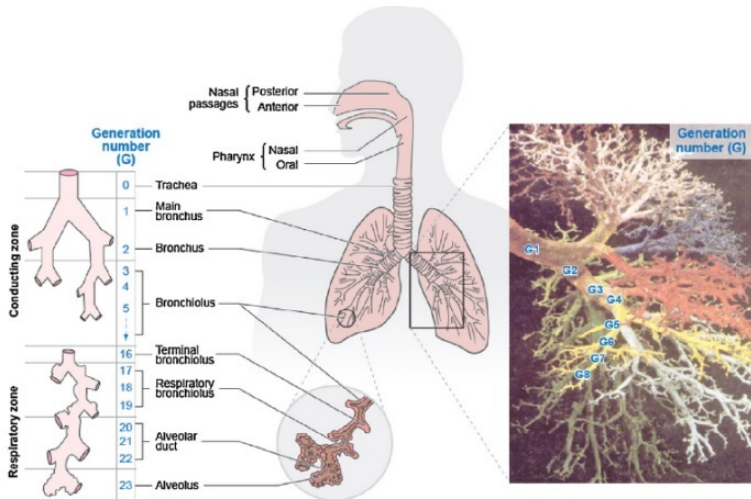


Figure 1: Schéma de l'appareil respiratoire

Le mécanisme des échanges gazeux respiratoires fait intervenir des interactions à des échelles très différentes:

- la traction à l'échelle macroscopique par le diaphragme sur le poumon;
- le gonflement des alvéoles à l'échelle microscopique;
- la circulation de l'air dans les voies respiratoires;
- les échanges d'oxygène et de gaz carbonique entre les poumons et le sang.

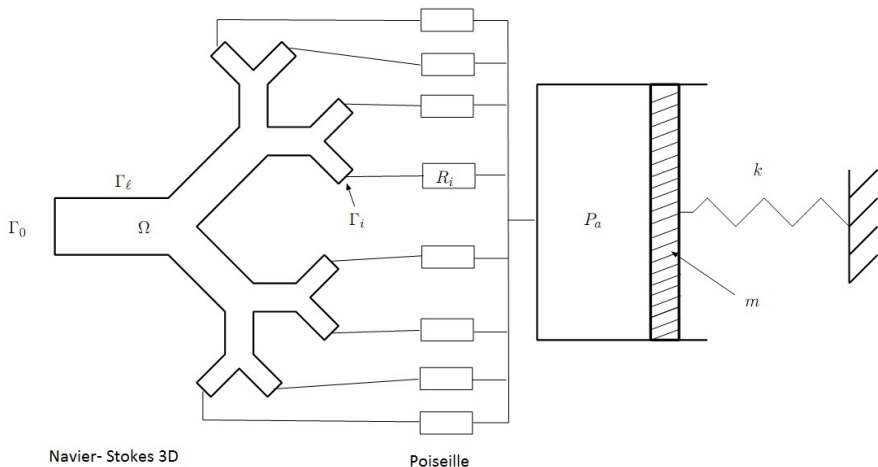


Figure 2: Modèle multi-échelle

- Les parties supérieures des bronches: modélisation du flux 3D par les équations de Navier Stokes pour prendre en compte la turbulence;
- Les bronchioles: modélisées par un arbre résistif représenté par la résistance équivalente, toutes connectées à un "réservoir" commun d'air où règne la pression alvéolaire P_a ;
- La partie élastique du parenchyme pulmonaire (la "mousse" formée par les alvéoles et le réseau capillaire) modélisé par un piston de masse m sur lequel agissent d'un côté la pression alvéolaire P_a , et de l'autre un ressort k qui modélise les propriétés élastiques du parenchyme et du diaphragme.

- Le parenchyme pulmonaire a été représenté de manière grossière et réduit à sa plus simple expression sous la forme d'un piston et d'un ressort.
- Le parenchyme est constitué au niveau microscopique principalement d'une "mousse" d'environ 300 millions d'alvéoles ayant chacune 0,1 à 0,3 mm de diamètre, pour une superficie totale de 200 m².
- On fait appel à la théorie de l'homogénéisation qui permet de comprendre le comportement macroscopique d'un matériau dont la structure microscopique est complexe.
- Dans le cas particulier d'une structure périodique (matériaux lamellés, cristaux, etc), on fait appel à la théorie de l'homogénéisation à double échelle introduite par Gabriel N'GUETSENG et développé par Grégoire ALLAIRE dans les années 1990.

Convergence double échelle

- Etudier la "convergence" des fonctions solution d'EDP sur le matériau complexe, quand on fait tendre le paramètre d'échelle ε des variations microscopiques vers 0.
- Le propre de la convergence double-échelle est alors de développer cette convergence à la fois au niveau macroscopique et au niveau de la cellule périodique de base, pour mieux capturer le comportement microscopique du matériau.
- On explicite ainsi les problèmes de cellule nécessaires pour calculer les coefficients des opérateurs homogénéisés.
- Parfois le problème double échelle est bien posé là où le simple problème homogénéisé perd ce caractère.

Definition

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert ($d \geq 1$), $Y = [0, 1]^d$ le cube unité fermé; $C_{\#}^{\infty}(Y)$ l'espace des fonctions infiniment différentiables sur \mathbb{R}^d et périodiques de période Y . Une suite $\{u_{\varepsilon}\} \subset L^2(\Omega)$ est dite convergente double-échelle vers une fonction $u_0 \in L^2(\Omega \times Y)$ si $\forall \psi \in D(\Omega, C_{\#}^{\infty}(Y))$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_{\varepsilon}(x) \psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \int_{\Omega} \int_Y u_0(x, y) \psi(x, y) dx dy.$$

On note $u_{\varepsilon} \rightharpoonup u_0$.

Theorem (G. Nguetseng, G. Allaire)

De toute suite bornée $\{u_\varepsilon\} \subset L^2(\Omega)$, on peut extraire une sous suite et il existe une fonction $u_0 \in L^2(\Omega \times Y)$ telle que cette sous suite converge double échelle vers u_0 .

Modélisation du parenchyme pulmonaire

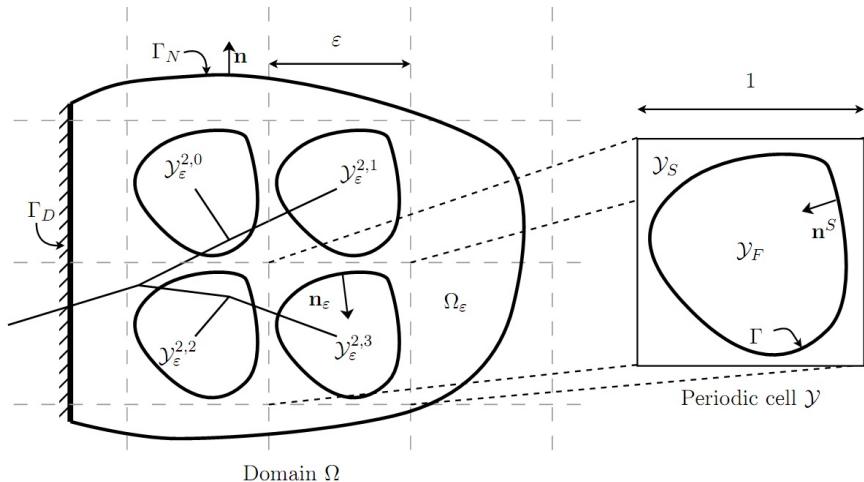


Figure 3: Parenchyme pulmonaire

Modélisation du parenchyme pulmonaire

- Parenchyme pulmonaire: domaine périodique construit à partir d'un ouvert borné régulier $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) et la cellule unité $\mathcal{Y} = (-1/2; 1/2)^d$.
- $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_F \cup \mathcal{Y}_S$ avec \mathcal{Y}_F boule ouverte et simplement connexe avec $\overline{\mathcal{Y}_F}$ strictement inclus dans \mathcal{Y} et \mathcal{Y}_S partie solide.
- On note $\mathcal{Y}^{\varepsilon, k} = \varepsilon(\mathcal{Y} + k)$, $\mathcal{Y}_F^{\varepsilon, k} = \varepsilon(\mathcal{Y}_F + k)$, $\mathcal{Y}_S^{\varepsilon, k} = \varepsilon(\mathcal{Y}_S + k)$ les transformations de la cellule unité par translation et homothétie et $\mathbb{Z}_\varepsilon^d = \left\{ k \in \mathbb{Z}^d : \overline{\mathcal{Y}^{\varepsilon, k}} \subset \Omega \right\}$.
- On définit le domaine perforé périodique Ω_ε et sa frontière intérieure Γ_ε : $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}_\varepsilon^d} \overline{\mathcal{Y}^{\varepsilon, k}}$; $\Gamma_\varepsilon = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}_\varepsilon^d} \partial \mathcal{Y}_F^{\varepsilon, k}$.
- Les alvéoles sont reliés par un arbre dyadique résistif représentant les connexions géométriques de l'arbre bronchique.

Modélisation du parenchyme pulmonaire

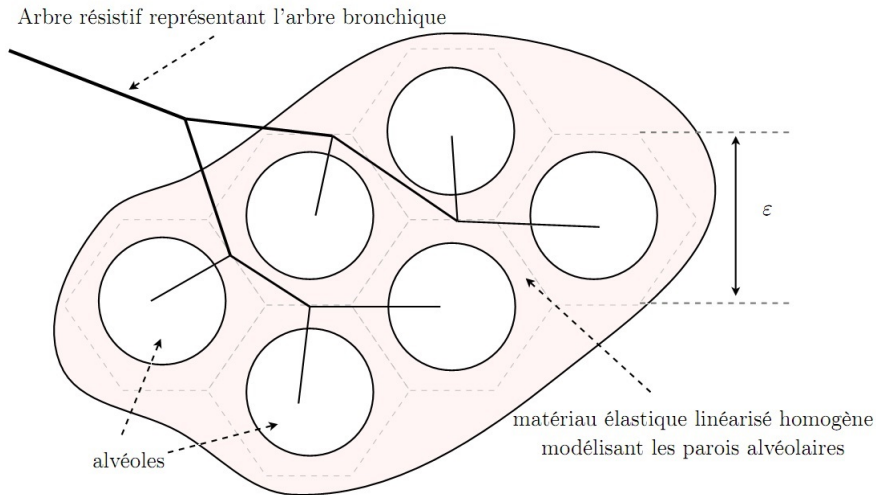


Figure 4: Parenchyme pulmonaire et arbre dyadique

Le déplacement de la structure est modélisé par les équations ci-dessous qui est un problème d'élasticité linéaire sur Ω_ε [P. Cazeaux; P. Cazeaux et C. Grandmont]:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2} - \operatorname{div} \sigma(u_\varepsilon) = f & \Omega_\varepsilon \\ \sigma(u_\varepsilon) n_\varepsilon = -p_\varepsilon^k n_\varepsilon & \Gamma_\varepsilon^k, \forall k \in \mathbb{Z}_\varepsilon^d \\ \sigma(u^\varepsilon) n = p_N n & \Gamma_N \\ u^\varepsilon = 0 & \Gamma_D \end{array} \right.$$

Dans le cas *compressible* l'opérateur d'élasticité

$$\sigma(u) = \lambda \operatorname{div}(u) Id + 2\mu \frac{\nabla^T u + \nabla u}{2};$$

λ, μ les coefficients de Lamé.

Posons $V = \{v \in H_1(\Omega) : v|_{\Gamma_D} = 0\}$; $X = L^2(\Omega)$.

Theorem (P. Cazeaux; P. Cazeaux et C. Grandmont)

Pour les EDP ci dessus:

$\exists u \in L^2(0, T, V)$ avec $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T, X)$;

$\exists u^1 \in L^2\left((0, T) \times \Omega; H_{\#}^1(\mathcal{Y})/\mathbb{R}^d\right)$

telles que $u_\varepsilon \rightharpoonup u$, $\nabla u_\varepsilon \rightharpoonup \nabla_x u + \nabla_y u^1$ et $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial t}$ lorsque ε tend vers 0.

Autrement dit le problème sur les cellules microscopiques est ramené à un problème global.






- Nous avons présenté une modélisation du déplacement du parenchyme.





- Nous avons présenté une modélisation du déplacement du parenchyme.
- Théorie d'homogénéisation: modèle global prenant en compte les caractéristiques de la micro-structure.

- Nous avons présenté une modélisation du déplacement du parenchyme.
- Théorie d'homogénéisation: modèle global prenant en compte les caractéristiques de la micro-structure.
- Mais les mouvements du parenchyme uniquement ne sont pas suffisants: il faut prendre en compte les échanges gazeux entre le parenchyme et le sang.

- Nous avons présenté une modélisation du déplacement du parenchyme.
- Théorie d'homogénéisation: modèle global prenant en compte les caractéristiques de la micro-structure.
- Mais les mouvements du parenchyme uniquement ne sont pas suffisants: il faut prendre en compte les échanges gazeux entre le parenchyme et le sang.
- **Objectif: faire un modèle global des échanges gazeux respiratoires.**

- Nous avons présenté une modélisation du déplacement du parenchyme.
- Théorie d'homogénéisation: modèle global prenant en compte les caractéristiques de la micro-structure.
- Mais les mouvements du parenchyme uniquement ne sont pas suffisants: il faut prendre en compte les échanges gazeux entre le parenchyme et le sang.
- Objectif: faire un modèle global des échanges gazeux respiratoires.
- Un Doctorant est depuis quelques mois sur ce travail.

-  G. Allaire. Homogenization and two-scale convergence. SIAM J. Math. Anal., 23(6) :1482–1518, 1992.
-  Paul Cazeaux. Quelques modèles mathématiques homogénéisés appliqués à la modélisation du parenchyme pulmonaire. Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, Dec 2012.
-  Paul Cazeaux, Céline Grandmont. Homogenization of a Multiscale Viscoelastic Model with Nonlocal Damping, Application to the Human Lungs. Math. Mod. Meth. Appl. Sci. (M3AS) 25 (6) pp 1125, 2015.
-  C. Grandmont, B. Maury, and N. Meunier. A viscoelastic model with non-local damping, application to the human lungs. Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 40 (1) : 201–224, 2006.
-  G. Nguetseng. A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization. SIAM J. Math. Anal., 20 (3): 608–623, 1989.

-  G. Nguetseng. Asymptotic analysis for a stiff variational problem arising in mechanics. *SIAM J. Math. Anal.*, 21(6) :1394–1414, 1990.
-  B. Maury, D. Salort, C. Vannier, Trace theorems for trees, application to the human lung, *Network and Heterogeneous Media*, Volume 4, Number 3, pp. 469–500, September 2009.
-  C. Vannier. Modélisation mathématique du poumon humain. PhD thesis, Université Paris–Sud (Orsay), Jul 2009.
-  E. R. Weibel. Morphometry of the human lung. Springer, page 151, Jan 1963.

Merci

Merci

MERCI DE VOTRE AIMABLE ATTENTION